

I Ondes acoustiques et oreille externe

I.A – Équations des ondes acoustiques

I.A.1) L'approximation acoustique consiste à considérer :

- les perturbations dues à l'onde faibles devant les grandeurs d'équilibre,
- la vitesse des particules de fluide faible devant la célérité des ondes.

Ordre de grandeur de la surpression engendrée par une personne qui parle : 10 mPa.

I.A.2) Équations locales:

$$\cdot \text{Équation de continuité : } \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (1)$$

$$\cdot \text{Équation d'Euler (on néglige le poids) : } \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\nabla} P \quad (2)$$

$$\cdot \text{Compressibilité du milieu : } \chi_s = \left(\frac{\partial(\ln(\rho))}{\partial P} \right)_s \quad (3)$$

Étant donné que toutes les évolutions seront isentropiques dans la suite, on peut écrire cette dernière

relation sous la forme : $\chi_s = \frac{d(\ln(\rho))}{dP}$ (fluide barotrope $P = f(\rho)$ uniquement)

Expressions linéarisées :

$$(1') \quad : \quad \frac{\partial \mu}{\partial t} + \rho_0 \text{div}(\vec{v}) = 0$$

$$(2') \quad : \quad \rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\vec{\nabla} p$$

$$(3') \quad : \quad \chi_s = \frac{1}{\rho_0} \frac{d\mu}{dp}$$

Équation de propagation pour la surpression:

$$\cdot \text{div} (2') \Leftrightarrow \boxed{\rho_0 \frac{\partial \text{div}(\vec{v})}{\partial t} = -\Delta p} \quad (2'') \quad (\text{en utilisant le théorème de Schwarz})$$

$$\cdot (1') \text{ et } (3') \Rightarrow \text{div}(\vec{v}) = -\frac{1}{\rho_0} \frac{d\mu}{dp} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (\text{en utilisant le th. de dérivation des fonctions composées})$$

$$= -\chi_s \frac{\partial p}{\partial t} \quad (4)$$

$$\cdot \frac{\partial(4)}{\partial t} \Leftrightarrow \boxed{\frac{\partial \text{div}(\vec{v})}{\partial t} = -\chi_s \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}} \quad (4')$$

$$(2'') \text{ et } (4') \Rightarrow \boxed{\Delta p = \rho_0 \chi_s \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}}, \text{ avec la célérité } \boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_s}}}$$

I.A.3) Pour une évolution isentropique d'un gaz parfait, $P\rho^{-\gamma} = Cte$ (loi de Laplace), donc $\chi_s = \frac{1}{\gamma P_0}$.

Par ailleurs, $\rho_0 = \frac{MP_0}{RT}$ d'après l'équation d'état (M étant la masse molaire), donc $\boxed{c = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}}$.

Pour l'air à 290 K et sous 1,0 bar : $c = \sqrt{\frac{1,40,8,31,290}{28,8,10^{-3}}} = 342 \text{ m.s}^{-1}$.

I.A.4) Pour l'eau, la masse volumique est plus élevée que celle de l'air ($\times 10^3$ environ), mais la compressibilité beaucoup plus faible ($\chi_{S,air} \approx 10^{-5} \text{ Pa}^{-1}$, $\chi_{S,eau} \approx 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$), d'où une célérité plus grande.

I.A.5) Plusieurs éléments contribuent à la difficulté de localiser un son d'une fréquence de l'ordre de quelques centaines de hertz (hélice de bateau) dans l'eau :

- La longueur d'onde dans l'eau est de l'ordre de 3 m à 500 Hz, par exemple, alors qu'elle est de 70 cm dans l'air : la source peut être localisée dans l'air par la différence des ondes reçues par les deux oreilles ; dans l'eau, en revanche, la distance séparant les oreilles est très faible devant la longueur d'onde, et le son donc quasi identique (d'autant que le cerveau se réfère à l'audition dans l'air par habitude...),

- La diffraction par les surfaces rencontrées par les ondes entre le moteur et le plongeur (par exemple la surface irrégulière de la mer) renvoie le son dans toutes les directions car la longueur d'onde est grande devant les variations spatiales. C'est également le cas lors de l'émission au niveau de l'hélice. Le son arrive donc sur le plongeur de plusieurs directions.

- L'oreille externe n'est pas bien adaptée à l'audition sous l'eau (rupture d'impédance entre l'eau et l'air qui reste dans le conduit), et la conduction des sons par la boîte crânienne jusqu'à l'oreille interne joue un rôle plus important que dans l'air. Ce mode d'audition est beaucoup moins directionnel que le système pavillon-conduit acoustique de l'oreille externe, qui avec une seule oreille, permet aussi une localisation par recherche de la direction de son maximal.

I.A.6) On obtient la relation demandée ("théorème de Poynting acoustique"), en utilisant la relation d'analyse vectorielle (non donnée) : $\boxed{\text{div}(p\vec{v}) = p \text{div}(\vec{v}) + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}p}$, ainsi que (2') et (4) :

$$\text{div}(p\vec{v}) = -p \chi_s \frac{\partial p}{\partial t} - \rho_0 \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\chi_s \frac{p^2}{2} + \rho_0 \frac{v^2}{2} \right)$$

Signification :

Dans tout volume du fluide l'énergie acoustique, de densité volumique $\chi_s \frac{p^2}{2} + \rho_0 \frac{v^2}{2}$ (densité volumique d'énergie potentielle élastique + densité volumique d'énergie cinétique), ne varie que par échange à travers la surface, le flux de $p\vec{v}$ sur une surface représentant la puissance acoustique qui la traverse.

