

PROBLEME 1 : chimie

Masse molaire de quelques éléments en  $\text{g.mol}^{-1}$ .

Élément	O	N	Fe	Cl
Masse molaire	16,00	14,00	55,85	35,50

### Etude thermodynamique de l'équilibre de dimérisation de $\text{FeCl}_3$ .

On étudie en phase gazeuse l'équilibre de dimérisation de  $\text{FeCl}_3$  de constante  $K^\circ$  à température donnée T.



**B.1-** Calculer la variance de cet équilibre. Interpréter la valeur obtenue.

On mesure à deux températures  $T_1 = 700 \text{ K}$  et  $T_2 = 800 \text{ K}$  et sous la pression standard  $P^\circ = 1 \text{ bar}$ , la densité du mélange gazeux. On obtient respectivement  $d_1 = 10,5$  et  $d_2 = 9,6$ .

On appelle  $\alpha$  le taux de dissociation de  $\text{FeCl}_3$  à l'équilibre. On rappelle que  $\alpha$  est le rapport de la quantité de matière dissociée sur la quantité de matière initiale.

On rappelle que la densité d'un mélange gazeux est donnée par la formule  $d = \frac{M}{29}$  où M est la masse molaire du mélange gazeux en  $\text{g.mol}^{-1}$ , 29 étant approximativement la masse molaire de l'air en  $\text{g.mol}^{-1}$ .

**B.2-** Montrer que  $d = \frac{5,6}{1 - \frac{\alpha}{2}}$ .

**B.3-** Calculer  $\alpha_1$  à 700 K et  $\alpha_2$  à 800 K.

**B.4-** Donner l'expression littérale de la constante  $K^\circ(T)$  en fonction des pressions partielles à l'équilibre en  $\text{FeCl}_3$  et  $\text{Fe}_2\text{Cl}_6$  puis en fonction de  $\alpha$ .

**B.5-** Calculer la constante  $K^\circ(T)$  aux deux températures.

**B.6-** Calculer l'enthalpie standard de la réaction  $\Delta_r H^\circ$  en la supposant indépendante de la température. La réaction est-elle endothermique ou exothermique ?

**B.7-** On suppose de même que  $\Delta_r S^\circ$  est indépendant de la température. Calculer  $\Delta_r S^\circ$ . Pouvaient-on prévoir le signe de  $\Delta_r S^\circ$  a priori ? Justifier.

**B.8-** Quelle est l'influence d'une augmentation de température à pression constante sur l'équilibre ? Justifier.

PROBLEME 2 : vidange d'un réservoir**D / Ecoulement parfait**

La citerne est munie d'un orifice par lequel le gazole peut s'écouler.

On suppose que toutes les conditions sont réunies pour qu'on puisse appliquer la relation de Bernoulli entre un point A de la surface libre du gazole et un point B au niveau de l'ouverture (voir figure ci-après) :

