Ce devoir est rempli de questions de cours en tous genres...

Barème en vert , remarques complémentaires en rouge.

Problème 1

Préliminaire

Monter que tout nombre réel x strictement positif, l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} e^{-xt} dt$$

converge. On notera $\varphi(x)$ la valeur de cette intégrale.

Pour tout entier naturel non nul m tel que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{(\sin t)^m}{t} dt$ converge, on désigne par J_m sa valeur.

1 Étude de la fonction φ .

On désigne par d (respectivement δ) la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$d(t) = t - 1 + \cos(t) \text{ (respectivement } \delta(t) = \frac{t^2}{2} - 1 + \cos(t)).$$

I.1. Étude des fonctions d et δ .

I.1.1 Étudier la fonction d ; en déduire qu'il existe un nombre réel α tel que, pour tout nombre réel t strictement positif, on ait l'inégalité : $0 \leq \frac{1 - \cos(t)}{t} \leq \alpha$.

I.1.2 Étudier la fonction δ ; en déduire qu'il existe un nombre réel β tel que, pour tout nombre réel t strictement positif, on ait l'inégalité : $0 \leq \frac{1 - \cos(t)}{t^2} \leq \beta$.

I.2. Existence de la fonction φ sur $[0, +\infty[$.

Établir la convergence de l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt$.

En déduire que $\varphi(x)$ existe pour tout x appartenant à $[0, +\infty[$.

I.3. Limite de la fonction φ en $+\infty$.

I.3.1 Préciser le signe de $\varphi(x_1) - \varphi(x_2)$, pour $0 \leq x_1 \leq x_2$.

En déduire que la fonction φ admet une limite finie λ en $+\infty$.

I.3.2 Déterminer la valeur de λ (on pourra utiliser des idées vues plus haut).

Pour la suite on admet que φ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^+$ avec

$$\forall x > 0, \varphi'(x) = \ln \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right)$$

I.4. Expression explicite de la fonction $\varphi(x)$.

I.4.1 Déterminer la limite de $x \ln \left(\frac{x^2}{x^2 + 1} \right)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

I.4.2 Expliciter une primitive de la fonction $x \mapsto \ln(1 + x^2)$

(on pourra utiliser une intégration par partie).

I.4.3 Expliciter $\varphi(x)$ pour x appartenant à $]0, +\infty[$.

I.4.4 Déterminer $\varphi(0)$

Étude de l'existence de J_m .

II.1. Étude de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin t)^m}{t} dt$.

Justifier la convergence de l'intégrale généralisée $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin t)^m}{t} dt$ pour tout entier naturel non nul m .

Pour tout entier relatif k tel que l'intégrale généralisée $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{e^{ikt}}{t} dt$ converge, on note I_k la valeur de cette intégrale.

II.2. Étude de J_1 .

Justifier l'existence de J_1 et établir une relation entre J_1 et $\varphi(0)$

(on pourra utiliser une intégration par partie, en remarquant que $(1 - \cos)' = \sin$).

II.3. Étude de l'existence de I_k .

Préciser la nature de l'intégrale généralisée I_k selon la valeur de l'entier relatif k .

(on pourra utiliser une intégration par partie).

II.4. Étude de la nature de J_m .

Pour tout x appartenant à $[\frac{\pi}{2}, +\infty[$ et tout entier relatif k , on note : $I_k(x) = \int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{e^{ikt}}{t} dt$.

II.4.1 Exprimer, pour tout entier naturel non nul m et pour tout nombre réel x appartenant à $[\frac{\pi}{2}, +\infty[$, l'intégrale $\int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{(\sin t)^m}{t} dt$ à l'aide des intégrales $I_k(x)$.

II.4.2 En déduire l'existence de J_{2p+1} pour tout entier naturel p .

II.4.3 Quelle est la nature de l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{(\sin t)^{2p}}{t} dt$ pour p entier naturel non nul ?

Problème 2

Préliminaires

Soit n un entier naturel non nul.

(1) Soit $\theta \in [0, 2\pi[$. Déterminer, s'ils existent, module et argument du nombre complexe $u = 1 + e^{i\theta}$.

(2) On note P_n le polynôme de $\mathbb{C}[X]$ défini par

$$P_n(X) = \frac{1}{2i} ((X+i)^{2n+1} - (X-i)^{2n+1})$$

(a) Étude des cas $n = 1$ et $n = 2$

(i) Déterminer les polynômes P_1 et P_2 .

(ii) Vérifier que $P_1 \in \mathbb{R}_2[X]$ et que $P_2 \in \mathbb{R}_4[X]$. Sont-ils irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$?

(b) Cas général

(i) Montrer que $P_n \in \mathbb{C}_{2n}[X]$. Donner son degré et son coefficient dominant.

(ii) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Donner l'expression des racines N -ièmes de l'unité.

