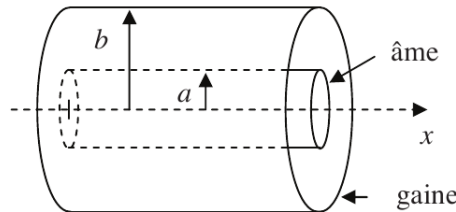


Calculatrice autorisée

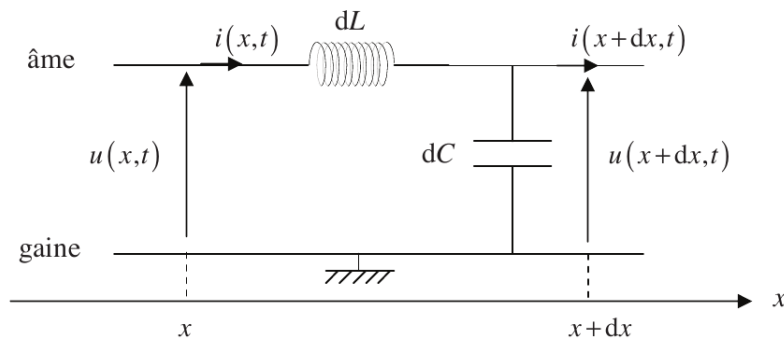
**PARTIE I : étude du câble coaxial**

Un câble coaxial, représenté en **figure 1**, est constitué d'un fil de cuivre cylindrique central, de rayon  $a$ , appelé âme, et d'un conducteur cylindrique creux de même axe de révolution, également en cuivre, appelé gaine et de rayon intérieur  $b$ . Un isolant occupe tout l'espace entre l'âme et la gaine. À l'entrée du câble coaxial, on place un générateur de tension, non représenté, entre l'âme et la gaine.



**Figure 1** – Structure d'un câble coaxial

On modélise le câble coaxial, milieu continu, par une ligne électrique à constantes réparties, pour laquelle on note respectivement  $\Lambda$  et  $\Gamma$  les inductance et capacité par unité de longueur. La ligne est modélisée par une succession de tronçons élémentaires de longueur  $dx$ , considérés comme des quadripôles élémentaires auxquels sont associées une inductance  $dL = \Lambda \cdot dx$  et une capacité  $dC = \Gamma \cdot dx$ . Le schéma électrique d'un tronçon de ligne de longueur  $dx$  est représenté en **figure 2**. Dans ce modèle, on néglige toute perte résistive. On note  $i(x,t)$  et  $i(x+dx,t)$  les intensités des courants dans la ligne, à l'instant  $t$ , aux abscisses respectives  $x$  et  $x+dx$ . On note  $u(x,t)$  et  $u(x+dx,t)$  les tensions entre l'âme et la gaine, à l'instant  $t$ , aux abscisses respectives  $x$  et  $x+dx$ . Les tensions et courants sont des signaux sinusoïdaux alternatifs de fréquence  $f$ .



**Figure 2** – Schéma électrique d'un tronçon de ligne de longueur  $dx$

**I.1 – Le câble coaxial parfait**

**Q1.** Comment le courant circulant dans l'âme revient-il jusqu'au générateur de tension ?

**Q2.** Démontrer que les deux équations différentielles couplées sur  $u$  et  $i$  sont :

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = -\Lambda \cdot \frac{\partial i(x,t)}{\partial t} \quad \text{et} \quad \frac{\partial i(x,t)}{\partial x} = -\Gamma \cdot \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}.$$

Vous considérerez, notamment, que :  $\frac{\partial u(x+dx,t)}{\partial t} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$  à l'ordre 0 en  $dx$ .

Par ailleurs, on rappelle que, puisque  $dx$  tend vers zéro, nous avons les relations suivantes :

$$u(x+dx,t) - u(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \cdot dx \quad \text{et} \quad i(x+dx,t) - i(x,t) = \frac{\partial i(x,t)}{\partial x} \cdot dx.$$

**Q3.** Montrer que  $u(x,t)$  et  $i(x,t)$  obéissent à deux équations de propagation de D'Alembert. En déduire l'expression de la vitesse de propagation  $v$  des signaux dans la ligne en fonction de  $\Lambda$  et  $\Gamma$ . Vérifier sa dimension.