Analogie :

Théorème de Poynting pour une onde électromagnétique dans le vide :

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon_0 \frac{E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \text{div} \left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right) = 0.}$$

I.B – Impédance et intensité acoustique

I.B.1) Si p et v ne sont fonctions que de $\tau = t - x/c$, (2') s'écrit :

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} \vec{u}_x \quad (\vec{u}_x \text{ unitaire}), \text{ ou encore } \boxed{\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial \tau} = \frac{1}{c} \frac{\partial p}{\partial \tau} \vec{u}_x}$$

(en utilisant une nouvelle fois le th. de dérivation des fonctions composées), d'où $\boxed{\rho_0 c \vec{v} = p \vec{u}_x + \vec{C}te}$.

En l'absence d'onde, $p = 0$ et $\vec{v} = \vec{0}$: le vecteur constant est donc nul.

$$\boxed{\vec{v} = \frac{p}{Z} \vec{u}_x}, \text{ avec } \boxed{Z = \rho_0 c}.$$

$$\text{A.N. : } Z_{\text{air}} (1,0 \text{ bar ; } 290\text{K}) = 1,19 \times 342 = 408 \text{ Pa.s.m}^{-1} \quad \left(\rho_0 = \frac{MP_0}{RT} \right)$$

$$Z_{\text{eau}} \approx 10^3 \times 1,5. 10^3 \approx 1,5. 10^6 \text{ Pa.s.m}^{-1}. \text{ On remarque que } Z_{\text{eau}} \gg Z_{\text{air}}.$$

$$I.B.2) I = \langle \|p\vec{v}\| \rangle_{\text{temps}} = \langle \frac{p^2}{Z} \rangle = \frac{1}{2} \frac{p_0^2}{Z} = \frac{1}{2} \frac{p_0^2}{\rho_0 c}$$

I.B.3) Le déplacement acoustique u est lié à la vitesse acoustique par $v = \frac{\partial u}{\partial t} \Leftrightarrow v = j\omega u$,

d'où $u_0 = \frac{v_0}{\omega} = \frac{p_0}{Z\omega}$.

D'après la question précédente : $p_0 = \sqrt{2\rho_0 c I}$, donc $u_0 = \frac{\sqrt{2\rho_0 c I}}{Z\omega} = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{2I}{\rho_0 c}}$

A.N. : À 440 Hz, au seuil d'audition ($I_0 = 10^{-12} \text{ W.m}^{-2}$), $u_0 = \frac{1}{2\pi \cdot 440} \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-12}}{408}} \approx 25 \text{ pm}$, inférieur aux dimensions atomiques !

Au seuil de la douleur, $I = 1 \text{ W.m}^{-2}$ (document 1) : $u_0 = \frac{1}{2\pi \cdot 440} \sqrt{\frac{2}{408}} \approx 25 \text{ }\mu\text{m}$, encore très faible.

(Nota : La mention du niveau acoustique n'intervient ici qu'à titre de rappel de la définition puisque les puissances sont données dans le document 1.)

I.C – L'oreille externe

I.C.1) Dans un cornet acoustique (comme celui du professeur Tournesol), la surface à une forme telle que les réflexions multiples sur les parois renvoient vers l'axe une bonne partie de l'énergie incidente, initialement répartie sur la surface d'entrée. Le pavillon de l'oreille est moins symétrique, mais la fonction est la même (l'effet inverse est recherché avec un cornet de gramophone ou de porte-voix ou le pavillon d'un trombone !).

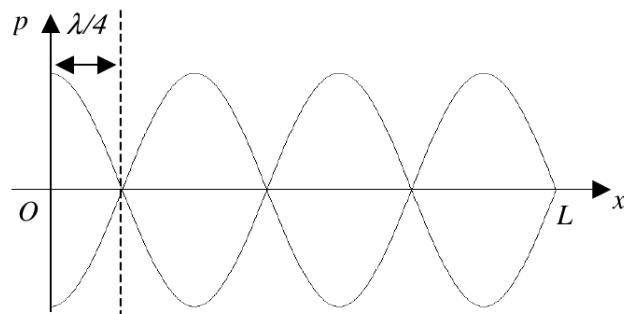
I.C.2) *Impédance nulle* : p doit s'annuler. Il suffit de laisser l'extrémité ouverte, la pression sera imposée par l'atmosphère extérieure, au repos, par continuité de la pression.

Impédance infinie : v doit s'annuler. Par continuité de la vitesse normale, on doit utiliser une paroi rigide orthogonale à la vitesse.

L'onde résultant de la superposition des ondes incidente et réfléchi est stationnaire car les coefficients de réflexion ont un module égal à 1 dans ces deux cas.