(iii) Calculer $P_n(i)$.

(iv) Prouver par un argument géométrique que les racines de P_n sont réelles.

(v) Soit $a \in \mathbb{C}$. prouver l'équivalence

$$a \text{ est racine de } P_n \iff \exists k \in [|1, 2n|], a(e^{2ik\pi/(2n+1)} - 1) = i(e^{2ik\pi/(2n+1)} + 1)$$

(vi) Déterminer les racines du polynôme P_n . Vérifier alors le résultat de 2.b.iv.

(vii) En développant P_n , déterminer un polynôme Q_n de degré n et à coefficients réels tel que

$$P_n(X) = Q_n(X^2)$$

On admettra l'unicité du polynôme Q_n ainsi obtenu.

(viii) Expliciter Q_1 et Q_2 et déterminer leurs racines respectives.

(ix) Déterminer les racines de Q_n en fonction de celles de P_n .

(3) On pose $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$.

En utilisant des résultats obtenus à la question précédente, montrer que $S_n = \frac{n(2n-1)}{3}$.

(4) Illustrer graphiquement les inégalités suivantes que l'on admettra

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, 0 \leq \sin(x) \leq x \leq \tan(x)$$

En déduire que

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \frac{1}{\tan^2(x)} \leq \frac{1}{x^2} \leq 1 + \frac{1}{\tan^2(x)}$$

(5) Justifier la convergence de la série de terme général $\frac{1}{k^2}$ et calculer la somme $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

Partie I

Soit $x \in \mathbb{R}$. On note, lorsque cela a un sens, $H(x) = \int_0^1 \frac{t^x \ln(t)}{t-1} dt$.

(1) Démontrer que pour $s > -1$, l'intégrale $J_s = \int_0^1 t^s \ln(t) dt$ existe et donner sa valeur.

(2) Étude de la fonction H

(a) Montrer que l'ensemble de définition de la fonction H est $D_H =]-1, +\infty[$.

(b) Montrer que H est monotone sur D_H .

(c) Montrer que pour tout réel $\alpha > 0$, la fonction $t \mapsto \frac{t^\alpha (\ln(t))^2}{1-t}$ est prolongeable en une fonction bornée sur le segment $[0, 1]$.

(d) (5/2) Montrer que H est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D_H . Retrouver alors la monotonie de H . (5/2)

(e) Montrer que la fonction $g : t \mapsto \frac{t \ln(t)}{1-t}$ est bornée sur $]0, 1[$. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} H(x)$.

(f) Démontrer que

$$\forall x > -1, H(x) - H(x+1) = \frac{1}{(x+1)^2}$$

(g) Déterminer alors un équivalent simple de $H(x)$ lorsque x tend vers -1 par valeurs supérieures.

(h) Soit $x > -1$.

(i) Justifier la convergence de la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{(x+k)^2}$.

(ii) Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$H(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(x+k)^2} + H(x+n)$$

(iii) En déduire que

$$H(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(x+k)^2}$$

(iv) Calculer $H(0)$ et $H(1)$.

Partie 2

(1) Prouver que pour tout $x > -1$ et tout entier naturel k non nul,

$$\frac{1}{(x+k+1)^2} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{(x+t)^2} \leq \frac{1}{(x+k)^2}$$

(2) Déterminer un équivalent de $H(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

(3) Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = H(n)$.

(a) Étudier la convergence des séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} (-1)^n u_n$.

(b) Démontrer que (admis par les (3/2))

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n = \int_0^1 \frac{\ln(v)}{v^2-1} dv$$

(c) Donner la valeur de cette intégrale en fonction de $H\left(-\frac{1}{2}\right)$.

Partie 3

Pour tout entier naturel $k \geq 2$, on note

$$Z_k = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^k}$$

(1) Pour tout couple d'entiers naturels (p, q) , on pose $I_{p,q} = \int_0^1 t^p [\ln(t)]^q dt$.

(a) Discuter l'existence de $I_{p,q}$ en fonction des entiers naturels p et q .

(b) Justifier que si $q \geq 1$, $I_{p,q} = -\frac{q}{p+1} I_{p,q-1}$.

(c) En déduire la valeur de $I_{p,q}$.

(2) (a) Justifier l'existence pour tout $n \in \mathbb{N}$ de $B_n = \int_0^1 \frac{[\ln(t)]^{n+1}}{t-1} dt$.

(b) Pour tout $N \geq 1$, exprimer B_n à l'aide des intégrales $I_{k,n+1}$ pour $k \in \{0, \dots, N\}$ et de

$$A_n = \int_0^1 t^{N+1} \frac{(\ln(t))^{n+1}}{1-t} dt.$$

(c) Prouver enfin que $\forall n \in \mathbb{N}$, $B_n = (-1)^n (n+1)! Z_{n+2}$.