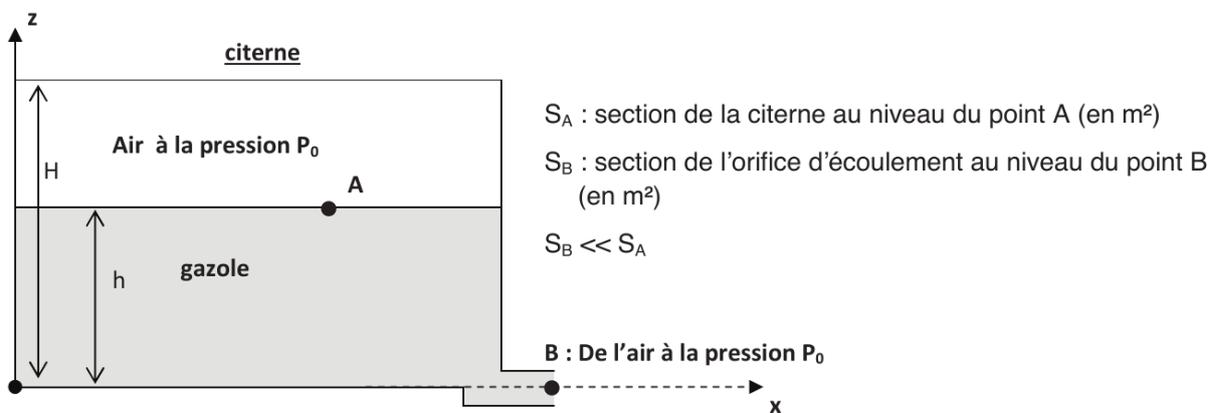
où

$\rho$  est la masse volumique du gazole,

$V_A$  (respectivement  $V_B$ ) correspond à la vitesse moyenne (encore appelée vitesse débitante) de l'écoulement supposée constante au niveau de la section  $S_A$  (respectivement  $S_B$ ),

$p_A$  (respectivement  $p_B$ ) correspond à la pression de l'écoulement supposée constante au niveau de la section  $S_A$  (respectivement  $S_B$ ),

$g$  est l'intensité du champ de pesanteur.



**D1.** Quelles sont les conditions d'application de la relation de Bernoulli ?

**D2.** Comment se traduit la conservation de la masse lors de l'écoulement ?

En déduire une relation entre les vitesses moyennes en A et B.

**D3.** Sachant que la section en A est nettement plus grande que celle en B, exprimer la vitesse moyenne  $V_B$  de l'écoulement en B à l'aide de  $h$  et  $g$ .

**D4.** La citerne est initialement pleine.

Exprimer le temps nécessaire  $T$  pour la vidanger complètement, à l'aide de  $S_A$ ,  $S_B$ ,  $H$  et  $g$ .

Calculer  $T$ .

**E / Prise en compte d'une perte de charge singulière**

Au niveau du convergent (rétrécissement de section sur la ligne de courant AB), on constate une zone de perturbation caractérisée énergétiquement par une « perte de charge singulière » : le bilan d'énergie se traduit par une perte d'énergie mécanique volumique modélisable par la formule suivante :

$$\frac{1}{2}\rho(V_B^2 - V_A^2) + \rho g(z_B - z_A) + (p_B - p_A) = -\frac{1}{2}K_c \rho V_B^2 \text{ avec } K_c \approx 0,55 \text{ (sans dimension)}$$

**E1.** Déterminer une nouvelle expression de  $V_B$  en tenant compte de la perte de charge singulière.

**E2.** Exprimer à nouveau le temps nécessaire  $T'$  pour vidanger complètement la citerne, à l'aide de  $T$  et  $K_c$ .

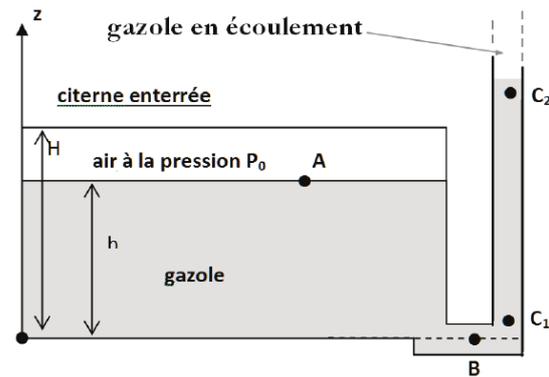
Calculer  $T'$ . Commenter.

### F / Prise en compte d'une perte de charge régulière

On accroche au niveau de B une conduite cylindrique verticale de grande longueur et de diamètre  $d = 2a$ . La figure ci-contre ne représente qu'une portion  $\ell = C_1C_2$  de cette conduite.

L'étude de l'écoulement entre  $C_1$  et  $C_2$  nécessite alors la prise en compte de la dissipation d'énergie par frottement dû à la viscosité du gazole.