**Q4.** On étudie les solutions des équations de D'Alembert en régime permanent sinusoïdal. La tension  $u(x,t)$  correspond à la partie réelle de la tension complexe  $\underline{u}(x,t)$ . L'intensité  $i(x,t)$  correspond à la partie réelle de l'intensité complexe  $\underline{i}(x,t)$ . On propose, avec  $j$  le nombre complexe tel que  $j^2 = -1$ , des solutions complexes des équations de propagation de la forme :

$$\underline{u}(x,t) = \rho \cdot i_0 \cdot \exp(j(\omega \cdot t - k \cdot x)) - \rho \cdot i_1 \cdot \exp(j(\omega \cdot t + k \cdot x))$$

et

$$\underline{i}(x,t) = i_0 \cdot \exp(j(\omega \cdot t - k \cdot x)) + i_1 \cdot \exp(j(\omega \cdot t + k \cdot x)).$$

Vérifier que  $\underline{u}(x,t)$  est compatible avec l'équation trouvée à la question **Q3**, à une condition sur  $v$ ,  $\omega$  et  $k$  qu'on explicitera.

Donner une interprétation physique de chacun des deux termes présents dans les expressions de  $\underline{u}(x,t)$  et  $\underline{i}(x,t)$ .

Pour la suite, nous considérerons toujours  $i_0$  non nul.

**Q5.** Donner l'expression de  $\rho$  en fonction de l'impédance caractéristique  $Z_c = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}$ .

Préciser son unité.

**Q6.** L'extrémité du câble, de longueur  $d$ , est fermée sur une impédance  $\underline{Z}$ . Exprimer  $i_1$  en fonction de :  $i_0$ ,  $\underline{Z}$ ,  $\rho$ ,  $k$  et  $d$ .

**Q7.** L'impédance totale de la ligne vue depuis l'abscisse  $x$ , notée  $\underline{Z}_l(x)$ , a pour expression :

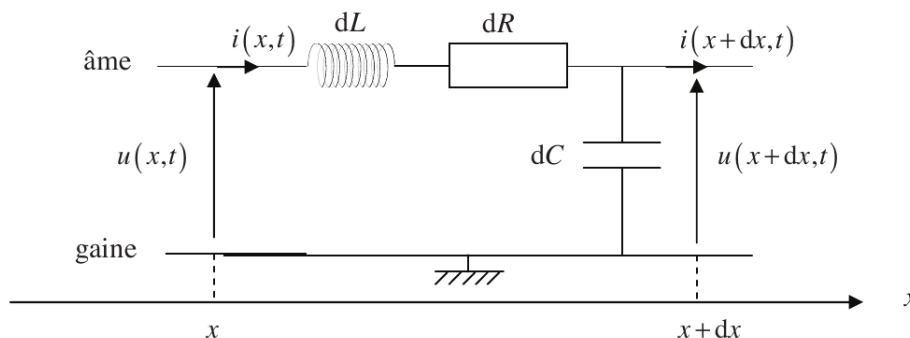
$$\underline{Z}_l(x) = \frac{\underline{u}(x,t)}{\underline{i}(x,t)}$$

Donner l'expression de  $\underline{Z}_l(x)$  en fonction de :  $\underline{Z}$ ,  $\rho$ ,  $k$ ,  $d$  et  $x$ . À quelle condition sur  $\underline{Z}$ , l'impédance  $\underline{Z}_l(x)$  est indépendante de l'abscisse  $x$ ? Quelle est alors l'expression de  $\underline{Z}_l(x)$ ? Que dire dans ce cas de  $i_1$  et que peut-on alors conclure?

Quelle impédance mettre en bout de câble pour s'assurer, dans le cadre des télécommunications, que la puissance transmise est optimale?

### I.2 – Le câble coaxial avec pertes

La modélisation précédente ne décrit qu'imparfaitement la propagation du signal. Aussi on se propose d'étudier le modèle représenté en **figure 3** dans lequel on a inséré une résistance  $dR = r \cdot dx$  par rapport au modèle de la **figure 2** de la page 2.



**Figure 3** – Schéma électrique d'un tronçon de ligne imparfait de longueur  $dx$

**Q8.** Quelle est l'origine physique de la résistance  $dR$  ?

**Q9.** Montrer que l'équation de propagation de l'onde de tension  $u(x,t)$  est :

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \Lambda \cdot \Gamma \cdot \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + r \cdot \Gamma \cdot \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}.$$

**Q10.** En considérant une solution de la forme  $\underline{u}(x,t) = u_0 \cdot \exp(j(\omega \cdot t - \underline{k} \cdot x))$  à l'équation de propagation précédente, dans laquelle  $\underline{k}$  est une pulsation spatiale complexe, trouver l'équation de dispersion associée à la ligne.

