Barème en bleu , remarques complémentaires en rouge dans le corrigé, rapport de concours à la fin.

Dans ce problème, nous étudions le processus de Galton-Watson qui permet entre autres de modéliser le développement d'une population. Ce processus est par exemple utilisé en biologie ou en physique nucléaire.

Dans tout le problème, on se place dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Si X est une variable aléatoire entière et positive sur cet espace, on notera G_X , série entière de rayon de convergence au moins 1 , la fonction génératrice de X . On rappelle que la fonction génératrice de X est la somme de la série entière :

$$\forall t \in [-1, 1], G_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = n)t^n$$

La fonction génératrice d'une variable aléatoire caractérise sa loi. Plus précisément, si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ et si (a_n) est une suite de réels positifs tels que, pour tout $t \in [0, 1[$, $G_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \mathbb{P}(X = n)$.

1 Etude d'une suite récurrente

Rq perso : le problème était trop long, nous allons **admettre** les résultats de cette partie

et si vous avez le temps y revenir à la fin, il s'agit d'acquis de première année.

On considère une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, 1]$ à valeurs dans $[0, 1]$ telles que f' et f'' soient à valeurs positives. On suppose $f(1) = 1, f'(0) < 1$ et $f''(1) > 0$. On considère de plus la suite récurrente $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. On pose $m = f'(1)$.

I.A

1. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et convergente. On note ℓ sa limite.
2. L'équation $f(x) = x$ admet une plus petite solution. Dans toute la suite, on la notera x_f .
3. Il viendrait alors $\ell = x_f$.

I.B On suppose $m > 1$. On démontrerait $x_f \in [0, 1[$.

I.C On suppose maintenant $m \leq 1$. Alors $x_f = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \neq 1$.

I.D Dans cette question, on suppose $m = 1$.

1. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_n = 1 - u_n$. On montrerait

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\varepsilon_{n+1}} - \frac{1}{\varepsilon_n} \right) = \frac{f''(1)}{2}$$

2. On en déduirait que, quand n tend vers l'infini, $1 - u_n \sim \frac{2}{nf''(1)}$. On aurait utilisé Césaro .

I.E On suppose maintenant $m < 1$ et on pose encore, pour $n \in \mathbb{N}, \varepsilon_n = 1 - u_n$.

1. On montrerait que la série de terme général ε_n est absolument convergente et que celle de terme général $\ln\left(\frac{m^{-(n+1)}\varepsilon_{n+1}}{m^{-n}\varepsilon_n}\right)$ aussi.

2. On en déduirait qu'il existe $c > 0$ tel que, quand n tend vers $+\infty$, $1 - u_n \sim cn^n$.

FIN de la partie admise

II. Formule de Wald

Soient $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires, mutuellement indépendantes, de même loi à valeurs dans $\mathbb{N}$, et T une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendante des précédentes. $(T, X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

On note G_X la fonction génératrice commune à toutes les X_n .

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\omega \in \Omega$, on pose $S_n(\omega) = \sum_{k=1}^n X_k(\omega)$ et $S_0(\omega) = 0$, puis $S(\omega) = S_{T(\omega)}(\omega)$.

II.A On souhaite démontrer l'égalité $G_S = G_T \circ G_X$.

1. Montrer que, si X et Y sont 2 variables aléatoires entières indépendantes, alors $G_{X+Y} = G_X G_Y$.

2. En admettant que, $\forall k \in \mathbb{N}, S_k$ est indépendante de X_{k+1} , prouver que, $\forall k \in \mathbb{N}, G_{S_k} = (G_X)^k$

3. En admettant que, pour tout $n \in \mathbb{N}, T$ et S_n sont indépendantes, montrer que

$$\forall t \in [0, 1[, \forall K \in \mathbb{N}, G_S(t) = \sum_{k=0}^K (G_X(t))^k \mathbb{P}(T = k) + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=K+1}^{\infty} \mathbb{P}(S_k = n) \mathbb{P}(T = k) t^n \right)$$

4. Pour $K \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, 1[$, on pose $R_K = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=K+1}^{\infty} \mathbb{P}(S_k = n) \mathbb{P}(T = k) t^n \right)$. Montrer que

$$0 \leq R_K \leq \frac{1}{1-t} \sum_{k=K+1}^{\infty} \mathbb{P}(T = k)$$

5. Conclure.

II.B En déduire que, si T et les X_n sont d'espérance finie, alors S aussi et $\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(T)\mathbb{E}(X_1)$.