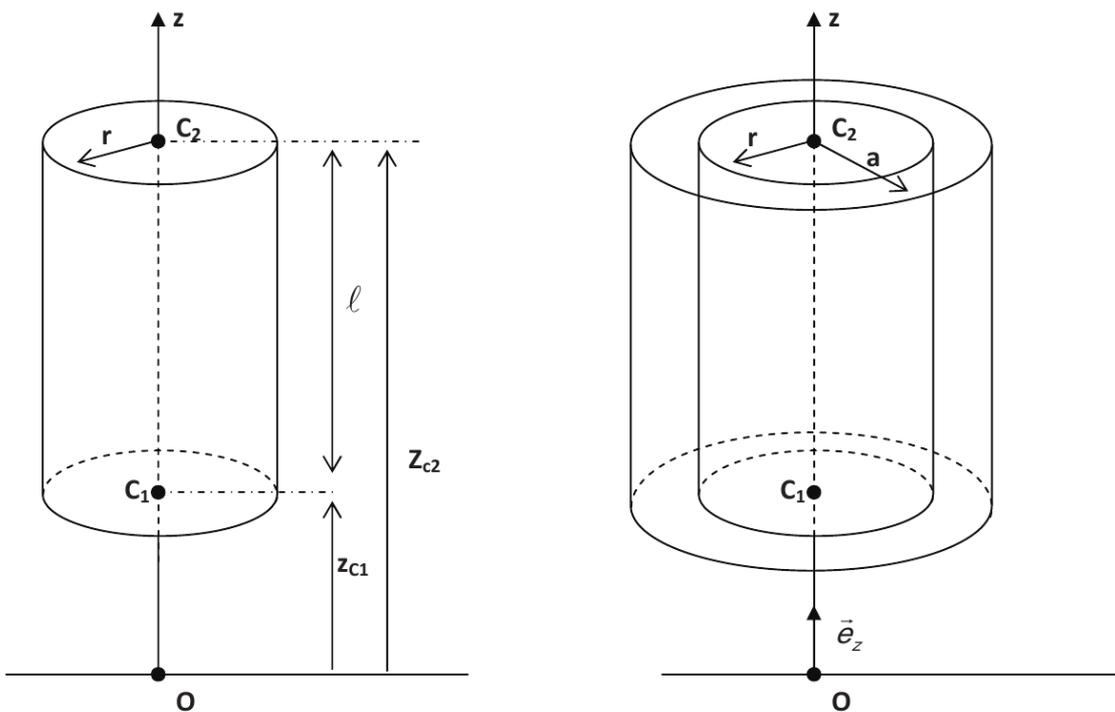
Dans la suite, on considère que le gazole est un fluide incompressible, de masse volumique constante  $\rho$ , de viscosité dynamique  $\eta$ , en écoulement stationnaire.



On suppose de plus que l'écoulement est laminaire et que le champ de vitesse est à symétrie cylindrique

$$\vec{V}(r) = V(r)\vec{e}_z$$

avec  $V(r) > 0$  et une vitesse nulle le long des parois et maximale sur l'axe de la conduite. Les pressions sont supposées constantes pour une altitude donnée :  $p_{C_1}$  est la pression en  $C_1$  à l'altitude  $z_{C_1}$ ,  $p_{C_2}$  est la pression en  $C_2$  à l'altitude  $z_{C_2}$ .



On isole par la pensée un cylindre de fluide de rayon  $r$  inférieur à  $a$  et de longueur  $\ell$ . Ce cylindre subit des forces pressantes en  $C_1$  et  $C_2$ , son poids et des forces visqueuses modélisées par la loi suivante :

$$\vec{f} = \eta \frac{dV}{dr} \Sigma \vec{e}_z$$

Où  $\Sigma$  représente la surface latérale de contact entre le fluide contenu dans le cylindre et celui à l'extérieur du cylindre.

**F1.** Faire un bilan de quantité de mouvement pour ce cylindre et établir la relation suivante :

$$\frac{dV}{dr} = -\alpha \cdot (\tilde{p}_{C1} - \tilde{p}_{C2}) \cdot r$$

avec  $\tilde{p} = p + \rho g z$  et  $\alpha$  un facteur que l'on exprimera à l'aide de  $\eta$  et  $\ell$ . Commentez le signe de  $\alpha$ .

**F2.** Montrer que  $V(r)$  s'écrit :  $V(r) = V_{\max} \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right)$ . Exprimer  $V_{\max}$  à l'aide de  $\alpha$ ,  $a$  et  $(\tilde{p}_{C1} - \tilde{p}_{C2})$ .