I.C.3) Le son sera particulièrement amplifié lorsqu'il y aura résonance, c'est-à-dire, pour un tuyau de longueur L ouvert à une extrémité et fermé à l'autre : $L = (2n + 1) \frac{\lambda}{4}$, $n \in \mathbb{N}$.

Représentation des valeurs extrémales de la surpression pour $n = 3$: un nœud et un ventre voisins sont distants de $\frac{\lambda}{4}$.



D'où $f = (2n + 1) \frac{c}{4L} = (2n + 1) \frac{340}{4 \times 3 \cdot 10^{-2}} = (2n + 1) \times 2,8 \cdot 10^3$

avec $f \in [20 \text{ Hz}, 20 \text{ kHz}]$, $2n + 1 \in [1..7] \Leftrightarrow n \in [0..3] \Leftrightarrow f \in \{2,8 ; 8,4 ; 14 ; 19,6\} \text{ kHz}$.

On retrouve à peu près le maximum de sensibilité situé entre 3 et 4 kHz sur la courbe du document 4 : il correspond au mode $n = 0$ soit $L = \frac{\lambda}{4}$. Les résonances dues aux modes d'ordre 1 et 2 (oublions celui d'ordre 3, trop limite) semblent masquées par d'autres phénomènes...

I.D – Protection acoustique

I.D.1) Il faut d'abord déterminer les fréquences des notes considérées, en utilisant le fait que deux sons séparés d'un ton ont des fréquences dans le rapport 8/9 (Cf. document 3), et d'un demi-ton des fréquences dans le rapport $\sqrt{\frac{8}{9}}$.

$$\text{Ainsi } f_{mi} = \sqrt{\frac{8}{9}} f_{fa} ; f_{fa} = \sqrt{\frac{8}{9}} f_{fa\#} ; f_{fa\#} = \sqrt{\frac{8}{9}} f_{sol} ; f_{sol} = \sqrt{\frac{8}{9}} f_{sol\#} ; f_{sol\#} = \sqrt{\frac{8}{9}} f_{la} ; f_{la} = \sqrt{\frac{8}{9}} f_{sib}$$

(Nota : la progression par demi-ton n'est pas définie dans l'énoncé, mais on peut raisonner par intervalles d'un ton à partir des deux fréquences des positions 1 et 2, la deuxième étant obtenue d'après la longueur donnée. Il faut toutefois un minimum de culture musicale car les intervalles de la gamme ne sont pas rappelés).

Le document 3 indique qu'il s'agit des modes fondamentaux du trombone, avec $f = 115,2$ Hz, soit $\lambda = \frac{c}{f} = \frac{340}{115,2} \approx 2,95$ m, pour $L = 2,950$ m, soit $\boxed{\lambda \approx L}$. Il s'agit donc d'un mode à extrémités fixes (pour la surpression).

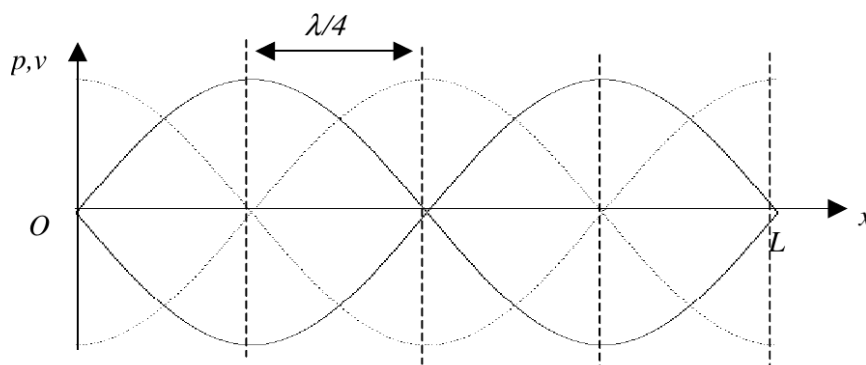
Rem : le mode fondamental du trombone pour une longueur donnée est en fait le premier harmonique du tuyau sonore.

On calcule ensuite les longueurs d'ondes pour chacune des positions de la coulisse, et on vérifie l'accord pour les autres longueurs indiquées dans l'énoncé : très bon pour la deuxième position, encore très correct pour la septième. On peut donc compléter la ligne des longueurs par les valeurs des longueurs d'onde.

Tableau I complété :

Position de la coulisse	1	2	3	4	5	6	7
Note	sib	la	lab ou sol#	sol	solb ou fa#	fa	mi
Fréquence de la note (Hz)	115,2	108,6	102,4	96,54	91,02	85,82	80,91
Longueur d'onde (m)	2,95	3,13	3,32	3,52	3,74	3,96	4,20
Longueur du tuyau (m)	2,950	3,126	"	"	"	"	4,174

I.D.2) Représentation des valeurs extrémales de la surpression (trait plein) et de la vitesse (pointillé). Les ventres de p correspondent aux nœuds de v , et inversement :



I.D.3) D'après le document 3 : "Grâce aux fréquences harmoniques que l'on peut tirer de l'instrument pour chaque position de coulisse, la tessiture (gamme de fréquences) du trombone s'étend sur trois octaves et une quinte."