II.C Lors d'une ponte, un insecte pond un nombre aléatoire d'oeufs suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

Ensuite, la probabilité qu'un oeuf donné devienne un nouvel insecte est $\alpha \in]0, 1[$.

1. Rappeler la fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ .

2. En utilisant la relation ci-dessus, déterminer la loi du nombre d'insectes issus de la ponte.

III. Processus de Galton-Watson

Soit μ une loi de probabilité caractérisée par la suite $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de nombre réels entre 0 et 1 telle que $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$. Dire qu'une variable aléatoire X sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ suit la loi μ signifie que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = k) = p_k$.

On suppose que $p_0 + p_1 < 1$ (donc il existe au moins un entier $k \geq 2$ tel que $p_k \neq 0$).

On étudie un individu qui a un certain nombre de fils. Ces fils ont également chacun (indépendamment les uns des autres) un certain nombre de fils et ainsi de suite. Afin de modéliser la situation, on se donne des variables aléatoires $(X_{n,i})_{(n,i) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*}$, indépendantes qui suivent toutes la loi μ , on pose Y_0 la variable certaine égale à 1 et, pour $n \in \mathbb{N}$ et $\omega \in \Omega$,

$$Y_{n+1}(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } Y_n(\omega) = 0 \\ Y_n(\omega) & \\ \sum_{i=1}^{Y_n(\omega)} X_{n,i}(\omega) & \text{si } Y_n(\omega) \neq 0 \end{cases}$$

Y_n représente le nombre d'individus à la génération n .

S'il n'y a pas d'individu à la génération n , il n'y en a pas plus à la génération suivante et sinon, le nombre de fils du i -ème élément de la génération n est égal à $X_{n,i}$.

On dit qu'il y a extinction lorsqu'il existe un entier n tel que $Y_n = 0$.

On note f la fonction génératrice de la loi μ (et donc de chacune des variables $X_{n,i}$) et,

pour $n \in \mathbb{N}$, φ_n la fonction génératrice de la variable aléatoire Y_n .

On a donc en particulier, pour $t \in [0, 1]$, $\varphi_0(t) = t$.

On suppose qu'une variable aléatoire suivant la loi μ a une espérance égale à m et une variance.

III.A Probabilité d'extinction

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_{n+1} = \varphi_n \circ f$.
2. Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}$, l'espérance de Y_n en fonction de m et de n .
3. a) Vérifier que la probabilité d'extinction est égale à la limite de la suite $(\varphi_n(0))_{n \geq 0}$.
b) Vérifier qu'on peut appliquer les résultats de la partie 1 à la suite $(\varphi_n(0))_{n \geq 0}$.
4. Si $m \leq 1$, montrer que la probabilité d'extinction est égale à 1.

On définit alors le temps T d'extinction par

$$\forall \omega \in \Omega, T(\omega) = \begin{cases} \min \{n \in \mathbb{N} / Y_n(\omega) = 0\} & \text{s'il existe } n \in \mathbb{N} \text{ tel que } Y_n(\omega) = 0 \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$$

On admettra que T est une variable aléatoire.

III.B Cas sous-critique $m < 1$

On suppose dans cette question que $m < 1$.

1. Vérifier que T admet une espérance.
2. a) Montrer que, pour tout entier n , $\mathbb{P}(Y_n \geq 1) \leq m^n$.

b) Montrer que $\mathbb{E}(T) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(T > k)$.

- c) En déduire une majoration de $\mathbb{E}(T)$.

III.C Etude de la lignée

Dans cette question, on suppose $m \leq 1$. On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$Z_n = 1 + \sum_{i=1}^n Y_i \text{ et } Z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n$$

On admettra que Z est une variable aléatoire définie sur $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{Y_k = 0\}$.