**F3.** Déterminer l'expression du débit volumique  $Q_V$  à l'aide de  $\alpha$ ,  $a$  et  $(\tilde{p}_{C1} - \tilde{p}_{C2})$ .

**F4.** En déduire l'expression de la vitesse moyenne  $V_{\text{moy}}$  dans une section de la conduite (encore appelée vitesse débitante) à l'aide de  $\alpha$ ,  $a$  et  $(\tilde{p}_{C1} - \tilde{p}_{C2})$ .

La « perte de charge régulière » (due à la dissipation d'énergie à cause des frottements visqueux) est définie par  $\Delta p_r = \lambda \frac{1}{2} \rho V_{\text{moy}}^2 \frac{\ell}{d}$  où  $\lambda$  est une constante sans dimension dépendant de la nature de l'écoulement et de la rugosité de la conduite,  $\ell$  la longueur de la conduite et  $d$  son diamètre.

On a par ailleurs :  $\tilde{p}_{C2} - \tilde{p}_{C1} = -\Delta p_r$  pour une canalisation de section constante.

**F5.** Déterminer l'expression de  $\lambda$  à l'aide de  $\eta$ ,  $\rho$ ,  $V_{\text{moy}}$  et  $a$ .

**F6.** Rappeler l'expression du nombre de Reynolds  $R_e$  pour une conduite cylindrique en fonction de son diamètre  $d$ , de la vitesse moyenne  $V_{\text{moy}}$ , de la masse volumique  $\rho$  et de la viscosité  $\eta$ .

Pour un écoulement laminaire, en déduire l'expression de  $\lambda$  à l'aide du nombre de Reynolds,  $R_e$ .

**F7.** Calculer le nombre de Reynolds  $R_e$  à l'aide des données numériques fournies en fin de sujet.

**F8.** Rappeler comment le nombre de Reynolds,  $R_e$  peut être utilisé pour caractériser la nature de l'écoulement.

L'hypothèse d'écoulement laminaire utilisée jusqu'à la question **F7** est-elle valide ?

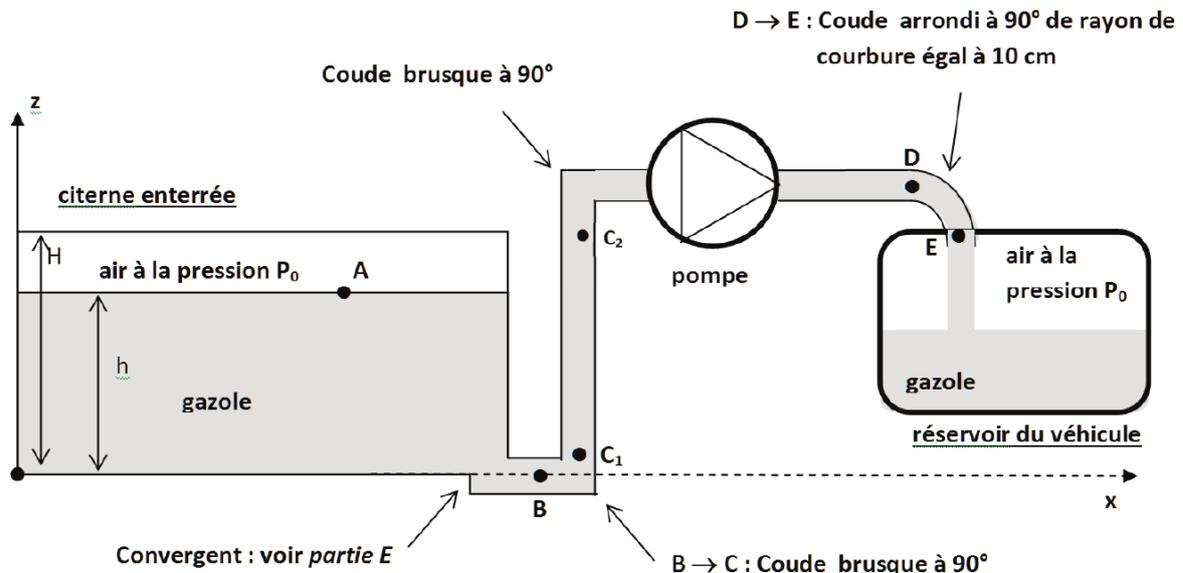
## G / Remplissage du réservoir d'une voiture