"Une octave est l'intervalle séparant deux sons dont la fréquence fondamentale du plus aigu est le double de celle du plus grave. La quinte est l'intervalle séparant deux sons dont les fréquences fondamentales sont dans le rapport 2/3."

Trois octaves et une quinte correspondent à un rapport de fréquence de $2^3 \times \frac{3}{2} = 12$. La fréquence fondamentale étant 80,91 Hz (position 7), la fréquence maximale est 970,9 Hz.

I.D.4) Toujours d'après le document 3, le trombone produit une intensité d'au moins 85 dB à 20 cm du pavillon. Donc, dès que l'instrumentiste ne joue plus pianissimo, il peut émettre des sons dangereux pour l'ouïe, d'après le document 4.

1^{ère} réponse possible :

La réponse qui vient naturellement à l'esprit est que, dans un orchestre, la multitude des instruments peut créer une intensité résultante bien plus importante (+ 3dB à chaque doublement du son) et si on veut pouvoir jouer une heure, il doit falloir abaisser le niveau sonore à moins de 90 dB, donc diminuer d'environ 20 dB ce qui n'autorise pas les bouchons C et D. En revanche, à la maison, on peut déjà jouer moins fort et la réverbération n'aboutira pas de toute façon à un son entendu supérieur aux 105 dB.

2^{ème} réponse possible :

La zone dangereuse est vers l'avant de l'instrument, dans la direction de l'axe du pavillon : lors d'un concert symphonique, il faut surtout éloigner les musiciens placés devant, et munir tout le monde de bouchons atténuant modérément et à bande passante large (type D), pour que les instrumentistes puissent s'entendre mutuellement.

Des mesures (voir par exemple : http://www.amsn.fr/iso_album/article_medecine_des_arts.pdf) montrent que les instrumentistes qui jouent des cuivres ne sont pas les plus exposés dans une salle de concert ! - ce peut être différent dans une fosse d'opéra -, mais qu'il faut être vigilant lors d'entraînements seul, dans une pièce ordinaire (le son réverbéré par les murs revient vers le tromboniste) ; de plus, les séances peuvent durer plusieurs heures chaque jour, donc la protection doit être plus efficace, même s'il en résulte une moins bonne restitution du spectre de l'instrument : des protections de type A s'imposent.

En l'absence d'élément permettant une validation dans l'énoncé, les deux raisonnements me semblent acceptables, même s'ils conduisent à des conclusions inverses !

II Le rôle de l'oreille moyenne

II.A – Onde acoustique et conditions aux limites

II.A.1) Continuité de la pression, donc de la surpression acoustique.

Continuité de la vitesse normale (écoulements parfaits), qui s'identifie à la vitesse acoustique ici.

II.A.2)

$$\begin{cases} \underline{p}_1(0,t) = \underline{p}_2(0,t) \\ \underline{v}_1(0,t) = \underline{v}_2(0,t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{p}_i(0,t) + \underline{p}_r(0,t) = \underline{p}_2(0,t) \\ \underline{v}_i(0,t) + \underline{v}_r(0,t) = \underline{v}_2(0,t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{p}_i(0,t) + \underline{p}_r(0,t) = \underline{p}_2(0,t) \\ \frac{\underline{p}_i(0,t) - \underline{p}_r(0,t)}{Z_1} = \frac{\underline{p}_2}{Z_2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+r = t \\ 1-r = \frac{Z_1}{Z_2} t \end{cases}$$

II.A.3)

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} t = \frac{2}{1 + \frac{Z_1}{Z_2}} \\ r = \frac{1 - \frac{Z_1}{Z_2}}{1 + \frac{Z_1}{Z_2}} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} R = \frac{I_r}{I_i} = \frac{\frac{1}{2} \frac{p_{or}^2}{Z_1^2}}{\frac{1}{2} \frac{p_{oi}^2}{Z_1^2}} = \frac{p_{or}^2}{p_{oi}^2} = r^2 = \left(\frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \right)^2 \\ T = \frac{I_t}{I_i} = \frac{\frac{1}{2} \frac{p_{ot}^2}{Z_2^2}}{\frac{1}{2} \frac{p_{oi}^2}{Z_1^2}} = \frac{Z_1}{Z_2} \frac{p_{ot}^2}{p_{oi}^2} = \frac{Z_1}{Z_2} t^2 = \frac{4 Z_2 Z_1}{(Z_2 + Z_1)^2} \end{array} \right.$$

II.A.4) Pour le passage de l'air à l'eau, $Z_1 \approx 400 \text{ Pa.s.m}^{-1}$ et $Z_2 \approx 1,5 \cdot 10^6 \text{ Pa.s.m}^{-1} \gg Z_1$, d'où $T \approx \frac{4 Z_2 Z_1}{Z_2^2} = \frac{4 Z_1}{Z_2} \approx \frac{4 \times 400}{1,5 \cdot 10^6} \approx 1,1 \cdot 10^{-3}$ et $R = 1 - T \approx 1 - 1,1 \cdot 10^{-3}$. La transmission de l'énergie se fait très mal !

La chute de niveau acoustique est alors $\Delta I_{dB} = 10 \log \frac{I_t}{I_i} = 10 \log T \approx -30 \text{ dB}$.