1. Montrer que Z est définie sur un ensemble de probabilité 1.
2. a) Montrer que, $k \in \mathbb{N}$, $(\mathbb{P}(Z_n \leq k))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite convergente. Déterminer sa limite.
- b) En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(\mathbb{P}(Z_n = k))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $\mathbb{P}(Z = k)$.
- c) Montrer que pour tout $s \in [0, 1[$, tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $K \in \mathbb{N}$,

$$|G_{Z_n}(s) - G_Z(s)| \leq \sum_{k=0}^K |\mathbb{P}(Z_n = k) - \mathbb{P}(Z = k)| + \frac{s^K}{1-s}$$

- d) En déduire que la suite de fonctions (G_{Z_n}) converge simplement vers G_Z sur $[0, 1]$.

3. a) Exprimer G_{Z_1} en fonction de f .

b) On admet que, pour tout n entier naturel supérieur ou égal à 2 et pour tout $s \in [0, 1]$, $G_{Z_n}(s) = sf(G_{Z_{n-1}}(s))$. En déduire que, pour tout $s \in [0, 1[$, $G_Z(s) = sf(G_Z(s))$.

- c) Montrer que Z est d'espérance finie ssi $m < 1$. Calculer l'espérance lorsque c'est le cas.

IV. Un exemple

On suppose dans cette partie que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $p_k = \frac{1}{2^{k+1}}$.

IV.A Exprimer, pour $t \in [0, 1]$, $f(t)$ et calculer m .

IV.B Vérifier que pour tout $t \in [0, 1[$, $\varphi_n(t) \neq 1$. On peut donc poser

$$a_n(t) = \frac{1}{\varphi_n(t) - 1}$$

IV.C Montrer que, pour $t \in [0, 1[$, la suite $(a_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique.

IV.D En déduire que, pour $t \in [0, 1[$ et $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n(t) = \frac{n + (1 - n)t}{1 + n - nt}$.

IV.E Exprimer, pour $n, k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(Y_n = k)$ en fonction de n et k .

IV.F Exprimer, en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité de l'événement $T > n$.

La variable T admet-elle une espérance ?

IV.G Exprimer, pour $s \in [0, 1[$, $G_Z(s)$ en fonction de s . En déduire la loi de Z .

V. Cas surcritique

On suppose dans cette partie $m > 1$.

On étudie un problème légèrement différent : k étant un entier strictement positif fixé, on suppose qu'il y a k individus à la génération 0 ; ensuite tout se passe comme précédemment.

On note W_n le nombre d'individus à la n -ième génération et on définit u_n la probabilité que la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ prenne la valeur k pour la première fois au rang n :

$$u_n = \mathbb{P} \left((W_n = k) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n-1} (W_i \neq k) \right) \right)$$

Pour n et r entiers naturels non nuls, on définit de même $u_n^{(r)}$ comme la probabilité pour que la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ prenne la valeur k pour la r -ième fois au rang n .

V.A Vérifier que les séries $\sum_{n \geq 1} (u_n s^n)$ et $\sum_{n \geq 1} (u_n^{(r)} s^n)$ convergent quand $s \in [-1, 1]$.

On peut donc définir pour $s \in [-1, 1]$,

$$U(s) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n s^n \text{ et } U_r(s) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(r)} s^n$$

V.B 1. Montrer que $\mathbb{P}(W_1 > k) > 0$.

2. Montrer que la probabilité que la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne prenne pas la valeur k est non nulle ; on note u cette probabilité.

On pourra étudier séparément les cas $p_0 = 0$ et $p_0 > 0$.

V.C 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et r un entier naturel supérieur ou égal à 2. Montrer la relation

$$u_n^{(r)} = \sum_{i=1}^{n-1} u_i u_{n-i}^{(r-1)}$$

2. En déduire que, pour tout entier r strictement positif, $U_r = U^r$ ($U^r = U \times \dots \times U$, r fois).

V.D 1. Montrer que la probabilité que la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vaille k une infinité de fois est nulle.

2. Montrer qu'il en est de même pour la suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

V.E Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements tous de probabilité 1.

Montrer que $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{A_n}\right) = 0$. Qu'en déduit-on pour $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right)$?

V.F Soit α la probabilité qu'il y ait extinction et β la probabilité que la suite

(Y_n) diverge vers l'infini. Montrer que $\alpha + \beta = 1$.