Éléments de correction

Problème 1

Préliminaire

Soit x strictement positif, la fonction intégrée est continue et positive sur $\mathbb{R}_*^+$.

Elle est prolongeable par continuité en 0 car $\lim_0 \frac{1 - \cos(t)}{t^2} = \frac{1}{2}$.

En l'infini $\frac{1 - \cos(t)}{t^2} e^{-xt}$ est intégrable car majorée en valeur absolue

par la fonction de référence $\frac{2}{t^2}$.

L'intégrale généralisée est donc convergente.

2 pts en tout

1 Étude de la fonction φ .

1.1. $d \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $\forall t, d'(t) = 1 - \sin(t) \geq 0$. d est donc croissante sur $\mathbb{R}$. La croissance est même stricte car d' ne s'annule que sur $\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}$. d réalise ainsi une bijection de $\mathbb{R}$ dans son image $d(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. On remarque que 1.5 pts

$$\forall t \geq 0, d(t) \geq d(0) \geq 0$$

En particulier (quand on divise par $t > 0$ on ne change pas le sens des inégalités)

$$\forall t > 0, \frac{1 - \cos(t)}{t} \leq 1 = \alpha$$

et bien sûr $\frac{1 - \cos(t)}{t} \geq 0$ provient (pour $t > 0$) de la positivité des numérateur et dénominateur.

1.2. δ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et 1.5 pts

$$\forall t, \delta'(t) = t - \sin(t) \text{ et } \delta''(t) = 1 - \cos(t)$$

En particulier δ'' est positive, δ' croît et est positive sur $\mathbb{R}^+$ et

$$\forall t \geq 0, \delta(t) \geq \delta(0) \geq 0$$

On conclut comme plus haut que

$$\forall t > 0, 0 \leq \frac{1 - \cos(t)}{t^2} \leq \frac{1}{2}$$

2. $t \mapsto \frac{1 - \cos(t)}{t^2}$ est cie sur $\mathbb{R}^{+*}$ et on a des problèmes aux voisinages de 0 et de $+\infty$.

Au $\mathcal{V}(0^+)$, faux pb ; la fonction est prolongeable par cie : valeur 1/2) et donc intégrable.

Au voisinage de $+\infty$, elle est $\mathcal{O}(1/t^2)$ et donc aussi intégrable. 1.5 pts

Elle est finalement intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et son intégrale sur $\mathbb{R}^+$ existe a fortiori.

0.5 pts

Si $x \geq 0$, $t \mapsto \frac{1 - \cos(t)}{t^2} e^{-xt}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ et dominée par $t \mapsto \frac{1 - \cos(t)}{t^2}$ dont on vient de voir l'intégrabilité. Par comparaison, elle est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et $\varphi(x)$ existe a fortiori.

3.1. On a

$$\varphi(x_1) - \varphi(x_2) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} (e^{-x_1 t} - e^{-x_2 t}) dt$$

Si $x_1 \leq x_2$, la fonction intégrée est positive sur $\mathbb{R}^+$ et on a donc $\varphi(x_1) \geq \varphi(x_2)$.

φ est ainsi décroissante sur $\mathbb{R}^+$. **2.5 pts**

Comme elle est minorée (par 0) elle admet une limite finie en $+\infty$ (thm de limite monotone).

3.2. D'après 1.2 on a (en vérifiant que les quantités écrites existent)

$$\forall x > 0, 0 \leq \varphi(x) \leq \beta \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{\beta}{x}$$

Par encadrement, on en déduit que **1.5 pts**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$$

4.1. On a **1. pts**

$$x \ln \left(\frac{x^2}{x^2 + 1} \right) = -x \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$$

4.2. Une intégration par partie donne **2. pts**

$$\int_0^x \ln(1+t^2) dt = [t \ln(1+t^2)]_0^x - 2 \int_0^x \frac{t^2}{1+t^2} dt = x \ln(1+x^2) - 2(x - \arctan(x))$$

et ceci représente une primitive de la fonction continue $t \mapsto \ln(1+t^2)$ sur l'intervalle $\mathbb{R}$ par théorème fondamental.

4.3. On en déduit, avec l'expression de φ' , l'existence d'une constante c telle que **2. pts**

$$\begin{aligned} \forall x > 0, \varphi(x) &= x \ln(x) - x - \frac{1}{2} x \ln(1+x^2) + x - \arctan(x) + c \\ &= \frac{x}{2} \ln \left(\frac{x^2}{1+x^2} \right) - \arctan(x) + c \end{aligned}$$

Avec 4.1 et 3.2 et en faisant tendre x vers $+\infty$, on obtient $c = \pi/2$ et donc **1. pts**

$$\forall x > 0, \varphi(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x) + \frac{x}{2} \ln \left(\frac{x^2}{1+x^2} \right)$$

4.4. φ étant continue en 0, on obtient **1. pts**

$$\varphi(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = \frac{\pi}{2}$$

Étude de l'existence de J_m .