On utilise une pompe centrifuge pour déplacer le gazole de la citerne au réservoir d'une voiture. Le schéma suivant modélise simplement le circuit du fluide (la citerne étant enterrée, on a bien évidemment  $z_E > z_A$ )

La « perte de charge singulière » (due à la dissipation d'énergie à cause des coudes, des raccords entre

canalisations de diamètres différents...) est définie par  $\Delta p_s = K \frac{1}{2} \rho V_{\text{moy}}^2$  où  $K$  est une constante sans

dimension dépendant de la nature de la singularité rencontrée. On admettra que la pompe utilisée ici génère une perte de charge singulière de coefficient  $K_{\text{pompe}} = 6$ .



- G1.** Utiliser le document, page 12, intitulé « Données numériques » pour déterminer la valeur numérique du coefficient  $K_{total}$  correspondant à l'ensemble des singularités détaillées sur le schéma ci-dessus. On prendra soin de préciser les différents termes intervenant dans  $K_{total}$ .
- G2.** Calculer la valeur totale des pertes de charge singulières  $\Delta p_{s,tot}$  à l'aide des données numériques fournies en fin de sujet.
- G3.** La totalité des longueurs droites de la conduite vaut approximativement  $\ell = 10$  m.  
On admettra la valeur suivante pour le coefficient de perte de charge régulière :  $\lambda = 2,45 \cdot 10^{-2}$ .  
Calculer la valeur totale des pertes de charge régulières  $\Delta p_{r,tot}$  à l'aide des données numériques fournies en fin de sujet.

L'insertion d'un élément actif (ici la pompe électrique) dans le circuit du fluide modifie le bilan énergétique appliqué au gazole. En tenant compte des pertes de charge, on admet la relation suivante appliquée entre les points A et E :

$$\frac{1}{2} \rho (V_E^2 - V_A^2) + \rho g (z_E - z_A) + (p_E - p_A) = -(\Delta p_{r,tot} + \Delta p_{s,tot}) + \frac{P_u}{Q_v}$$

où  $P_u$  est la puissance utile fournie par la pompe au fluide et  $Q_v$  est le débit volumique.

- G4.** Calculer le débit volumique dans les conduites  $Q_v$  à l'aide des données numériques fournies.
- G5.** Sachant que la pompe a un rendement de 80%, déterminer l'expression de  $P_e$ , puissance électrique alimentant la pompe. Calculer  $P_e$  (on prendra  $z_E - z_A \approx 5$  m).

### DONNEES NUMÉRIQUES

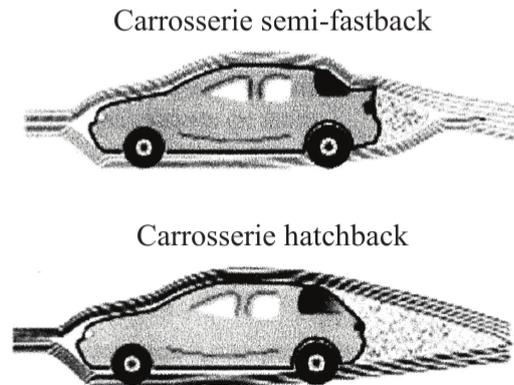
Section de la citerne au point A :	$S_A = 1,00 \text{ m}^2$
Section de l'ouverture au point B :	$S_B = 1,00 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$
Rayon des sections des conduites et des coudes :	$a = 1,80 \text{ cm}$
Intensité du champ de pesanteur :	$g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
Masse volumique du gazole :	$\rho = 840 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
Viscosité dynamique du gazole :	$\eta = 5 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$
Vitesse moyenne des conduites :	$V_{moy} = 4,50 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Coefficient K pour les pertes de charge singulière :

<p><i>Coude brusque :</i></p> <p><math>K = \sin^2 \alpha + 2 \sin^4 \left( \frac{\alpha}{2} \right)</math></p>	<p><i>Coude arrondi de rayon de courbure <math>R_c</math> et de diamètre <math>d</math> (<math>\alpha</math> est en degré) :</i></p> <p><math>K = \frac{\alpha}{180} \cdot \left( 0,131 + 1,847 \cdot \left( \frac{d}{R_c} \right)^{7/2} \right)</math></p>
----------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