Partie I, si tu as "tout" fait.

Éléments de correction

I.A 1. f' étant positive, f croît sur $[0, 1]$. Montrons alors par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$$

- Initialisation : c'est vrai au rang 0 car $u_0 = 0$ et $u_1 = f(0) \in [0, 1]$.

- Hérédité : soit $n \geq 0$ tel que le résultat est vrai jusqu'au rang n .

On a alors $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$ et par croissance de f sur $[0, 1]$,

$$u_{n+2} - u_n = f(u_{n+1}) - f(u_n) \geq 0$$

Mais, comme $[0, 1]$ est stable par f , $u_n, u_{n+1} \in [0, 1]$ donne $u_{n+1} = f(u_n)$, $u_{n+2} = f(u_{n+1}) \in [0, 1]$.

On a ainsi prouvé le résultat au rang $n + 1$.

On a montré que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et qu'elle reste dans $[0, 1]$. Par théorème de limite monotone, la suite converge et de plus (passage à la limite dans une inégalité large)

$$\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \in [0, 1]$$

2. Comme $f(1) = 1$, l'ensemble $A = \{x \in [0, 1] / f(x) = x\}$ est non vide.

Comme il est minoré, il admet une borne inférieure x_f .

Mais $A = (g - Id)(\{0\})$ est fermé (image réciproque par une application continue d'un fermé)

et donc $x_f \in A$ ce qui montre que x_f est un minimum. Il y a donc bien une plus petite solution à l'équation $f(x) = x$.

3. Comme f croît sur $[0, 1]$, on a $f([0, x_f]) = [f(0), f(x_f)] = [0, x_f]$. $u_0 \in [0, x_f]$ et $[0, x_f]$ est stable par f , donc (récurrence simple sur le modèle de la précédente)

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, x_f]$$

Par passage à la limite, $\ell \in [0, x_f]$. f étant continue sur $[0, 1]$, un passage à la limite dans $u_{n+1} = f(u_n)$ donne de plus $f(\ell) = \ell$. Enfin, par minimalité, x_f est le seul point fixe de f dans $[0, x_f]$. On a donc

$$x_f = \ell$$

I.B Posons $g(x) = f(x) - x$. g est de classe C^1 sur $[0, 1]$ et $g'(x) = f'(x) - 1$. Si $m > 1$ alors $g'(1) > 0$ et g est localement strictement croissante au voisinage de 1. Comme $g(1) = f(1) - 1 = 0$, il existe donc $a \in [0, 1[$ tel que $g(a) < 0$. Enfin, $g(0) = f(0) \geq 0$ et par théorème des valeurs intermédiaires, g s'annule sur $[0, a] \subset [0, 1[$. On en déduit que $x_f \in [0, a]$ et donc que

$$x_f \in [0, 1[$$

I.C Notons toujours $g(x) = f(x) - x$. On a $g \in C^2([0, 1])$ et $g'(x) = f'(x) - 1$, $g''(x) = f''(x) \geq 0$; comme $g''(1) = f''(1) > 0$, g'' (qui est continue) est même strictement positive sur un intervalle

$[a, 1[.g'$ est donc croissante sur $[0, 1]$ et strictement croissante sur $[a, 1]$. Comme $g'(1) = m - 1 \leq 0$, g' est négative sur $[0, 1]$ et même strictement négative sur $[a, 1[.g$ est donc décroissante sur $[0, 1]$ et même strictement décroissante sur $[a, 1]$. En particulier, $\forall x \in [a, 1[, g(x) > 0$ et $\forall x \in [0, a], g(x) \geq g(a) > 0.g$ ne s'annule donc pas sur $[0, 1[$ et ceci impose

$$x_f = 1$$

Sur $[a, 1[, f''$ est strictement positive et f' est donc strictement croissante sur $[a, 1]$. Ainsi, $\forall x \in [a, 1[, f'(x) \leq m$. Si, par l'absurde, m était nul alors f' serait nulle sur $[a, 1]$. Comme f' est positive et croissante sur $[0, 1]$ ($f'' \geq 0$) on aurait donc f' nulle sur $[0, 1]$ ce qui contredit $f''(1) > 0$. On a donc $f'(1) > 0$ et f est strictement croissante au voisinage de 1. Comme elle est croissante sur $[0, 1]$, elle ne prend finalement la valeur 1 qu'en 1. Si, par l'absurde, on avait $u_n = 1$, on aurait $f(u_{n-1}) = 1$ et donc $u_{n-1} = 1$. Par une récurrence descendante, on obtiendrait $u_0 = 1$, ce qui est faux. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, 1[$$