- $t \mapsto \frac{\sin^m(t)}{t}$ est continue sur $]0, \pi/2]$ et équivaut à t^{m-1} au voisinage de 0. Pour $m \geq 1$, elle est donc prolongeable par continuité en 0 et finalement intégrable sur $[0, \pi/2]$ (et a fortiori, son intégrale existe). **0.5 pts**
- Une intégration par partie donne **3 pts** **Fait en cours.**

$$\forall 0 < a < b, \int_a^b \frac{\sin(t)}{t} dt = \left[\frac{1 - \cos(t)}{t} \right]_a^b + \int_a^b \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt$$

L'intégrale du membre de droite ainsi que le terme tout intégré admettent des limites en 0 et $+\infty$. En opérant les passages à la limite $a \rightarrow 0$ et $b \rightarrow +\infty$, on a donc

$$J_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt = \varphi(0) = \frac{\pi}{2}$$

3. $t \mapsto e^{ikt}$ est continue sur $[\pi/2, +\infty[$ et $t \mapsto 1/t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur cet intervalle. On peut opérer une intégration par partie pour obtenir **1.5 pts**

$$\forall k \neq 0, \forall a \geq \pi/2, \int_{\pi/2}^a \frac{e^{ikt}}{t} dt = \left[\frac{e^{ikt}}{ikt} \right]_{\pi/2}^a + \int_{\pi/2}^a \frac{e^{ikt}}{ikt^2} dt$$

Comme $\left| \frac{e^{ikt}}{ikt^2} \right| \leq \frac{1}{|k|t^2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$, l'intégrale du membre de droite admet une limite quand $a \rightarrow \infty$. De même, le terme "tout intégré" est de limite nulle en $+\infty$. On peut donc faire tendre a vers $+\infty$ pour obtenir l'existence de I_k . **0.5 pts**
Si $k = 0$ alors la fonction à considérer est $t \mapsto 1/t$ et c'est une fonction de Riemann non intégrable au voisinage de 0. Comme elle est positive, son intégrale n'existe pas. Finalement,

I_k existe si et seulement si $k \neq 0$

- 4.1. On a

$$\sin^m(t) = \frac{(e^{it} - e^{-it})^m}{(2i)^m} = \frac{1}{(2i)^m} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (-1)^k e^{i(m-2k)t}$$

Par linéarité du passage à l'intégrale, on a donc **3 pts**

$$\forall x \in \left[\frac{\pi}{2}, +\infty \right[, \int_{\pi/2}^x \frac{\sin^m(t)}{t} dt = \frac{1}{(2i)^m} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (-1)^k I_{m-2k}(x)$$

- 4.2. Si $m = 2p + 1$, on obtient **2 pts**

$$\forall x \in \left[\frac{\pi}{2}, +\infty \right[, \int_{\pi/2}^x \frac{\sin^{2p+1}(t)}{t} dt = \frac{1}{2^{2p+1}i(-1)^p} \sum_{k=0}^{2p+1} \binom{2p+1}{k} (-1)^k I_{2(p-k)+1}(x)$$

$2(p-k) + 1$ étant impair est non nul et tous les termes de la somme admettent une limite quand $x \rightarrow +\infty$. On peut ainsi passer à la limite aussi dans le membre de gauche ce qui donne l'existence de $\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin^{2p+1}(t)}{t}$. Avec la question 1, on a finalement l'existence de J_{2p+1} .

- 4.3. Pour $m = 2p$, on a cette fois **2 pts**

$$\forall x \in \left[\frac{\pi}{2}, +\infty \right[, \int_{\pi/2}^x \frac{\sin^{2p}(t)}{t} dt = \frac{1}{2^{2p}(-1)^p} \sum_{k=0}^{2p} \binom{2p}{k} (-1)^k I_{2(p-k)}(x)$$

Dans le membre de droite, tous les termes admettent une limite quand $x \rightarrow +\infty$ sauf celui pour $k = p$ qui tend vers $+\infty$ (en rentrant le facteur dans la somme et puisque $I_0(x) \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$). On a donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{\pi/2}^x \frac{\sin^{2p}(t)}{t} dt = +\infty$$

et J_{2p} n'existe pas.

Préliminaires

- (1) Angle moitié :

$$u = e^{i\frac{\theta}{2}} \left(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}} \right) = 2 \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) e^{i\frac{\theta}{2}}$$

On distingue alors obligatoirement trois cas. **2 pts**

- Si $\theta \in [0, \pi[$ alors $\cos(\theta/2) > 0$. On a alors $|u| = 2 \cos(\frac{\theta}{2})$ et $\arg(u) = \frac{\theta}{2}$.
- Si $\theta = \pi$ alors $u = 0$. Le module est nul et l'argument non défini.
- Si $\theta \in]\pi, 2\pi[$ alors $\cos(\theta/2) < 0$. On a alors $|u| = -2 \cos(\frac{\theta}{2})$ et $\arg(u) = \pi + \frac{\theta}{2}$.