**Q11.** On écrit  $\underline{k}$  sous la forme :  $\underline{k} = \alpha - j \cdot \beta$ . Que représentent physiquement  $\alpha$  et  $\beta$  ? Justifier, par un raisonnement physique, le signe de  $\beta$  lorsque  $\alpha > 0$ .

**Q12.** On définit l'atténuation linéique de puissance du signal entre le point d'entrée du câble coaxial en  $x = 0$  et un point d'abscisse  $x$  par la grandeur  $A$ , exprimée en décibel par unité de

longueur,  $A = \frac{10 \cdot \log\left(\frac{P_0}{P(x)}\right)}{x} = \frac{10}{\ln 10} \cdot \frac{\ln\left(\frac{P_0}{P(x)}\right)}{x}$ , avec  $P(x) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\underline{u}(x,t) \cdot \underline{i}^*(x,t))$  la

puissance moyenne de l'onde à l'abscisse  $x$  et  $P_0 = P(x=0) = \frac{1}{2} u_0 \cdot i_0$  la puissance moyenne de l'onde en entrée du câble.

En considérant que  $\underline{i}(x,t) = i_0 \cdot \exp(j(\omega \cdot t - \underline{k} \cdot x))$ , exprimer  $A$  en fonction de  $\beta$ .

**Q13.** À l'aide d'un développement limité à l'ordre 1, montrer que si  $r \ll \Lambda \cdot \omega$ , alors

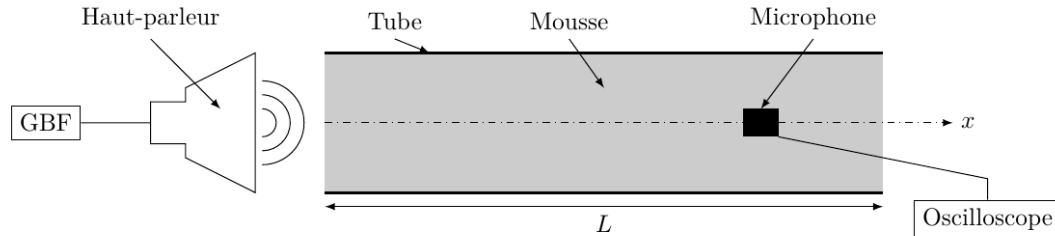
$$A = \frac{10}{\ln 10} \cdot r \cdot \sqrt{\frac{\Gamma}{\Lambda}}.$$

**Q14.** Par ailleurs, on montre que, lorsque  $r \gg \Lambda \cdot \omega$ , l'atténuation linéique de puissance a pour expression :  $A = \frac{10}{\ln 10} \cdot \sqrt{2 \cdot r \cdot \Gamma \cdot \omega}$ . Ainsi, au vu de cette équation et de celle de la question

**Q13**, il semble que l'atténuation linéique de puissance progresse avec la fréquence puis devienne indépendante de celle-ci lorsque les effets inductifs prennent le pas sur les effets résistifs. Mais, en réalité, à cause d'un phénomène physique associé à la résistance  $r$ , en haute fréquence,  $r$  augmente avec la racine carrée de la fréquence. Nommer et expliquer ce phénomène.

**PARTIE II : acoustique d'une mousse**

Une mousse de savon peut être aisément créée à l'aide d'un « bulleur » (type bulleur d'aquarium) et d'une solution d'eau savonneuse. Pour étudier les propriétés acoustiques de la mousse, on met au point le dispositif expérimental schématisé en figure 1. La mousse est insérée dans un long tube horizontal cylindrique (dit « tube de Kundt »), de longueur  $L = 50$  cm, dont elle occupe tout le volume. À une extrémité du tube, on dispose un haut parleur qui émet l'onde sonore qui va se propager dans la mousse. Pour capter l'onde sonore, on déplace un microphone, de type microphone électrostatique, le long de l'axe ( $Ox$ ) du tube. Le signal sonore est converti en un signal électrique, que l'on peut observer à l'aide d'un oscilloscope.



