
Problème d'algèbre

NOTATIONS ET RAPPEL.

Si u est un endomorphisme d'un espace vectoriel E, on désigne par $\ker\ u$ le noyau de u et par $\operatorname{Im}\ u$ l'image de u, $Tr(u)$ sa trace.

On rappelle que, si E est de dimension finie, on a :

$$\dim(\ker\ u) + \dim(\operatorname{Im}\ u) = \dim E.$$

Pour tout entier k strictement positif, on note u^k l'endomorphisme $u \circ u \circ \ldots \circ u$ (k fois).

Enfin, si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u, on appelle "endomorphisme induit par u sur F" l'endomorphisme de F qui à tout élément x de F associe $u(x)$.

Dans tout le problème, E désigne un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie n ($n \geqslant 2$) et I_d désigne l'application identique de E.

On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.

On désire étudier les couples (u, v) d'éléments de $\mathcal{L}(E)$ qui vérifient la propriété (P) suivante :

$$u \circ v - v \circ u = u.$$

Dans tout le problème (u, v) désigne un couple d'éléments de $\mathcal{L}(E)$, **fixé** vérifiant la propriété (P) et tel que $u \neq 0$. On note :

$$\mathcal{W} = \{f \in \mathcal{L}(E), u \circ f - f \circ u = u\}$$

Première partie

La partie I est consacrée à établir des résultats qui seront utilisés

dans les parties suivantes.

On pourra admettre ce que l'on n'aura pas su démontrer.

1) Que vaut $Tr(A - B)$ si A et B sont semblables ?

2) Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

   Montrer qu'il n'existe pas d'élément inversible $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que :

   $f + \alpha I = g^{-1} \circ f \circ g$.

3) Montrer que l'ensemble des endomorphismes commutant avec u est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

4) Montrer que $\mathcal{W}$ est un espace affine. Préciser sa direction.

5) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $k \in \mathbb{N}^*$.

   (1) Montrer que : $\ker\ f^k \subset \ker\ f^{k+1}$ puis que :

   $$(\ker\ f^k = \ker\ f^{k+1}) \Longrightarrow (\ker\ f^{k+1} = \ker\ f^{k+2}).$$

   (2) Énoncer et démontrer des propriétés analogues concernant les sous-espaces vectoriels Im f^k.

   (3) Montrer que, si $\ker\ f = \{\overrightarrow{0}_E\}$, alors, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\ker\ f^k = \{\overrightarrow{0}_E\}$.

   En déduire que, pour tout élément $f \in \mathcal{L}(E)$, on a : $\ker\ f^n = \ker\ f^{n+1}$.

(4) Énoncer et démontrer des propriétés analogues concernant les images.

(5) Montrer que l'on a : $E = \ker\ f^n \oplus \mathrm{Im}\ f^n$.

(6) Montrer qu'il existe deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E stables par f tels que l'endomorphisme induit par f sur l'un soit nilpotent et sur l'autre inversible.

Deuxième partie

(1) Montrer que u n'est pas bijectif.

Montrer que la matrice de u a une dans une base quelconque de E une trace nulle.

(2) On suppose que $n = 2$.

Déterminer l'endomorphisme u^2 en calculant sa matrice dans une base de E.

Quelle est alors la dimension de $\ker\ u$?

Montrer que $\ker\ u$ est stable par v et en déduire, que toutes les racines

du polynôme caractéristique de v sont réelles.

(3) On suppose toujours que $n = 2$.

(a) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u s'écrit $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(b) Déterminer, par leurs matrices relativement à $\mathcal{B}$, les éléments w de $\mathcal{W}$.

(c) Donner les éléments caractéristiques de l'ensemble $\mathcal{W}$. Préciser en particulier la dimension eu une base de la direction.

(4) On suppose que $n = 3$ et que $u^2 = 0$. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans

laquelle la matrice de u s'écrit $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

En déduire la dimension de $\mathcal{W}$.

Troisième partie

Dans cette partie $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$.

(1) (a) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, u^k \circ v - v \circ u^k = ku^k$.

(b) Commment peut-on interpréter le résultat précédent pour l'endomorphisme :

$$\begin{cases} \Phi : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E) \\ \qquad f \mapsto f \circ v - v \circ f \end{cases} \quad ?$$

En déduire que u est nilpotent.

(2) Dans toute le suite on suppose que $N_1 = \ker u$ est de dimension 1.

(a) Montrer $\forall k \in \{1, 2, \ldots, n\}, N_k = \ker\ u^k$ est de dimension k.