- (2) (a) (i) Le calcul donne **0.5 pts**

$$P_1 = 3X^2 - 1 \quad \text{et} \quad P_2 = 5X^4 - 10X^2 + 1$$

(ii) Il est immédiat que P_1 est de degré 2 et P_2 de degré 4.

Les irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ étant les polynômes de degré 1 et ceux de degré 2 sans racine réelle (ou encore à discriminant négatif), ni P_1 (qui admet $\frac{1}{\sqrt{3}}$ comme racine) ni P_2 (qui est de degré 4) ne sont irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$. **1 pts**

(b) (i) P_n est différence de deux polynômes de degré $2n + 1$ et est donc dans $\mathbb{C}_{2n+1}[X]$. Le coefficient de X^{2n+1} dans P_n est

$$\frac{1}{2i}(1 - 1) = 0$$

et donc $P \in \mathbb{C}_{2n}[X]$. Le coefficient de X^{2n} dans P_n est **1.5 pts**

$$\frac{1}{2i}((2n + 1)i - (2n + 1)(-i)) = 2n + 1 \neq 0$$

Ainsi, P_n est de degré $2n$ et son coefficient dominant est $2n + 1$.

(ii) Les racines N -ièmes de l'unité sont les complexes, $\omega = e^{\frac{2i\pi}{N}}$ **0.5 pts**

$$\omega^k = e^{\frac{2ik\pi}{N}} \text{ pour } k = 0, \dots, N - 1$$

(iii) On a **0.5 pts**

$$P_n(i) = \frac{(2i)^{2n+1}}{2i} = 2^{2n}(-1)^n$$

(iv) Les racines de P_n sont à égale distance de i et $-i$, donc sur la médiatrice du segment $[-i, i]$, i.e. l'axe des réels. **1. pts**

(v) Supposons que a soit racine de P_n . On a alors $a \neq i$ et $\left(\frac{a+i}{a-i}\right)^{2n+1} = 0$. Il existe donc $k \in \llbracket 0, 2n + 1 \rrbracket$ tel que

$$\frac{a + i}{a - i} = e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}$$

et donc (produit en croix) **1.5 pts**

$$a(e^{2ik\pi/(2n+1)} - 1) = i(e^{2ik\pi/(2n+1)} + 1)$$

On remarque alors que $k \neq 0$ car pour $k = 0$ la relation précédente est fautive ($0 \neq i$).

Réciproquement, si $a(e^{2ik\pi/(2n+1)} - 1) = i(e^{2ik\pi/(2n+1)} + 1)$ avec $k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$, on a $(a + i) = (a - i)e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}$. En élevant à la puissance $2n + 1$ on trouve que $(a + i)^{2n+1} = (a - i)^{2n+1}$ et donc que $P_n(a) = 0$

(vi) Les racines de P_n sont donc les **1.5 pts**

$$a_k = \frac{i(e^{2ik\pi/(2n+1)} + 1)}{(e^{2ik\pi/(2n+1)} - 1)} = i \frac{2 \cos(k\pi/(2n + 1))}{2i \sin(k\pi/(2n + 1))} = \cotan\left(\frac{k\pi}{2n + 1}\right)$$

pour $k = 1, \dots, 2n$. On trouve bien des racines toutes réelles.

Remarque : cotan étant bijective de $]0, \pi[$ dans $\mathbb{R}$ et les $2k\pi/(2n + 1)$ étant dans $]0, \pi[$, les a_k sont 2 à 2 distincts. Il y en a $2n$ et P_n est de degré $2n$. On a donc $2n$ racines simples et P_n est scindé simple sur $\mathbb{R}[X]$.

(vii) On développe les deux puissances par formule du binôme et on regroupe les termes :

$$2iP_n(X) = \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} X^k i^{2n+1-k} (1 - (-1)^{2n+1-k})$$

Les termes d'indice k pairs sont nuls. Il reste donc

$$2iP_n(X) = 2 \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k} X^{2k} i^{2n+1-2k} = 2i \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k} (-1)^{n-k} X^{2k}$$

On en déduit que **2 pts**

$$P_n(X) = Q_n(X^2) \quad \text{avec} \quad Q_n(X) = \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k} (-1)^{n-k} X^k$$

(viii) 2.a.i donne **0.5 pts**

$$Q_1 = 3 \left(X - \frac{1}{3} \right) \quad \text{et} \quad Q_2 = 5X^2 - 10X + 1 = 5 \left(X - \frac{5+2\sqrt{5}}{5} \right) \left(X - \frac{5-2\sqrt{5}}{5} \right)$$

La factorisation donne les racines.