**Figure 1** Schéma du dispositif expérimental pour une mesure de la célérité du son dans la mousse

**I.A** – Nous étudions d'abord la propagation d'une onde sonore dans le tube rempli d'air. On considère que le tube est ouvert à ses deux extrémités : côté haut-parleur, où l'on choisit  $x = 0$  et également de l'autre côté en  $x = L$ . On considère que l'évolution de l'air est isentropique au passage de l'onde sonore.

Lorsque l'air est au repos dans le tube, la pression est uniforme et vaut  $P_0$ . En présence de l'onde sonore, une surpression acoustique  $p(x, t)$  est induite et la pression totale vaut  $P(x, t) = P_0 + p(x, t)$ . Le champ des vitesses (des particules de fluide) associé à l'onde est  $\vec{v}(x, t) = v(x, t)\vec{u}_x$  et la masse volumique est  $\mu(x, t) = \mu_a + \mu_1(x, t)$  où  $\mu_a$  est la masse volumique de l'air au repos.

On travaille dans l'approximation acoustique :  $p(x, t) \ll P_0$ ,  $v(x, t) \ll c_a$  avec  $c_a$  célérité du son dans l'air et enfin  $\mu_1(x, t) \ll \mu_a$ . On rappelle l'équation de propagation pour la surpression acoustique :  $\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \mu_a \chi_a \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0$ , où  $\chi_a$  est le coefficient de compressibilité isentropique de l'air défini par  $\chi_a = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_s$ .

**Q 1.** Donner l'expression littérale de la célérité du son dans l'air,  $c_a$ , en fonction de  $\mu_a$  et  $\chi_a$ .  
On note  $\gamma$  le coefficient adiabatique du gaz, rapport des capacités thermiques à pression constante et à volume constant.

- Q 2.** Démontrer que, dans l'approximation acoustique,  $\chi_a = \frac{1}{\gamma P_0}$  pour l'air considéré comme un gaz parfait.
- Q 3.** Calculer numériquement  $\chi_a$  et  $c_a$ , avec  $P_0 = 1,01 \times 10^5$  Pa,  $\mu_a = 1,20$  kg·m<sup>-3</sup> et  $\gamma = 1,40$ .
- Q 4.** Calculer  $c_e$  la célérité du son dans l'eau (voir données en fin d'énoncé).

**I.B** – Considérons la propagation d'une onde incidente, progressive, plane, harmonique (OPPH) de pulsation  $\omega$ , de nombre d'onde  $k$ , dans le sens des  $x$  croissants. La surpression acoustique est  $p_i(x, t) = p_{i0} \cos(\omega t - kx)$ , avec  $p_{i0}$  réel strictement positif. Le champ des vitesses est  $\vec{v}_i(x, t) = v_i(x, t)\vec{u}_x$ . Dans la suite, à chaque grandeur physique variant sinusoidalement on pourra associer une grandeur complexe, repérée par un symbole souligné, par exemple  $\underline{p}_i(x, t) = p_{i0} \exp(j(\omega t - kx))$ . Lorsque l'amplitude et la phase sont a priori inconnues, on choisira une notation du type  $\underline{v}_i(x, t) = \underline{v}_{i0} \exp(j(\omega t - kx))$ , où  $\underline{v}_{i0}$  est a priori un complexe quelconque.

Cette onde subit une réflexion dans le plan  $x = L$  et donne naissance à une onde réfléchie, de type OPPH de pulsation  $\omega$ , pour laquelle la surpression acoustique et le champ des vitesses sont notés respectivement  $p_r(x, t)$  et  $\vec{v}_r(x, t) = v_r(x, t)\vec{u}_x$ .

**Q 5.** Donner, sans démonstration, l'expression de  $\underline{v}_i(x, t)$  en fonction de  $x$ ,  $t$ ,  $\omega$ ,  $k$ ,  $p_{i0}$  et de l'impédance acoustique du milieu (ici l'air), dont on donnera l'expression en fonction de  $\mu_a$  et  $c_a$ .

On admettra dans la suite que la surpression acoustique aux extrémités d'un tuyau ouvert est nulle.

**Q 6.** Déterminer l'expression des coefficients de réflexion en surpression et en vitesse définis respectivement par  $r_p = \underline{p}_r(L, t) / \underline{p}_i(L, t)$  et  $r_v = \underline{v}_r(L, t) / \underline{v}_i(L, t)$ .

**Q 7.** Établir l'expression de  $\underline{p}_r(x, t)$  et de  $\underline{v}_r(x, t)$ , puis celle de  $p_r(x, t)$  et de  $v_r(x, t)$ .