### PROBLEME 3 : aérodynamique d'une aileron

La **figure 1** montre l'allure des lignes de courant obtenues en soufflerie pour deux véhicules, l'un du type berline (semi-fastback) et l'autre correspondant à la version à hayon généralement dénommée break ou SW (hatchback). Les sections de référence et les coefficients aérodynamiques de ces deux véhicules sont un peu différents. L'écoulement de l'air est supposé incompressible.



**Figure 1** – Essais en soufflerie

On rappelle l'expression de la force de traînée :  $F_x = \frac{C_x \rho_0 S V^2}{2}$ , où  $\rho_0 = 1,2 \text{ kg.m}^{-3}$  est la masse volumique de l'air,  $V$  la vitesse relative de l'air par rapport à l'obstacle,  $C_x$  le coefficient aérodynamique de traînée de l'obstacle et  $S$  la section de référence de l'obstacle à l'écoulement.

**Q1.** Préciser les zones d'écoulement laminaire et turbulent. Quels sont les facteurs qui influencent le coefficient aérodynamique  $C_x$ .

On considère une automobile de masse  $m = 1\,300 \text{ kg}$ , de coefficient aérodynamique  $C_x = 0,33$ , de section de référence  $S = 2,5 \text{ m}^2$  et dont le moteur développe une puissance  $P = 62,5 \text{ kW}$ .

**Q2.** En négligeant dans cette question les frottements entre les pneumatiques et la route et en supposant l'air environnant au repos dans le référentiel terrestre, exprimer la vitesse maximale de l'automobile en fonction de tout ou partie des données précitées, puis en donner une valeur numérique en km/h.

**Q3.** Sur route ou autoroute, à vitesse stabilisée, la consommation en carburant, exprimée en litres pour 100 km parcourus, augmente en  $V^x$ . Déterminer l'exposant  $x$ .

Pour améliorer la tenue de route, certaines voitures sportives sont équipées d'un aileron pour renforcer l'appui arrière (**figure 2**, page 3). On se propose ici de quantifier son influence.

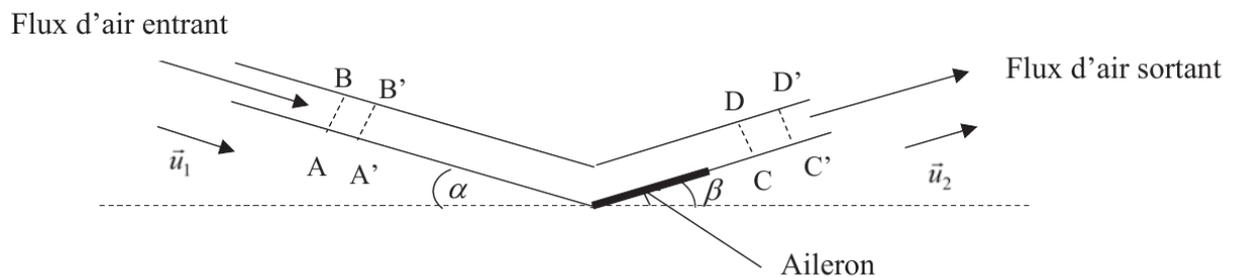


**Figure 2** – Aileron arrière

L'air est assimilé à un fluide parfait. Son écoulement, dans le référentiel de la voiture, est supposé stationnaire et incompressible. L'effet de la pesanteur sur l'air est négligé.

L'aileron, incliné vers le haut d'un angle non orienté  $\beta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  par rapport à la route, dévie l'air qui s'écoule tangentielllement à la partie arrière du véhicule qui est inclinée vers le bas d'un angle, non orienté  $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  par rapport à la route.

On note  $S_e$  la section transverse de l'écoulement de l'air dévié par l'aileron. Cette section est supposée constante le long du tube de courant décrit sur la **figure 3**.