II.A.5) D'après le document 1, la chaîne d'osselets (avec le tympan) est placée entre l'air et l'eau (de la cochlée) car une simple interface air/eau ne permettrait une audition convenable (c'est ce qui est observé lorsque la chaîne d'osselets est détériorée, par une exposition à des niveaux sonores excessifs, par exemple).

II.B – La chaîne d'osselets

II.B.1) Si l'on suppose le levier de masse négligeable, le théorème du moment cinétique par rapport à l'axe de la liaison pivot s'écrit $F_1 d_1 \approx F_2 d_2$, où $F_1 = p_1 S_1$ est la force exercée sur le levier par l'oreille externe et $F_2 = p_2 S_2$ la force exercée par l'oreille interne.

Donc $\boxed{\frac{p_2}{p_1} \approx \frac{S_1 d_1}{S_2 d_2} \approx 20 \times 1,3 \approx 26}$.

II.B.2) Le gain en intensité acoustique est $\boxed{\Delta I_{dB} = 10 \log \frac{p_2^2}{p_1^2} \approx 20 \log 26 \approx 28 \text{ dB}}$.

Le système est fortement amplificateur, ce qui explique une partie de la sensibilité de l'oreille, constatée au I.B.3.

III L'oreille interne

III.A. Considérons un déplacement d'ensemble x du "bouchon" constitué par le fluide dans le tube (Nota : le terme n'est pas bien défini dans l'énoncé) :

la variation du volume total de fluide est $\Delta V = s \cdot x$, ce qui entraîne la variation de pression

$\boxed{\Delta P = P - P_0 = -\frac{1}{V_0 \chi_s} s \cdot x}$ car $\chi_s = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_s \approx -\frac{1}{V_0} \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_s$ donc $dP = -\frac{1}{V_0 \chi_s} dV$ (à $S = C^{te}$).

Le théorème de la résultante cinétique appliqué au bouchon s'écrit, selon la direction x :

$\boxed{m \ddot{x} = s P_{cavité} - s P_{ouverture}}$
 $= s(P_0 + \Delta P - (P_0 + p_m \cos(\omega t))) = s(\Delta P - p_m \cos(\omega t)) = -s \left(\frac{1}{V_0 \chi_s} s \cdot x + p_m \cos(\omega t) \right)$

Avec $m = \rho_0 l s$: $\ddot{x} = -\frac{1}{\rho_0 l} \left(\frac{1}{V_0 \chi_s} s \cdot x + p_m \cos(\omega t) \right) \Leftrightarrow \boxed{\ddot{x} + \frac{c^2 s}{V_0 l} x = -\frac{p_m}{\rho_0 l} \cos(\omega t)}$.

Il y a résonance du déplacement lorsque ω est égale à la pulsation propre $\boxed{\omega_0 = c \sqrt{\frac{s}{V_0 l}}}$.

III.B. La membrane basilaire est décrite comme "plus étroite mais plus épaisse à sa base qu'à son extrémité" : on peut supposer que le caractère d'étroussure est traduit par le paramètre l , et l'épaisseur par s , ce qui justifierait qu'il y ait résonance à fréquence élevée à la base et à fréquence basse à l'extrémité.

III.C. Plus système est rigide, plus la fréquence de résonance est élevée ($\boxed{\omega_r = \sqrt{\frac{k}{m}}}$ pour un système masse-ressort), donc la membrane basilaire doit être plus rigide à la base ("épaisse") qu'à l'extrémité.

Remarque : à partir du document 1, il n'est pas évident de se faire une représentation réaliste de la membrane basilaire qui constitue tout de même l'objet d'étude de la partie III...

IV L'influx nerveux

IV.A – Modèle électrique des fibres nerveuses

IV.A.1) L'axoplasme étant un conducteur cylindrique, $r_a = \rho_a \frac{l}{S}$, avec $l = 1$ m et $S = \pi \frac{d^2}{4} = \pi \frac{10^2}{4} \approx 78$ (μm)².

A.N. : $r_a = 0,5 \frac{1}{78 \cdot 10^{-12}} \approx 6,4 \cdot 10^9 \Omega \cdot \text{m}^{-1}$ (très élevée car le milieu est peu conducteur et la section est très faible).

IV.A.2) $e/d \ll 1$: la membrane, très fine devant le rayon de courbure, est localement quasi plane, de sorte que sa capacité totale (par unité de longueur) peut être considérée résultant de l'association en parallèle de condensateur plans d'épaisseur e et de surface équivalente totale $\pi d \times (1$ m) (les capacités s'additionnent).

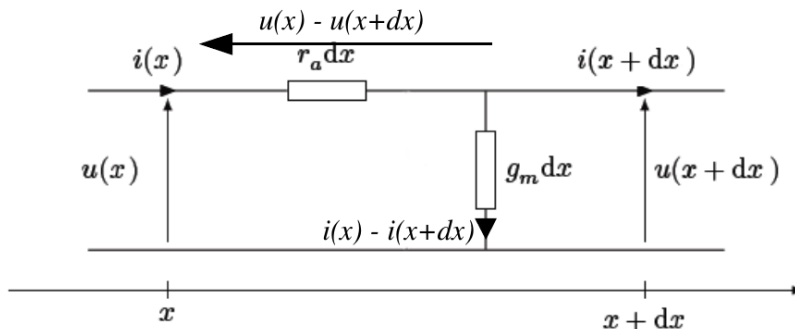
De même, la conductance totale (par unité de longueur) est la somme des conductances des éléments quasi plans en parallèle, de même épaisseur e et de surface équivalente totale $\pi d \times (1$ m).