I.D 1. On a $u_n = 1 - \varepsilon_n$ et $\varepsilon_n \rightarrow 0$. Par formule de Taylor-Young,

$$u_{n+1} = f(u_n) = f(1 - \varepsilon_n) = f(1) - \varepsilon_n f'(1) + \frac{\varepsilon_n^2}{2} f''(1) + o(\varepsilon_n^2) = 1 - \varepsilon_n + \frac{\varepsilon_n^2}{2} f''(1) + o(\varepsilon_n^2)$$

On en déduit que

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n - \frac{\varepsilon_n^2}{2} f''(1) + o(\varepsilon_n^2) = \varepsilon_n \left(1 - \frac{\varepsilon_n}{2} f''(1) + o(\varepsilon_n) \right)$$

On passe à l'inverse (possible puisque la suite (ε_n) ne s'annule pas) et en utilisant $\frac{1}{1-u} = 1 + u + o_0(u)$ on trouve

$$\frac{1}{\varepsilon_{n+1}} = \frac{1}{\varepsilon_n} \left(1 + \frac{\varepsilon_n}{2} f''(1) + o(\varepsilon_n) \right)$$

Il en résulte que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\varepsilon_{n+1}} - \frac{1}{\varepsilon_n} \right) = \frac{f''(1)}{2}$$

2. D'après le théorème de Césaro,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{\varepsilon_{k+1}} - \frac{1}{\varepsilon_k} \right) = \frac{f''(1)}{2}$$

Dans la somme, les termes se télescopent et ce qui précède s'écrit

$$\frac{1}{n} \left(\frac{1}{\varepsilon_n} - \frac{1}{\varepsilon_0} \right) = \frac{f''(1)}{2} + o(1)$$

$\frac{1}{n\varepsilon_0}$ étant de limite nulle est $o(1)$ et ce qui précède s'écrit aussi

$$\frac{1}{n\varepsilon_n} = \frac{f''(1)}{2} + o(1)$$

ou encore (puisque $f''(1) \neq 0$) $n\varepsilon_n \sim \frac{f''(1)}{2}$. On peut passer à l'inverse dans les équivalent et multiplier les équivalents. On a ainsi

$$1 - u_n = \varepsilon \sim \frac{2}{nf''(1)}$$

I.E 1. Le même calcul que ci-dessus donne

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n \left(m - \frac{\varepsilon_n}{2} f''(1) + o(\varepsilon_n) \right)$$

On en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|\varepsilon_{n+1}|}{|\varepsilon_n|} = |m| = m \in [0, 1[$$

Par règle de D'Alembert, $\sum (\varepsilon_n)$ est donc absolument convergente.

Notons que le cas $m = 0$ est impossible d'après le raisonnement de la question I.C. On peut donc diviser par $m > 0$. En reprenant l'identité ci-dessus, on a

$$\frac{\varepsilon_{n+1}}{m\varepsilon_n} = 1 - \frac{\varepsilon_n}{2m} f''(1) + o(\varepsilon_n)$$

On en déduit que

$$\ln \left(\frac{\varepsilon_{n+1}}{m\varepsilon_n} \right) = O(\varepsilon_n)$$

qui est le terme général d'une absolument convergente. On a montré que

$$\ln \left(\frac{\varepsilon_{n+1}}{m\varepsilon_n} \right) = \ln \left(\frac{m^{-(n+1)} \varepsilon_{n+1}}{m^{-n} \varepsilon_n} \right)$$

est le terme général d'une série absolument convergente.