**Figure 3** – Écoulement de l'air dans un tube de courant

On note respectivement  $\vec{v}_1 = v_1 \vec{u}_1$  et  $\vec{v}_2 = v_2 \vec{u}_2$ , les vitesses des écoulements d'air entrant et sortant du tube de courant.  $\vec{u}_1$  et  $\vec{u}_2$  sont des vecteurs unitaires.

On considère le système fermé, constitué par l'air compris entre les sections AB et CD à la date  $t$  et de l'air compris entre les sections A'B' et C'D' à la date  $t + dt$ .

**Q4.** On note  $dm_1$  la masse qui traverse la section AB entre  $t$  et  $t + dt$  et  $dm_2$  la masse qui traverse la section CD entre  $t$  et  $t + dt$ . Comparer  $dm_1$  et  $dm_2$  ainsi que  $v_1$  et  $v_2$ .

- Q5.** En effectuant un bilan de quantité de mouvement sur le système fermé défini précédemment, déterminer la force exercée sur le tube de courant en fonction de  $\rho_0$ ,  $\mathbf{v}_1$ ,  $S_e$ ,  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$ .
- Q6.** On admet que la force  $\vec{F}_{\text{air} \rightarrow \text{véhicule}}$  exercée par l'air sur le véhicule en mouvement est l'opposée de celle exercée sur le tube de courant. En déduire la composante perpendiculaire à la route de la force exercée par l'air sur le véhicule en fonction de  $\rho_0$ ,  $\mathbf{v}_1$ ,  $S_e$ ,  $\alpha$  et  $\beta$ . Discuter du sens de cette composante.

### PROBLEME 4 : physique d'une éolienne

L'éolienne sera assimilée à ses pales qui récupèrent une puissance mécanique  $P_{\text{éol}}$  provenant de l'écoulement de l'air avoisinant.

L'étude est faite dans le référentiel terrestre supposé Galiléen où les pales sont animées d'un mouvement de rotation uniforme autour de l'axe  $x'x$  de vecteur unitaire  $\vec{e}_x$  (figure 5).

Les effets de la pesanteur sont négligeables. L'air est assimilé à un gaz parfait. L'écoulement de l'air autour des pales est supposé stationnaire, parfait, incompressible et à symétrie de révolution autour de l'axe  $x'x$ . On note  $\rho$  la masse volumique de l'air.

La figure 5 représente le tube de courant passant par les extrémités des pales de l'hélice.

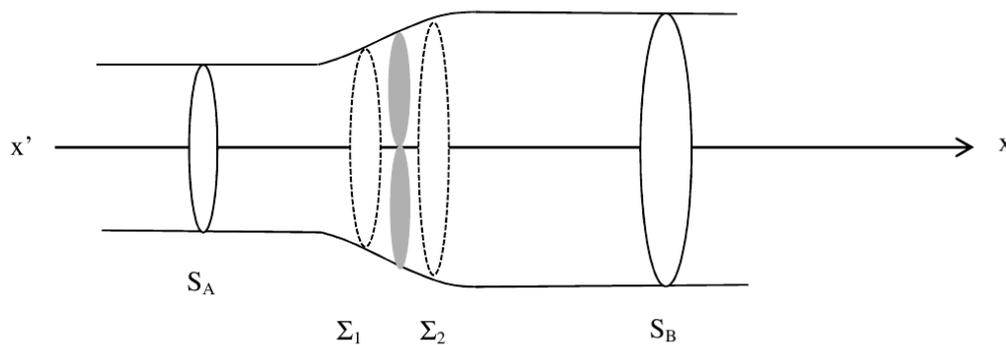


Figure 5 : pales de l'éolienne et tube de courant

La vitesse de l'air est supposée uniforme sur une section perpendiculaire au tube de courant. Elle vaut respectivement :  $\vec{V}_A = V_A \vec{e}_x$ , sur la section  $S_A$  située loin en amont des pales et vaut  $\vec{V}_B = V_B \vec{e}_x$  sur la section  $S_B$  située loin en aval des pales. A grande distance des pales, en amont ou en aval, la pression de l'air est égale à la pression atmosphérique  $P^0$  et la température égale à  $T_0$ .