IV.A.3) $\boxed{c_m = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\pi d}{e}}$ et $\boxed{g_m = \frac{1}{\rho_m} \frac{\pi d}{e}}$.

A.N. : $c_m = 8,85 \cdot 10^{-12} \times 8 \times \frac{\pi 10 \cdot 10^{-6}}{7 \cdot 10^{-9}} \approx 0,32 \mu\text{F} \cdot \text{m}^{-1}$, et $g_m = \frac{1}{7 \cdot 10^4} \times \frac{\pi 10 \cdot 10^{-6}}{7 \cdot 10^{-9}} \approx 63 \text{ mS} \cdot \text{m}^{-1}$.

IV.B – Constante d'espace

IV.B.1) En régime permanent, ne restent que les résistances :



IV.B.2) Loi d'Ohm pour $r_a dx$: $u(x) - u(x+dx) = r_a dx i(x)$;

et pour $g_m dx$: $i(x) - i(x+dx) = g_m dx u(x+dx)$,

d'où les équations différentielles :

$$\begin{cases} \frac{du(x)}{dx} = -r_a i(x) \\ \frac{di(x+dx)}{dx} = -g_m u(x+dx) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{du(x)}{dx} = -r_a i(x) \\ \frac{di(x)}{dx} = -g_m u(x) \end{cases}$$

puisque la deuxième relation du système, établie à la sortie de la cellule (en $x + dx$), est également vérifiée à l'entrée (x), par récurrence de la chaîne.

On élimine i en dérivant la première équation et en substituant $\frac{di(x)}{dx}$.

$u(x)$ vérifie donc : $\frac{d^2u(x)}{dx^2} = r_a g_m u(x) = \frac{u(x)}{\lambda^2}$, où $\lambda = \frac{1}{\sqrt{r_a g_m}}$ est la constante d'espace, homogène à une distance.

A.N. : $\lambda = \frac{1}{\sqrt{6,4 \cdot 10^9 \times 63 \cdot 10^{-3}}} \approx 50 \mu\text{m}$.

IV.B.3) $u(x) = A \cdot \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right) + B \exp\left(+\frac{x}{\lambda}\right)$: on élimine d'emblée l'exponentielle croissante car le système est passif, donc la limite à l'infini de u ne peut pas être infinie : $B = 0$.

$$u(x) = u(0) \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right) : \lambda \text{ est la distance caractéristique de l'atténuation de l'influx.}$$

IV.B.4) La myéline entourant l'axone ne fait que modifier la valeur de g_m , remplacée par g'_m .

La courbe de la figure 6 permet de calculer $\lambda' = \frac{1}{\sqrt{r_a g'_m}}$, par exemple en écrivant que

$$\frac{u(0,5\text{mm})}{u(0)} \approx \frac{1}{2} \text{ (ou bien en repérant l'intersection de la tangente à l'origine avec l'axe des abscisses),}$$

ce qui donne $\lambda' = \frac{0,5 \cdot 10^{-3}}{\ln 2} \approx 0,72 \text{ mm}$.

En prenant $x = 1 \text{ mm}$, on obtient plutôt $0,66 \text{ mm}$... L'allure exponentielle ne semble que grossièrement respectée, donc on arrondira la valeur de λ' à $0,7 \text{ mm}$.

On en déduit $g'_m = \frac{1}{r_a \lambda'^2} = \frac{1}{6,4 \cdot 10^9 \times (0,7 \cdot 10^{-3})^2} \approx 0,3 \text{ mS} \cdot \text{m}^{-1}$: la conductance de fuite de l'axone myélinisé est beaucoup plus faible que celle de l'axone seul.

La myéline entourant l'axone, les deux résistances linéiques s'additionnent :

$$\frac{1}{g'_m} = \frac{1}{g_m} + \frac{1}{g_{m,\text{myéline}}} \Leftrightarrow g_{m,\text{myéline}} = \frac{1}{\frac{1}{g'_m} - \frac{1}{g_m}} = \frac{1}{\frac{1}{0,3 \cdot 10^{-3}} - \frac{1}{63 \cdot 10^{-3}}} \approx 0,3 \text{ mS} \cdot \text{m}^{-1} \approx g'_m.$$

IV.C – Régime variable

IV.C.1) Loi d'Ohm pour $r_a dx$: $u(x,t) - u(x+dx,t) = r_a dx i(x,t)$.