**Q 8.** En déduire l'expression de la surpression acoustique dans le tube  $p(x, t)$ , et celle de la vitesse  $v(x, t)$ . Comment nomme-t-on ce type d'ondes ? Que dire en  $x = L$  ?

**Q 9.** Montrer que, pour les ondes dans le tube,  $k$  ne peut prendre qu'un ensemble discret de valeurs, notées  $k_n$ , repérées par un entier  $n$  strictement positif. Chaque valeur de  $n$  correspond à un mode propre ondulatoire particulier.

- Q 10.** Exprimer les longueurs d'ondes  $\lambda_n$  associées au mode d'ordre  $n$  en fonction de  $n$  et  $L$ , ainsi que les fréquences  $f_n$  associées en fonction de  $n$ ,  $c_a$  et  $L$ .
- Q 11.** Tracer, à un instant  $t$  donné, l'allure de  $p(x, t)$  dans le tube, pour  $n = 1$  et  $n = 2$ .

**I.C** – Le tube est maintenant rempli d'une mousse qui peut être décrite comme un ensemble de bulles d'air, dont la dimension caractéristique est  $R \approx 20 \mu\text{m}$ , séparées par de minces films d'eau savonneuse (d'épaisseur de l'ordre du micromètre). Nous étudions alors la propagation de l'onde sonore dans la mousse. Sous réserve que l'on puisse considérer la mousse comme un milieu continu, on admet que les résultats obtenus précédemment pour l'onde sonore sont valables dans la mousse, en remplaçant simplement  $c_a$  par  $c_m$ , célérité du son dans la mousse. Les propriétés de l'eau savonneuse (masse volumique et coefficient de compressibilité) sont assimilées à celles de l'eau pure.

On règle la fréquence de l'onde sonore émise par le haut-parleur à la valeur  $f = 200 \text{ Hz}$ . En déplaçant le microphone dans la mousse, dans la direction de l'axe ( $Ox$ ), on repère les nœuds de surpression acoustique. Ils correspondent aux positions :  $x_1 = 0,0 \text{ cm}$ ,  $x_2 = 9,9 \text{ cm}$ ,  $x_3 = 20,0 \text{ cm}$ ,  $x_4 = 30,0 \text{ cm}$ ,  $x_5 = 39,8 \text{ cm}$ ,  $x_6 = 50,0 \text{ cm}$ . La précision sur la mesure est de l'ordre de  $2 \text{ mm}$ .

- Q 12.** Dédurre de ces mesures une estimation de  $c_m$  à cette fréquence. Commenter.
- Q 13.** Quelle condition expérimentale doit-on vérifier pour pouvoir considérer la mousse comme un milieu continu ? Peut-on considérer que c'est le cas (on s'appuiera sur des valeurs numériques) ?

**I.D** – Dans la suite, on considérera la mousse comme un milieu continu, homogène, de masse volumique au repos  $\mu_m$  et de compressibilité isentropique  $\chi_m$ .

Nous souhaitons comparer la célérité estimée à la question 12 à la célérité donnée par la loi de Wood  $c_W = 1/\sqrt{\mu_m \chi_m}$ .

- Q 14.** La fraction volumique de liquide (eau savonneuse de masse volumique assimilée à  $\mu_e$ ) dans la mousse est  $\phi = 0,10$ . Établir l'expression de la masse volumique  $\mu_m$  en fonction de  $\phi$ ,  $\mu_e$  et  $\mu_a$ . En donner une expression littérale simplifiée en considérant les ordres de grandeur des termes en présence.
- Q 15.** Exprimer  $\chi_m$  en fonction de  $\phi$ ,  $\chi_e$  (coefficient de compressibilité isentropique de l'eau savonneuse assimilé à celui de l'eau pure) et  $\chi_a$ .
- Q 16.** Montrer, en s'appuyant sur des ordres de grandeur numériques, que l'on peut donner une expression littérale approchée de  $\chi_m$ .
- Q 17.** En déduire que la loi de Wood permet d'exprimer la célérité du son  $c_m$  dans la mousse en fonction de  $\gamma$ ,  $P_0$ ,  $\phi$  et  $\mu_e$ .
- Q 18.** Faire l'application numérique pour  $c_m$  et comparer avec la valeur mesurée expérimentalement.