Les sections  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$ , situées au voisinage immédiat des pales, l'une en amont et l'autre en aval, ont leurs aires quasiment identiques. De sorte que l'on supposera  $\Sigma_1 = \Sigma_2 = S$ , au premier ordre. La pression du fluide est supposée uniforme sur chacune de ces sections et vaut  $P_1$  sur  $\Sigma_1$  et  $P_2$  sur  $\Sigma_2$ .

Au voisinage des pales, il y a continuité de la composante normale, (suivant  $\vec{e}_x$ ), de la vitesse de l'air. Cette composante sera notée :  $\vec{V} = V \vec{e}_x$ . On néglige la dissipation d'énergie par frottement de l'air le long des pales.

- 32) Ecrire deux relations liant tout ou partie de ces grandeurs :  $S_A$ ,  $V_A$ ,  $S_B$ ,  $V_B$ ,  $S$  et  $V$ .
- 33) Exprimer les pressions  $P_1$  et  $P_2$  en fonction de  $P^\circ$ ,  $\rho$ ,  $V_A$ ,  $V_B$  et  $V$ .
- 34) On se propose d'appliquer l'équation (E<sub>2</sub>) sur le fluide contenu dans le tube de courant compris entre les sections voisines  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  situées de part et d'autre des pales de l'éolienne.
- a) On note  $\vec{R}_{12} = R_{12}\vec{e}_x$  : la résultante des forces exercées sur l'air considéré et  $\vec{F}_{\text{pales} \rightarrow \text{air}} = F\vec{e}_x$  : la force exercée par les pales de l'éolienne sur l'air.  
Exprimer  $R_{12}$  en fonction de  $F$ ,  $P_1$ ,  $P_2$  et de  $S$ .
- b) Par application de l'équation (E<sub>2</sub>), en déduire que  $\vec{R}_{12} = \vec{0}$ .
- c) Exprimer alors  $F$  en fonction de  $P_1$ ,  $P_2$  et  $S$ .
- d) Puis exprimer  $F$  en fonction de  $\rho$ ,  $S$ ,  $V_A$  et  $V_B$ .
- 35) On se propose d'appliquer l'équation (E<sub>2</sub>) sur le fluide contenu dans le tube de courant compris entre les sections éloignées  $S_A$  et  $S_B$  situées en amont et en aval des pales de l'éolienne, en admettant que la résultante des forces de pression est nulle.  
Exprimer  $F$  en fonction de  $\rho$ ,  $S$ ,  $V$ ,  $V_A$  et  $V_B$ .
- 36) Déduire de ce qui précède une relation simple entre  $V_A$ ,  $V_B$  et  $V$ .
- 37) On se propose d'appliquer l'équation (E<sub>1</sub>) sur la portion du tube de courant, délimitée par les sections  $S_A$  et  $S_B$ , considérée comme une partie active.  
Quelle(s) hypothèse(s) justifie(nt) le fait que  $P_{th} = 0$  ?  
Quelle(s) hypothèse(s) justifie(nt) le fait que  $h_B - h_A = 0$  ?
- 38) Quelle est la puissance algébrique utile fournie par les pales de l'éolienne au fluide considéré ? En déduire l'expression de la puissance mécanique,  $P_{\text{éol}}$ , fournie par le vent à l'éolienne en fonction de  $\rho$ ,  $S$ ,  $V_A$  et  $V_B$ .
- 39) En posant  $x = \frac{V_B}{V_A}$ , exprimer  $P_{\text{éol}}$  en fonction de  $\rho$ ,  $S$ ,  $V_A$  et  $x$ . Pour quelle valeur de  $x$ ,  $P_{\text{éol}}$  est-elle maximale ? Exprimer cette valeur maximale en fonction de  $\rho$ ,  $S$  et  $V_A$ .
- 40) Application numérique :
- a) Evaluer la puissance maximale récupérable par une éolienne dont les pales ont un diamètre  $D = 60$  m pour une vitesse du vent de  $40 \text{ km.h}^{-1}$ .
- b) Combien faudrait-il d'éolienne de ce format, dans les mêmes conditions météorologiques pour produire la même puissance qu'une tranche de centrale nucléaire de 1 500 MW ?