La caractéristique de l'association parallèle conductance-capacité s'écrit :

$$i(x,t) - i(x+dx,t) = i_{cm} + i_{gm} = c_m dx \frac{\partial u(x+dx,t)}{\partial t} + g'_m dx u(x+dx,t),$$

d'où les équations différentielles :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = -r_a i(x,t) \\ \frac{\partial i(x+dx,t)}{\partial x} = -c_m \frac{\partial u(x+dx,t)}{\partial t} - g'_m u(x+dx,t) \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = -r_a i(x,t) \\ \frac{\partial i(x,t)}{\partial x} = -c_m \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - g'_m u(x,t) \end{array} \right.$$

On élimine i en dérivant la première équation et en substituant $\frac{\partial i(x,t)}{\partial x}$:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = r_a c_m \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + r_a g'_m u(x,t)$$

IV.C.2) On peut négliger le terme dû à la conductance de fuite lorsque

$$\left| \frac{g'_m u(x,t)}{c_m \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}} \right| \ll 1 \Leftrightarrow \frac{g'_m}{c_m} \left| \frac{u(x,t)}{\omega u(x,t)} \right| \ll 1 \Leftrightarrow \omega \gg \frac{g'_m}{c_m} \Leftrightarrow f \gg \frac{g'_m}{2\pi c_m} = \frac{0,30 \cdot 10^{-3}}{2\pi \cdot 0,32 \cdot 10^{-6}} \approx 150 \text{ Hz.}$$

L'approximation ne sera pas légitime pour les sons émis par un trombone dont la tessiture (Cf. I.D.3) est en dehors du domaine de l'approximation.

IV.C.3) L'EDP $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = r_a c_m \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ décrit un phénomène de diffusion (Cf. diffusions moléculaire ou thermique, propagation é.m. dans les métaux, ondes de viscosité,...).

IV.C.4) Pour $\underline{u}(x,t) = u_0 e^{j(\omega t - kx)}$, elle entraîne $k^2 = -j\omega r_a c_m$ (relation de dispersion).

$$k^2 \text{ imaginaire implique que } k \in \mathbb{C} : k^2 = e^{-j\frac{\pi}{2}} \omega r_a c_m \Leftrightarrow k = \pm e^{-j\frac{\pi}{4}} \sqrt{\omega r_a c_m} = \pm \frac{1-j}{\delta}, \text{ avec } \delta = \sqrt{\frac{2}{\omega r_a c_m}}.$$

. Le milieu est dispersif car la vitesse de phase dépend de la pulsation de l'onde. En effet,

$$v_\phi = \frac{\omega}{\Re(k)} = \omega \cdot \delta = \sqrt{\frac{2\omega}{r_a c_m}}.$$

. Le milieu est absorbant par effet Joule. L'onde est atténuée dans le sens de sa propagation puisque

$$\underline{u}(x,t) = u_0 e^{j(\omega t - kx)} = u_0 \exp\left(j\left(\omega t - \left(\pm \frac{1-j}{\delta} x\right)\right)\right) = u_0 \exp\left(\mp \frac{x}{\delta}\right) \exp\left(j\left(\omega t \mp \frac{x}{\delta}\right)\right).$$

. La vitesse de groupe est, par définition : $v_g = \frac{d\omega}{d\Re(k)}$.

Avec $\Re(k) = \pm \frac{1}{\delta} = \pm \sqrt{\frac{\omega r_a c_m}{2}}$, $v_g = \frac{1}{\left(\frac{d\Re(k)}{d\omega}\right)} = \pm \frac{1}{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{r_a c_m}{2\omega}}} = \pm 2 \sqrt{\frac{2\omega}{r_a c_m}}$, donc $v_g = 2v_\phi$.

IV.C.5) $\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega r_a c_m}}$ est une longueur caractéristique de l'atténuation. C'est une fonction décroissante de la fréquence.

IV.D – Ça brûle !

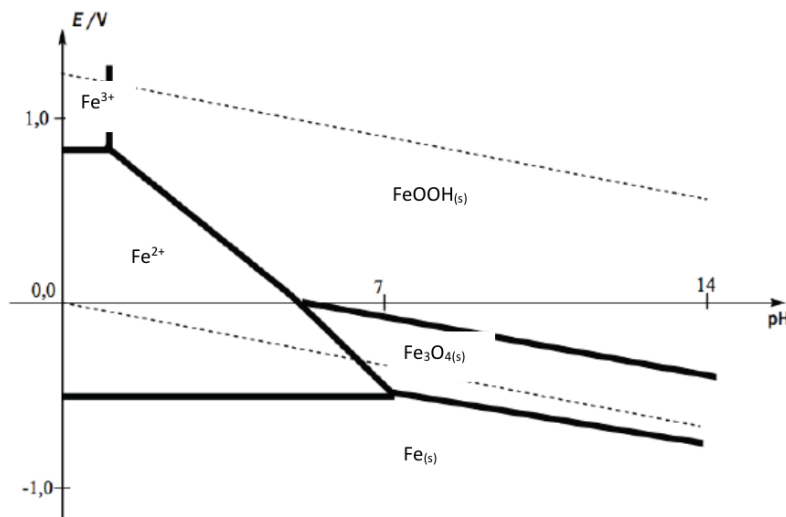
Les fibres nerveuse entourées de myéline ont une capacité linéique c''_m résultant de l'association en série de la myéline et de la fibre, donc $\frac{1}{c''_m} = \frac{1}{c_m} + \frac{1}{c'_m} > \frac{2}{c_m}$, car $c'_m < c_m$.