### DONNEES

Masse volumique de l'eau	$\mu_e = 1,0 \times 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$
Viscosité de l'eau	$\eta_e = 1,0 \times 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$
Compressibilité isentropique de l'eau	$\chi_e = 4,9 \times 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$
Tension superficielle eau-air	$\sigma_e = 72 \text{ mJ}\cdot\text{m}^{-2}$
Tension superficielle eau savonneuse-air	$\sigma_s = 25 \text{ mJ}\cdot\text{m}^{-2}$
Indice optique de l'air	$n_0 = 1,0$
Indice optique de l'eau savonneuse	$n_s = 1,4$

### Formulaire

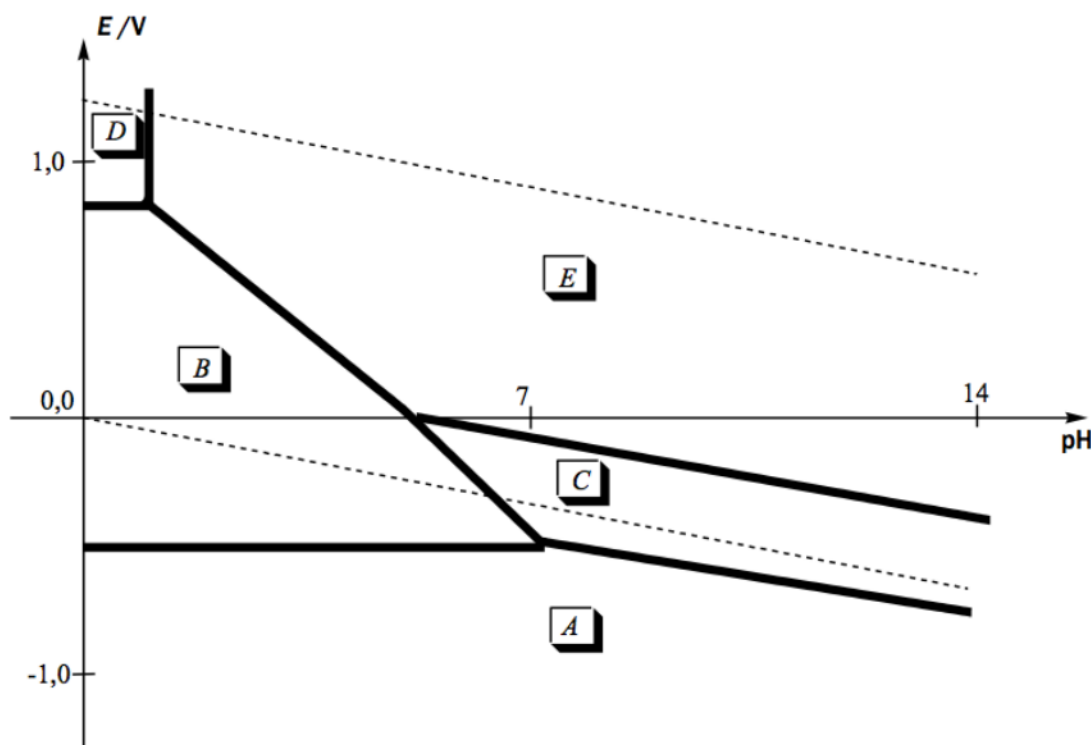
$$\begin{aligned} \cos p + \cos q &= 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) & \sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ \cos p - \cos q &= -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) & e^x &= 1 + x + o(x) \\ \Delta f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{aligned}$$

**PARTIE III : corrosion d'un béton armé**

Un béton armé contient des armatures internes en acier (alliage fer-carbone qui sera modélisé par le seul fer). Une éventuelle corrosion peut avoir lieu par réaction entre l'armature en fer et l'eau (ou avec le dioxygène dissous).