(b) Justifier l'existence d'un vecteur $x_0 \in E$ tel que $\mathcal{B} = (u^{n-1}(x_0), u^{n-2}(x_0), ..., u(x_0), x_0)$ soit une base de E.

(c) Donner alors une base de $N_k = \ker u^k$ pour $k \in \{1, ..., n\}$ et en déduire que dans la base $\mathcal{B}$ précédente la matrice de v est triangulaire supérieure.

(d) Préciser la structure et la dimension de $\mathcal{W}$.

Eléments de corrigé

Première partie

1) $Tr(A-B)=0$ car deux matrices semblables ont la même trace .

   Cf : $Tr(P^{-1}AP)=Tr(A)$ et $Tr(GH)=Tr(HG)$.

2) Regardons les traces : Si $Tr(f+\alpha I)=Tr(g^{-1}\circ f\circ g)$ alors $Tr(f)+n\alpha=Tr(f)$

   suite à la question précédente, bref $\alpha=0$.

3) C'est le noyau de l'application linéaire $f\mapsto u\circ f-f\circ u$ noté $\mathcal{W}_1$ pour la suite.

4) C'est du principe de superposition , mais on va refaire...

   $v\in\mathcal{W}$ donc $w\in\mathcal{W}\Leftrightarrow u\circ v-v\circ u=u=u\circ w-w\circ u$.

   $w\in\mathcal{W}\Leftrightarrow u\circ(w-v)-(w-v)\circ u=0_{\mathcal{L}(E)}\Leftrightarrow w-v\in\mathcal{W}_1\Leftrightarrow\mathcal{W}=v+\mathcal{W}_1$.

   $\mathcal{W}$ est donc un espace affine passant par v et dirigé par $\mathcal{W}_1$.

   Rappel : $\mathcal{W}_1$ est le commutant de u, v une solution particulière.

5) Soit $f\in\mathcal{L}(E)$ et $k\in\mathbb{N}^*$.

   (1) $\ker\ f^k\subset\ker\ f^{k+1}$ résultat de cours car si $f^k(x)=\overrightarrow{0}$ alors $f(f^k(x))=\overrightarrow{0}$.

   La seule chose à établir est si $f^{k+2}(x)=\overrightarrow{0}$ alors $f(x)\in\ker f^{k+1}$ donc

   $f(x)\in\ker f^k$ par hypothèse, il vient $f^{k+1}(x)=\overrightarrow{0}$.

   L'autre inclusion a déjà été établie.

   (2) Résultat de cours $Im(f^{k+1})\subset Im(f^k)$ car $f^{k+1}(z)=f^k(f(z))$.

Les images évoluent en décroissant. On a ainsi

$$(Im\ f^k = Im\ f^{k+1}) \Longrightarrow (Im\ f^{k+1} = Im\ f^{k+2})$$

Comme nous sommes en dimension finie, l'égalité des noyaux entraine l'égalité de leurs dimensions et par thm du rang celles des images, on a donc inclusion avec égalité des dimensions.

(3) Comme $\ker\ f = \{\overrightarrow{0}_E\}$, alors f est injective, donc si on part de $f^k(x) = \overrightarrow{0}$ en appliquant successivement k fois l'injectivité, on arrive à $x = \overrightarrow{0}$. On vient de réviser qu'une composée d'injections est une injection.

Bref f^k est aussi injective.

Pour la suite (par l'absurde) si $\ker f^n \subsetneq \ker f^{n+1}$ alors de proche en proche en contraposant l'implication du 5.(1) les inclusions seraient strictes donc avec au moins une dimension d'écart à chaque étape.

On aurait alors $\ker f^{n+1}$ de dimension supérieure ou égale à $n+1$ ce qui est imposssible en dimension n n.

(4) Comme avant on réapplique le thm du rang , on a une inclusion d'une image dans l'autre avec égalité des dimensions (car les noyaux ont la même dimension) .

Bref $Im(f^n) = Im(f^{n+1})$.

(5) $E = \ker\ f^n \oplus \mathrm{Im}\ f^n$ découle du fait que l'intersection est réduite au vecteur nul (après (*)).

Alors par thm du rang $\dim(E) = rg(f^n) + \dim(\ker(f^n))$ donc inclusion avec égalité des dimensions.

Pour justifier (*) : soit $y \in \ker(f^n) \cap Im(f^n)$, $y = f^n(x)$ et $f^n(y) = \overrightarrow{0}$.