En conséquence, $c''_m < \frac{c_m}{2}$, de sorte que la vitesse de phase le long de la fibre entourée de myéline, sensible à la douleur, est nettement plus grande que celle de la fibre sans myéline, sensible à la chaleur.

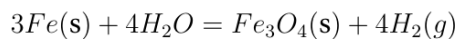
PARTIE CHIMIE : corrosion d'un béton armé (Mines ponts PSI 2016)

3. Le nombre d'oxydation du fer est 0 dans $Fe(s)$, +III dans $FeOOH(s)$ et 8/3 en moyenne dans $Fe_3O_4(s)$ (en réalité +II ou +III : 1 ion Fe^{2+} , 2 ions Fe^{3+} et 4 ions O^{2-})

4. On positionne les espèces par n.o. croissant de bas en haut; cations à pH faible et oxydes ou hydroxydes (bases conjuguées) à pH élevé :

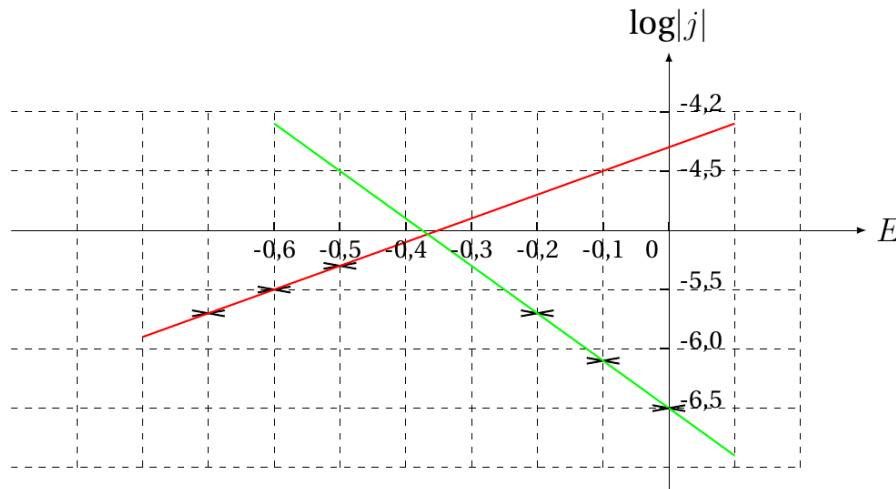
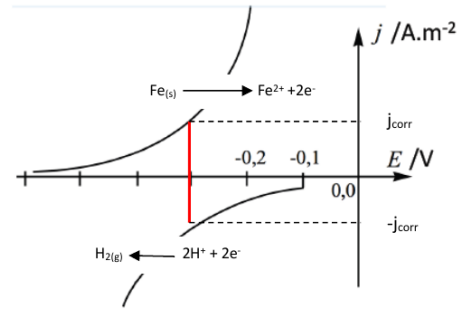


5. Le domaine de l'eau se situe entre les deux lignes pointillées; fer et eau ne peuvent donc coexister, quelque soit le pH; en milieu basique le fer est oxydé en $Fe_3O_4(s)$:



$Fe_3O_4(s)$ est stable en milieu aqueux désoxygéné comme le montre le diagramme ci-dessus.

6. Le diagramme $E(pH)$ montre bien que $E_H > E_{Fe}$ d'où les sens d'oxydation et de réduction; le potentiel de corrosion correspondant à $j_{ox} = -j_{red}$ est d'environ -0,3 V (trait rouge), ce que nous allons vérifier à la question suivante.



- 7.
- Courbe rouge : Pour des potentiels inférieurs ou égaux à - 0,5 V, la densité de courant correspond à la seule branche anodique (cf. ci-dessus).
 - Courbe verte : Pour des potentiels supérieurs ou égaux à - 0,2 V, la densité de courant correspond à la seule branche cathodique (cf. ci-dessus).
 - Si l'on trace $\log |j| = f(E)$, on obtient donc deux portions de droites de Tafel et l'intersection des deux fournit le potentiel de corrosion et le courant de corrosion. Ceci repose sur les mêmes arguments physiques que la détermination de la question précédente mais en plus précis.

On trouve $V_{cor} = -0,36$ V et $j_{cor} = 9.10^{-6} A.m^{-2}$.

8. En dt , $d\xi$ mol de fer disparaissent et $2d\xi$ mol d'électrons circulent dans la pile de corrosion.

$$dQ = i_{corr} dt = 2d\xi N_A e = 2F d\xi \quad \text{et} \quad dm_{Fe} = M(Fe) d\xi$$

Enfin en considérant que le volume qui disparaît vaut $-Sde(t)$ (attention $de(t) < 0$) :

$$dm_{Fe} = -\rho_{Fe} S de(t) S \quad \text{soit} \quad M(Fe) d\xi = -\rho_{Fe} S de(t)$$

En regroupant ces résultats et en tenant compte de $i_{corr} = j_{corr} S$, il vient : $\frac{de}{dt} = -\frac{M(Fe) j_{corr}}{2F \rho_{Fe}}$

9. AN : $e = 11 \mu m/an$.