(ix) Si a est racine de P_n alors a^2 est racine de Q_n . En particulier, on a les racines

$$\cotan^2 \left(\frac{k\pi}{2n+1} \right)$$

pour $k = 1, \dots, n$. Ces racines sont distinctes car les a_k sont distincts et positifs pour ces valeurs de k (les carrés sont donc aussi distincts). Ceci donne n racines distinctes de Q_n qui est de degré n et donc toutes les racines. **1.5 pts**

(3) S_n est la somme des racines b_k de Q_n qui est scindé à racines simples et s'écrit (son coefficient dominant est celui de P_n) **3.5 pts**

$$Q_n = (2n+1) \prod_{k=1}^n (X - b_k) = (2n+1) \left(X^n - \sum_{k=1}^n b_k X^{n-1} + \dots + (-1)^n b_1 \dots b_n \right)$$

On voit que l'on a besoin du coefficient de X^{n-1} dans Q_n qui vaut $-\binom{2n+1}{2n-2}$. On a ainsi

$$S_n = \frac{1}{2n+1} \binom{2n+1}{2n-2} = \frac{1}{2n+1} \binom{2n+1}{3} = \frac{(2n+1)2n(2n-1)}{6(2n+1)} = \frac{n(2n-1)}{3}$$

LA RÉPONSE EST DANS L'ÉNONCÉ!!!!!!

(4) Pour voir que $\sin(x) \leq x \leq \tan(x)$, on montre que la courbe de $\sin$ est sur $[0, \pi/2[$ sous sa tangente et celle de $\tan$ au-dessus. Il s'agit donc d'inégalités de convexité ($\sin$ est concave sur $[0, \pi/2[$ puisqu'à dérivée seconde négative ; $\tan$ est convexe sur cet intervalle puisqu'à dérivée seconde positive). $\sin(x) \geq 0$ est immédiat sur $[0, \pi/2[$.

Comme $y \mapsto 1/y^2$ décroît sur $\mathbb{R}^{+*}$, on en déduit que **1.5 pts**

$$\forall x \in]0, \pi/2[, \quad \frac{1}{\tan^2(x)} \leq \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{\sin^2(x)} = 1 + \frac{1}{\tan^2(x)}$$

(5) Pour $k = 1, \dots, n$, $\frac{k\pi}{2n+1} \in]0, \pi/2[$ et donc

$$S_n \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)^2} \leq n + S_n$$

ce qui donne **2.5 pts**

$$\frac{\pi^2 S_n}{(2n+1)^2} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq \frac{\pi^2 (n + S_n)}{(2n+1)^2}$$

Avec l'expression de S_n , majorant et minorant ont pour limite $\pi^2/6$. Par théorème d'encadrement, il en est de même pour le terme du milieu de notre double inégalité. La série proposée converge (ce que l'on sait car c'est une série de Riemann convergente) et

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

- (1) $t \mapsto t^s \ln(t)$ est continue sur $]0, 1]$ et on a un unique pb au voisinage de 0. Or, $t^s \ln(t) = o(t^{\frac{s-1}{2}})$ (le quotient vaut $t^{\frac{s+1}{2}} \ln(t)$ qui est de limite nulle en 0 par croissances comparées car $s+1 > 0$) et $\frac{s-1}{2} > -1$. On a donc intégrabilité au voisinage de 0 (comparaison aux fonctions de Riemann) et J_s existe. **3 pts Fait en cours!**

Sous réserve d'existence, une intégration par partie donne

$$J_s = \left[\frac{t^{s+1}}{s+1} \ln(t) \right]_0^1 - \frac{1}{s+1} \int_0^1 t^s dt$$

Le terme tout intégré admet une limite en 0 (nulle par croissances comparées) et l'intégration par partie est licite (Segment!). On termine le calcul avec **1.5 pts**

$$J_s = -\frac{1}{(s+1)^2}$$

- (2) (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. $f_x : t \mapsto \frac{t^x \ln(t)}{(t-1)}$ est continue sur $]0, 1[$, prolongeable par continuité en 1 par la valeur 1 (car $\ln(t) \underset{1}{\sim} (t-1)$) et équivalente en 0 à $-t^x \ln(t)$. Si $x > 1$, f_x est intégrable au voisinage de 0 (question précédente). Si $x \leq 1$, $t f_x(t) \rightarrow +\infty$ quand $t \rightarrow 0$ et f_x n'est pas intégrable. Enfin, f_x est positive et son intégrabilité équivaut à l'existence de son intégrale. Ainsi **2.5 pts LA Réponse EST DANS L'ENONCé!!!!!!**

$$D_H =]-1, +\infty[$$

- (b) Si $x \leq y$ alors pour tout $]0, 1[$, $t^x = \exp(x \ln(t)) \geq \exp(y \ln(t)) = t^y$ (car $\ln(t) \leq 0$). On multiplie par $\frac{\ln(t)}{t-1} \geq 0$ et on intègre sur $]0, 1[$ quand $x > -1$. On trouve que

$$\forall -1 < x \leq y, H(x) \geq H(y)$$

et H est donc décroissante sur son domaine. **1.5 pts**

- (c) La fonction proposée est continue sur $]0, 1[$, de limite nulle en 1 (car $\ln(t) \underset{1}{\sim} (t-1)$) et de limite nulle en 0 (par croissances comparées et car $\alpha > 0$). Ainsi, cette fonction est prolongeable en une fonction continue sur le SEGMENT $[0, 1]$ et donc bornée sur ce segment. **1.5 pts**

- (d) On utilise le théorème de régularité des intégrales à paramètres.