2. Notons L la somme de la série de la question précédente. On a donc

$$\sum_{k=0}^{n-1} \ln \left(\frac{\varepsilon_{k+1}}{m\varepsilon_k} \right) = L + o(1)$$

Avec les propriétés de morphisme du logarithme, les termes se télescopent et on obtient

$$\ln(\varepsilon_n) - \ln(\varepsilon_0) - n \ln(m) = L + o(1)$$

ou encore

$$\varepsilon_n = m^n e^L \varepsilon_0 e^{o(1)}$$

Comme $e^L \varepsilon_0 > 0$ (ce qui importe est la non nullité) on a finalement

$$1 - u_n = \varepsilon_n \sim m^n \quad \text{avec } c = e^L \varepsilon_0 > 0$$

II. Formule de Wald

II.A 1. Les variables X et Y étant indépendantes, pour toute fonction f les variables $f(X)$ et $f(Y)$ le sont et on a donc, sous réserve que les espérances existent $\mathbb{E}(f(X)f(Y)) = \mathbb{E}(f(X))\mathbb{E}(f(Y))$. Avec la fonction $x \in \mathbb{N} \mapsto t^x$ (pour un réel quelconque t fixé dans $[-1, 1]$), on obtient (le cours nous indique que les espérances existent toutes) **1.5 pts sur [-1,1]**

$$G_{X+Y}(t) = \mathbb{E}(t^X t^Y) = \mathbb{E}(t^X) \mathbb{E}(t^Y) = G_X(t)G_Y(t)$$

2. Montrons par récurrence que la propriété **1.5 pts**

$$G_{S_k} = (G_X)^k$$

est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

- Initialisation : l'hypothèse est immédiatement vraie au rang 1.

- Hérité : soit $k \geq 1$ tel que l'hypothèse soit vraie aux rangs $1, \dots, k$.

D'après la question précédente (et le résultat d'indépendance admis)

la fonction génératrice de $X_1 + \dots + X_k + X_{k+1} = S_k + X_{k+1}$ est $G_{S_k}G_X$.

En utilisant l'hypothèse de récurrence, elle vaut $(G_X)^{k+1}$.

La propriété est aussi vraie au rang 0 puisque $G_{S_0} = 1$ (S_0 étant constante égale à 0)

et que $(G_X)^0 = 1$.

3. $(T = k)_{k \in \mathbb{N}}$ étant un système complet d'événements, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(S = n) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}((S = n) \cap (T = k))$$

On en déduit que **6 pts SSI ...**

$$\forall t \in [-1, 1], G_S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S = n)t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}((S = n) \cap (T = k))t^n \right)$$

Comme on a l'égalité des événements $(S = n) \cap (T = k)$ et $(S_k = n) \cap (T = k)$ **être clair...**

et comme S_k et T sont admis indépendants, on a alors

$$\forall t \in [-1, 1], G_S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_k = n) \mathbb{P}(T = k)t^n \right)$$

On fixe $K \in \mathbb{N}$. On peut découper la somme intérieure en deux :

$$\forall t \in [-1, 1], G_S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^K \mathbb{P}(S_k = n) \mathbb{P}(T = k)t^n + \sum_{k=K+1}^{\infty} \mathbb{P}(S_k = n) \mathbb{P}(T = k)t^n \right)$$

Pour écrire $\sum_{n=0}^{\infty} (U_n + V_n) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n + \sum_{n=0}^{\infty} V_n$, il nous suffit

(sachant que le membre de gauche existe) de montrer que l'un des deux termes du membre de droite existe (l'autre existera alors fatalement).

On écrit (ici on a des sommes finies et donc pas de problème) **Rq : K fixé**

$$\sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^K \mathbb{P}(S_k = n) \mathbb{P}(T = k) t^n = \sum_{k=0}^K \left(\sum_{n=0}^N \mathbb{P}(S_k = n) t^n \right) \mathbb{P}(T = k)$$

$\sum_{n=0}^N \mathbb{P}(S_k = n) t^n$ est le terme général d'une suite convergente de limite $G_S(t) = G_X(t)^k$.