Donc $x \in \ker f^{2n}$, or $\ker f^n = \ker f^{n+1}$, les noyaux stagnent (cf 5.(1)) donc $\ker f^{2n} = \ker f^n$, ainsi $x \in \ker f^n$, bref $y = \overrightarrow{0}$.

(6) On prend bien sûr la somme directe précédente, les deux sous-espaces incriminés sont stables par f (cf les incusions vues plus haut). Sur le premier f est bien sûr niplotente d'indice maximal n . Et sur l'autre $(Im(f^n))$, f est bijective.

Car par stabilité $f_{Imf^n} : Imf^n \to Imf^n$ c'est donc un endomorphisme induit, il n'y a que son injectivité à vérifier en dimension finie.

Si $z = f^n(x)$ et $f(z) = \overrightarrow{0}$ alors $x \in \ker f^{n+1} = \ker f^n$ donc $z = f^n(x) = \overrightarrow{0}$.

Deuxième partie

(1) Par l'absurde si u bijectif on aurait $u \circ v \circ u^{-1} = Id + v$.

Contradiction directe avec 2) de la première partie.

Pour le reste on prend la trace , on trouve $Tr(u) = 0$ car $Tr(u \circ v) = Tr(v \circ u)$.

Résultat indépendant de la base comme révisé plus haut.

(2) On suppose que $n = 2$.

$u^2 = Tr(u)u - \det(u)Id = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Comme il a été convenu que $u \neq 0$ le noyau de u ne peut pas être de dimension

2, ni de dimension 0 car il n'est pas bijectif.

Il vient $\dim \ker u = 1$.

Soit $z \in \ker(u)$, on lui applique la propriété (P) .

Il sort $u(v(z)) = \overrightarrow{0}$ donc $v(z) \in \ker(u)$.

La restriction de v à $\ker(u)$ est donc une homothétie

(on est linéaire en dimension 1) .

Donc un vecteur directeur de $\ker(u)$ est vecteur propre de v

associé au rapport de l'homothétie.

Donc le polynôme caractéristique (degré 2 coefficients réels) a une racine réelle , l'autre aussi ...

(3) On suppose toujours que $n = 2$.

(a) On prend une base adaptée à u , mais bien choisie...

Soit b base d'un supplémentaire du noyau :

$E = \ker(u) \oplus < b >$, la famille $(u(b), b)$ est libre donc base de E.

En effet $\lambda u(b) + \mu b = \overrightarrow{0}$ entraine $\mu u(b) = \overrightarrow{0}$ car $u^2(b) = \overrightarrow{0}$.

Il vient $\mu = 0$ car $b \notin \ker(u)$. On reporte $\lambda = 0$.

Dans cette base la matrice de u est celle demandée par l'énoncé.

(b) On remplace brutalement dans la propriété (P) , en associant v à $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Il vient $c = 0, d = a + 1$ aucune contrainte sur b ,

les matrices de v sont donc du type :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) On trouve donc que $\mathcal{W}$ contient l'endomorphisme qui possède la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base précédente. .

La direction est alors donnée par les endomorphismes générés par Id_E et celui qui a pour matrice dans la base précitée $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Famille manifestement libre.

$\mathcal{W}$ est donc un plan affine .

(4) Comme avant le noyau ne peut être que de dimension 1 ou 2 ,

car non nul et non bijectif.

Mais comme $u^2 = 0$, on a $Im(u) \subset \ker(u)$, et la somme des dimensions fait 3.

Seule possibilité $rg(u) = 1$ et le noyau de dimension 2.

Soit de nouveau un vecteur b tel que $u(b) \neq \overrightarrow{0}$.

$u(b) \in \ker(u)$, on applique la base incomplète dans $\ker(u)$,

on a alors $(c, u(b))$ base de $\ker(u)$.

La famille $(c, u(b), b)$ est une base de E (voir après),

dans cette base la matrice est celle demandée par l'énoncé.

La famille précédente possède le bon cardinal, la liberté : $\alpha c + \beta u(b) + \gamma b = \overrightarrow{0}$.

On applique u , il sort $\gamma = 0$.

On reporte , la famiile qui reste est libre par construction...

Comme avant , on prend une matrice 3×3 pour v avec 9 lettres...

On développe , on range...

On arrive à une matrice comme celle-là : $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & \lambda \\ \gamma & \beta & \mu \\ 0 & 0 & \beta + 1 \end{pmatrix}$.

$\mathcal{W}$ est donc un espace affine de dimension 5.

Troisième partie

Dans cette partie $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$.

(1) (a) On montre par récurrence (forte) que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, u^k \circ v - v \circ u^k = ku^k$.