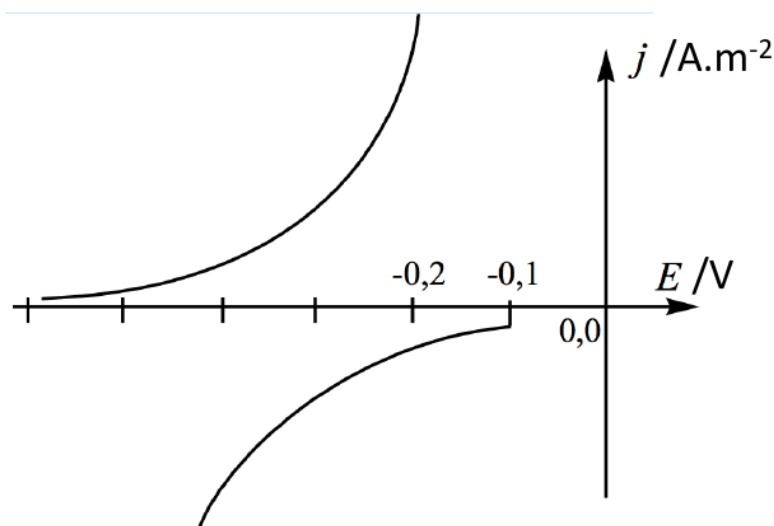
Le diagramme potentiel-pH du fer est donné (en traits gras), pour une concentration de tracé égale à  $10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$ . Il fait intervenir les espèces  $\text{Fe}(s)$ ,  $\text{Fe}^{2+}$ ,  $\text{Fe}^{3+}$ ,  $\text{FeOOH}(s)$  et  $\text{Fe}_3\text{O}_4(s)$ .

Les traits pointillés correspondent au diagramme potentiel-pH de l'eau.



- 15- Quels sont les degrés d'oxydation du fer dans les solides considérés ?
- 16- Attribuer à chaque domaine du diagramme une espèce du fer. Expliquer le raisonnement.
- 17- Ecrire l'équation-bilan de la réaction concernant le fer métallique en présence d'eau et en absence de dioxygène dissous, dans un milieu fortement basique.

La carbonatation du béton est un phénomène susceptible d'initier la corrosion, car il est associé à une diminution du pH des solutions interstitielles. On étudie le phénomène sur un béton armé carbonaté. L'étude est menée à partir de courbes densité de courant-potentiel. La figure suivante représente les courbes relatives à l'oxydation du fer en ions  $\text{Fe}^{2+}$  et à la réduction de l'eau en dihydrogène.



18- Reproduire la figure et associer à chaque courbe le phénomène correspondant. Justifier notamment par l'écriture de demi-équations d'oxydoréduction. Faire figurer la position du potentiel de corrosion  $E_{cor}$  et de la densité de courant de corrosion  $j_{cor}$ .

Les valeurs de potentiel mis en jeu dans les phénomènes de corrosion correspondent souvent au domaine de validité de l'approximation de Tafel : les courbes densité de courant-potentiel sont alors généralement des exponentielles et on a la relation  $E = a + b \log|j|$ .

On fournit les résultats expérimentaux suivants, indiquant la valeur de la densité de courant  $j$  mesurée dans une armature immergée dans un béton (en  $A.m^2$ ), en fonction du potentiel  $E$  (en  $V$ ) auquel est soumis l'armature.

$E / V$	- 0,7	- 0,6	- 0,5	- 0,2	- 0,1	0,0
$\log j $	-5,7	-5,5	-5,3	-5,7	-6,1	-6,5

19- A partir d'une construction à préciser, déterminer la valeur numérique du potentiel de corrosion et de la densité de courant de corrosion.

La corrosion de l'armature d'un béton armé carbonaté se traduit par une réduction de l'épaisseur ou de la section transversale de l'armature dans le temps.

20- Exprimer la vitesse de réduction de l'épaisseur  $e$  (donnée par  $de/dt$ ) en fonction de : la densité surfacique du courant de corrosion  $j_{cor}$ , la masse molaire  $M$  du fer, la masse volumique  $\rho$  du fer et la constante de Faraday  $F$ .

21- Application numérique: pour une densité du courant de corrosion égale à  $1,0 \mu A/cm^2$ , calculer la vitesse de réduction de l'épaisseur de l'armature en  $\mu m/an$ .

**Données :**

Constante d'Avogadro :  $N_A = 6,0.10^{23} \text{ mol}^{-1}$ .

Constante des gaz parfaits :  $R = 8,3 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$

Constante de Faraday :  $F = 96500 \text{ C.mol}^{-1}$

Constante de Nernst à 298 K :  $\frac{RT}{F} \ln 10 = 0,06V$

Numéros atomiques : 6 (C) ; 8 (O) ; 20 (Ca).

Masses molaires : Ca :  $40 \text{ g.mol}^{-1}$  ; Fe :  $55 \text{ g.mol}^{-1}$  ; Si :  $28 \text{ g.mol}^{-1}$

Masse volumique du fer :  $\rho = 8000 \text{ kg.m}^{-3}$ .