- $\forall x > -1$, $t \mapsto \frac{t^x \ln(t)}{t-1}$ est intégrable sur $]0, 1[$.

- $\forall t \in]0, 1[$, $x \mapsto \frac{t^x \ln(t)}{t-1}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -1, +\infty[$, de dérivée $x \mapsto \frac{t^x (\ln(t))^2}{t-1}$.

- $\forall x > -1$, $t \mapsto \frac{t^x (\ln(t))^2}{t-1}$ est continue sur $]0, 1[$.

- $\forall x \in [a, b] \subset] -1, +\infty[$, $\forall t \in]0, 1[$, $\left| \frac{t^x (\ln(t))^2}{t-1} \right| \leq \frac{t^a (\ln(t))^2}{1-t}$. Le majorant est continu sur $]0, 1[$ et borné (question précédente) et donc intégrable sur le SEGMENT $[0, 1]$.

Le théorème s'applique et indique que $H \in \mathcal{C}^1(]-1, +\infty[)$ avec

$$\forall x > -1, H'(x) = \int_0^1 \frac{t^x (\ln(t))^2}{t-1} dt$$

La fonction intégrée étant négative H' est négative sur $] -1, +\infty[$ et on retrouve la décroissance de H .

- (e) Soit $x > 0$. La fonction $g : t \mapsto \frac{t \ln(t)}{t-1}$ est continue sur $]0, 1[$ et prolongeable par continuité en 0 (valeur 0) et 1 (valeur 1). C'est donc une fonction bornée sur $]0, 1[$. Une majoration grossière donne **2. pts**

$$\forall x > 0, |H(x)| \leq \|g\|_\infty \int_0^1 t^{x-1} dt = \frac{\|g\|_\infty}{x}$$

On en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} H(x) = 0$$

(f) On a **1. pts**

$$H(x) - H(x+1) = \int_0^1 \frac{t^x(1-t)\ln(t)}{t-1} dt = -J_x = \frac{1}{(x+1)^2}$$

(g) H étant continue en 0 (et même dérivable), $H(x+1) \rightarrow H(0)$ quand $x \rightarrow -1$ est négligeable devant $1/(x+1)^2$ au voisinage de -1 . Ainsi la question précédente donne

$$H(x) = \frac{1}{(x+1)^2} + o\left(\frac{1}{(x+1)^2}\right)_{x \rightarrow -1} \sim \frac{1}{(x+1)^2}$$

(h) (i) On a $\frac{1}{(x+k)^2} \sim \frac{1}{k^2}$ qui est le terme d'une série positive convergente. **0.5 pts**
 (ii) On procède par récurrence.

- Initialisation : pour $n = 0$, l'égalité se lit $H(x) = H(x)$ et est vraie. Pour $n = 1$, on utilise 2.f.

- Hérédité : soit $n \geq 1$ tel que le résultat est vrai au rang n . La question 2.f utilisée avec $x+n$ donne alors

$$\begin{aligned} H(x) &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{(x+k)^2} + H(x+n) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{(x+k)^2} + \frac{1}{(x+n+1)^2} + H(x+n+1) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(x+k)^2} + H(x+n+1) \end{aligned}$$

ce qui donne le résultat au rang $n+1$.

(iii) Comme H est de limite nulle en $+\infty$ et comme la série converge, on peut faire tendre n vers $+\infty$ pour obtenir

$$H(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(x+k)^2}$$

(iv) En particulier

$$H(0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$H(1) = H(0) - 1 = \frac{\pi^2}{6} - 1$$

Partie 2

(1) $h_x : t \mapsto \frac{1}{(x+t)^2}$ décroît sur $] -x, +\infty[$ et donc sur $]1, +\infty[$. On en déduit que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, h_x(k+1) \leq \int_k^{k+1} h_x(t) dt \leq h_x(k)$$

c'est à dire **1. pts**

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{(x+k+1)^2} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{(x+t)^2} \leq \frac{1}{(x+k)^2}$$

(2) Sommons ces inégalités pour $k = 1, 2, \dots, n$:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{(x+k+1)^2} \leq \int_1^{n+1} \frac{dt}{(x+t)^2} = \left[-\frac{1}{t+x} \right]_{t=1}^{t=n+1} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{(x+k)^2}$$