On a donc convergence ci-dessus (somme d'un nombre constant **K** de suites convergentes) et

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^K \mathbb{P}(S_k = n) \mathbb{P}(T = k) t^n = \sum_{k=0}^K G_X(t)^k \mathbb{P}(T = k)$$

Avec tous ces arguments, on peut finalement écrire **$N \rightarrow \infty$**

$$\forall t \in [-1, 1], G_S(t) = \sum_{k=0}^K G_X(t)^k \mathbb{P}(T = k) + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=K+1}^{\infty} \mathbb{P}(S_k = n) \mathbb{P}(T = k) t^n \right)$$

Remarque : la formule est valable pour $t \in [-1, 1]$ et pas seulement $t \in [0, 1]$.

4. On prend $t \in [0, 1]$ **donc t fixé** et $K \in \mathbb{N}$. On a **1.5 pts**

$$\forall k \geq K + 1, \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \mathbb{P}(S_k = n) \mathbb{P}(T = k) t^n \leq \mathbb{P}(T = k) t^n$$

Comme $\sum (\mathbb{P}(T = k))$ cv (série positive de somme 1) on peut sommer pour $k \geq K$ et avoir

rq tout > 0

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \sum_{k=K+1}^{\infty} \mathbb{P}(S_k = n) \mathbb{P}(T = k) t^n \leq \left(\sum_{k=K+1}^{\infty} \mathbb{P}(T = k) \right) t^n$$

Comme $t \in [0, 1[$, $\sum (t^n)$ converge et sa somme vaut $\frac{1}{1-t}$. On en déduit que **K fixé ...**

$$0 \leq R_K \leq \frac{1}{1-t} \sum_{k=K+1}^{\infty} \mathbb{P}(T = k)$$

5. A $t \in [0, 1[$ fixé, la question précédente montre que $R_K \rightarrow 0$ quand $K \rightarrow +\infty$. **1 pts**

reste de série convergente

On peut ainsi faire tendre K vers $+\infty$ dans II.A.3 pour obtenir **1 pts**

$$G_S(t) = \sum_{k=0}^{\infty} G_X(t)^k \mathbb{P}(T = k) = G_T(G_X(t)) = G_T \circ G_X(t)$$

Ceci n'est prouvé que pour $t \in [0, 1]$ mais le préambule indique que cela suffit pour conclure que

Rq en $t = 1$ il suffit de remplacer.

$$G_S = G_T \circ G_X$$

II.B Si Y est une variable d'espérance finie, on a $\mathbb{E}(Y) = G'_Y(1)$. **1 pts, cours...**

Ici, en supposant que les espérances existent, on a (puisque $G_X(1) = 1$) **1.5 pts**

$$\mathbb{E}(S) = G'_S(1) = G'_T(G_X(1)) \cdot G'_X(1) = \mathbb{E}(T)\mathbb{E}(X_1)$$

II.C

1. Si $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ alors pour tout n , $\mathbb{P}[Y = n] = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$ et **1 pts cours**

$$\forall t \in [-1, 1], G_Y(t) = e^{-\lambda} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} = e^{-\lambda} e^{\lambda t}$$

2. Ici, $T \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $\forall i, X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(\alpha)$. **S 2.5 pts B comme Bernoulli**

est alors le nombre d'insectes issus de la ponte. On a **connaître génératrice Bernoulli**

$$\forall t \in [-1, 1], G_S(t) = G_T(G_X(t)) = G_T(1 - \alpha + \alpha t) = e^{-\lambda \alpha} e^{\lambda \alpha t}$$

et on conclut que

$$S \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda \alpha)$$

III. Processus de Galton-Watson

III.A 1. On fixe $n \in \mathbb{N}$. On est exactement dans la situation de la partie précédente. Ici, $T = Y_n$ et les X_i sont les $X_{n,i}$. Y_{n+1} correspond alors à S et II.A donne (toutes les hypothèses d'indépendance étant vérifiées) **1.5 pts pour prendre les points, il faut identifier les objets du II...**

$$\varphi_{n+1} = G_{Y_{n+1}} = G_{Y_n} \circ G_{X_{n,1}} = \varphi_n \circ f$$

2. De même, II.B donne

$$\mathbb{E}(Y_{n+1}) = \mathbb{E}(Y_n) \mathbb{E}(f)$$

et (on a une suite géométrique) **2 pts $Y_0 = 1 \Rightarrow \mathbb{E}(Y_0) = 1$.**

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{E}(Y_n) = \mathbb{E}(f)^n \mathbb{E}(Y_0) = m^n$$