L'initialisation au rang 1 est la propriété (P).

Au rang $k + 1$, on compose la relation proposée dans la récurrence par u à gauche.

On recommence (de ladite proposition) cette fois à droite.

Il vient $u^{k+1} \circ v - u \circ v \circ u^k = ku^{k+1} = u^k \circ v \circ u - v \circ u^{k+1}$.

On a envie d'additionner , on arriverait à $2ku^{k+1}$ avec un terme gênant ...

Mais en reprenant l'hypothèse de récurrence au rang $n-1$ et en la composant successivement à droite puis à gauche par u , le terme gênant est remplacé par $(k-1)u^{k+1}$, tout est en ordre.

On aurait pu aussi faire " à deux prédécesseurs...

Ou même une récurrence "normale"...

(b) Pour l'endomorphisme :

$$\begin{cases} \Phi : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E) \\ \qquad f \mapsto f \circ v - v \circ f \end{cases} \quad ?$$

Il vient que si $u^k \neq 0$ il en est vecteur propre associé à la valeur propre k.

Mais comme en dimension fnie le nombre de valeurs propres est limité par la dimension... u^k deviendra nul et donc u est nilpotent.

(2) Dans toute le suite on suppose que $N_1 = \ker u$ est de dimension 1.

(a) Montrons par itération que N_k est de dimension k, vraie au rang 1 par hypothèse.

Cette itération, va bien sûr s'arrêter à $k = n$...

C'est moyennement facile...

Par hypothèse d'itération, $\dim N_k = k$, soit un supplémentaire S_k de N_k dans N_{k+1} ,(il existe par inculsion des noyaux).

Cherchons à montrer qu'il est de dimension 1 .

Si il était réduit au vecteur nul , on aurait $N_k = N_{k+1}$

et les noyaux stagneraient...

Par niplotence on arriverait à E comme noyau,

les dimensions sont incompatibles.

Ce supplémentaire est donc au moins de dimension 1...

Or $u^k(S_k) \subset N_1$ puisqu'en recomposant on arrive au nul.

La restriction de u^k à S_k est une application linéaire de S_k vers N_1, son noyau $(S_k \cap N_k)$ est réduit au vecteur nul par somme directe.

Elle est injective. Son rang est donc la dimension de départ (celle de S_k) qui est au moins 1, et controlé par la dimension d'arrivée qui est 1 aussi (la dimension de N_1).

Bref $\dim S_k = 1$, les dimensions gagnent très exactement 1 à chaque itération.

$\dim N_{k+1} = k + 1$.

(b) Comme la suite des noyaux est strictement croissante, on choisit x_0 ailleurs que dans N_{n-1} (possible car hyperplan).

On écrit une combinaison linéaire du type : $\sum_{0}^{n-1} a_k u^k(x_0) = \overrightarrow{0}$ censée être non triviale, on retrouve une démonstration vue en cours...

(Vous l'avez reconnue ?) elle est fondamentale !

On arrive à une absurdité (q le plus petit indice tel que a_k soit non nul), etc...

Bon cardinal et liberté.

(c) On regarde la famille $u^{n-1}(x_0), ..., u^{n-k}(x_0)$.

Ils sont tous dans $\ker(u^k)$, libre car extrait d'une base , et avec le bon cardinal :

gagné !

Ils sont au passage stabilisés $\diamondsuit\diamondsuit$ par v car si $z \in N_k$,

$$u^k(v(z)) = v(u^k(z)) + ku^k(z) = \overrightarrow{0}$$

On retrouve une matrice souvent croisée et triangulaire supérieure :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

(d) Le calcul final est "gérable" car les deux matrices sont triangulaires supérieures $\diamondsuit\diamondsuit$.

En notant v_{ij} les coefficients de v avec $v_{ij} = 0$ si $i > j$.

Il vient par produit de triangulaires supérieures que le dessous de la diagonale est totalement nul.

On regarde par petites diagonales ...

Sur la principale , tout est nul. Sur celle juste au dessus $(j = 1 + i)$, $v_{i+1,i+1} = v_{ii} + 1$.

Au dessus on a $v_{i+1,j} = v_{i,j-1}$. Bref on arrive à :

Exemple en dimension 4

$$\begin{pmatrix} 1+a & b & c & d \\ 0 & 2+a & b & c \\ 0 & 0 & 3+a & b \\ 0 & 0 & 0 & 4+a \end{pmatrix}$$ c'est donc un espace affine de dimension n .

Passant par diag $(1, 2, 3, 4,)$.