Tous les termes admettent une limite quand $n \rightarrow +\infty$ et le passage à la limite donne

$$H(x) - \frac{1}{(x+1)^2} \leq \frac{1}{1+x} \leq H(x)$$

ou encore

$$\frac{1}{1+x} \leq H(x) \leq \frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2}$$

Majorant et minorant possédant en $+\infty$ l'équivalent commun $1/x$, on en déduit que

$$H(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x}$$

- (3) (a) $H(n) \sim \frac{1}{n}$ est le terme général d'une série divergente positive. $((-1)^n u_n)$ est une suite de limite nulle (H est de limite nulle en $+\infty$), alternée (H est positive) et décroissante en module (H est décroissante). La règle spéciale indique que $\sum ((-1)^n u_n)$ converge. **1.5 pts**

- (b) Notons $f_n : t \mapsto (-1)^n \frac{t^n \ln(t)}{t-1}$.

- $\forall n, f_n \in \mathcal{C}^0(]0, 1[)$.

- $\sum (f_n)_{n \geq 0}$ converge simplement sur $]0, 1[$ et sa somme simple est $t \mapsto \frac{\ln(t)}{t^2-1}$ (on reconnaît en $\sum ((-1)^n t^n)$ une série géométrique). Cette limite simple est continue sur $]0, 1[$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in]0, 1[$,

$$\left| \sum_{k=0}^n f_k(t) \right| = \left| \frac{(1 - (-t)^{n+1}) \ln(t)}{t^2 - 1} \right| \leq \frac{2|\ln(t)|}{1 - t^2}$$

Le majorant est continu sur $]0, 1[$, prolongeable par continuité en 1 (valeur 1) et $o(1/\sqrt{t})$ au voisinage de 0 (équivalent à $\ln(t)$). Il est donc intégrable sur $]0, 1[$.

Par théorème de convergence dominée, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u_n = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 f_n = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{t^2-1} dt$$

- (c) $v \mapsto v^2$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, 1[$ à dérivée qui ne s'annule pas, on peut effectuer le changement de variable $u = v^2$ pour obtenir **1.5 pts**

$$\int_0^1 \frac{\ln(v)}{v^2-1} dv = \int_0^1 \frac{\ln(\sqrt{u})}{u-1} \frac{du}{2\sqrt{u}} = \frac{1}{4} H(-1/2)$$

Partie 3

- (1) (a) Sous réserve d'existence, une intégration par parties donne

$$I_{p,q} = \left[\frac{t^{p+1}}{p+1} (\ln(t))^q \right]_0^1 - \frac{q}{p+1} \int_0^1 t^p \ln(t)^{q-1} dt$$

Le terme tout intégré est de limite nulle en 0 (croissances comparées) et ceci légitime l'intégration par parties et donc **2. pts** Où est le résultat ??????

$$I_{p,q} = -\frac{q}{p+1} I_{p,q-1}$$

- (b) On prouve alors par récurrence (sur q) que **1. pts**

$$I_{p,q} = (-1)^q \frac{q!}{(p+1)^q} I_{p,0} = (-1)^q \frac{q!}{(p+1)^{q+1}}$$

- (2) (a) $t \mapsto \frac{(\ln(t))^{n+1}}{t-1}$ est continue sur $]0, 1[$, négligeable devant $1/\sqrt{t}$ au voisinage de 0 (croissances comparées) et prolongeable par continuité en 1 (valeur 1 si $n = 0$ et 0 si $n \geq 1$). C'est donc une fonction intégrable sur $]0, 1[$ et B_n existe.

- (b) On sait que

$$\forall t \in]0, 1[, \frac{1}{1-t} = \sum_{k=0}^{+\infty} t^k$$

Posons donc $g_k : t \mapsto \ln(t)^{n+1} t^k$ (n est fixé).

- Les g_k sont toutes continues sur $]0, 1[$.
- $\sum(g_k)$ converge simplement sur $]0, 1[$ et sa somme simple est $t \mapsto \frac{(\ln(t))^{n+1}}{t-1}$ qui est continue sur $]0, 1[$.
- $\int_0^1 |g_k| = (-1)^{n+1} \int_0^1 g_k = (-1)^{n+1} I_{k,n+1} = \frac{(n+1)!}{(k+1)^{n+2}}$ qui est le terme général d'une série de Riemann convergente car $n+2 \geq 2 > 1$.

Le théorème d'intégration terme à terme s'applique et donne

$$B_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 g_k = \sum_{k=0}^{+\infty} I_{k,n+1}$$

(c) Avec la question 1, on en déduit (avec changement d'indice) que

$$B_n = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{(n+1)!}{(k+1)^{n+2}} = (-1)^{n+1} (n+1)! Z_{n+2}$$