3. L'événement E : "il y a extinction" est égal à la réunion des événements ($Y_n = 0$)

(il y a extinction si la population fini par être nulle) : **1 pts**

$$E = \bigcup_{n=0}^{\infty} (Y_n = 0)$$

Les événements $(Y_n = 0)$ étant emboîtés, par la continuité croissante on peut en déduire que **2 pts**

On est en proba, pas en suites de première année!

$$\mathbb{P}(E) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(Y_n = 0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n(0)$$

Avec III.A.1 et $\varphi_0 = \text{Id}$, une récurrence immédiate montre que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \varphi_n = f^{(n)}$$

où $f^{(n)}$ désigne l'itérée n fois de f pour "o" (avec la convention $f^{(0)} = \text{Id}$). En particulier

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \varphi_{n+1}(0) = f\left(f^{(n)}(0)\right) = f(\varphi_n(0))$$

et $(\varphi_n(0))_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence de la partie I.

Il nous reste à montrer que la fonction f vérifie les hypothèses de cette partie.

- f est C^2 sur $[0, 1]$ puisque l'on a supposé que la loi μ possède une espérance et une variance.

De plus, f' et f'' sont à valeurs positives puisque **3 pts Pas si simple à valider**.

- f est définie de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ $\left(\forall t \in [0, 1], 0 \leq f(t) = \sum_{k \geq 0} p_k t^k \leq \sum_{k \geq 0} p_k = 1 \right)$.

$$- f(1) = \sum_{k \geq 0} p_k = 1.$$

$$- f'(0) = p_1 \leq p_0 + p_1 < 1.$$

$$- f''(1) = \sum_{k \geq 0} (k+1)(k+2)p_{k+2} > 0 \text{ car l'un des } p_{k+2} \text{ est } > 0.$$

4. Si $m \leq 1$ alors $\varphi_n(0) \rightarrow 1$ d'après I.C. La population s'éteint donc presque sûrement.

III.B

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $T(\omega) = k$ alors $Y_{k-1}(\omega) \neq 0$ et $Y_k(\omega) = 0$.

En particulier $(T = k) \subset (Y_{k-1} \neq 0)$ et donc **2.5 pts**

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \mathbb{P}(T = k) \leq \mathbb{P}(Y_{k-1} \neq 0) = 1 - \mathbb{P}(Y_{k-1} = 0) = 1 - \varphi_{k-1}(0)$$

D'après la question I.E (on est bien dans le cas $m < 1$), $k(1 - \varphi_{k-1}(0)) \sim ck m^{k-1}$ est le terme général d'une série convergente (par comparaison aux séries de Riemann puisque ce terme est $o(1/k^2)$ puisque $m \in [0, 1]$). A fortiori, $k\mathbb{P}(T = k)$ est aussi le terme général d'une série convergente (comparaison de séries positives) et $\mathbb{E}(T)$ existe (ici, absolue convergence et convergence sont équivalentes).

2. Pour tout entier n , **1 pts**

$$\mathbb{P}(Y_n \geq 1) = \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(Y_n = k) \leq \sum_{k \geq 1} k \mathbb{P}(Y_n = k) = \mathbb{E}(Y_n) = m^n$$

On est dans le cas où la population s'éteint presque sûrement et on a donc $\mathbb{P}(T = -1) = 0$. Ainsi

$$\mathbb{E}(T) = \sum_{k \geq 0} k \mathbb{P}(T = k) = \sum_{k \geq 0} k (\mathbb{P}(T > k - 1) - \mathbb{P}(T > k))$$

Pour manipuler les sommes, revenons à des sommes partielles. On a **3 pts**

Presque antirépartition (pas au programme), l'énoncé demandait de redémontrer.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n k (\mathbb{P}(T > k - 1) - \mathbb{P}(T > k)) &= \sum_{k=0}^n k \mathbb{P}(T > k - 1) - \sum_{k=0}^n k \mathbb{P}(T > k) \\ &= \sum_{k=-1}^n (k + 1) \mathbb{P}(T > k) - \sum_{k=0}^n k \mathbb{P}(T > k) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(T > k) - n \mathbb{P}(T > n) \end{aligned}$$

Comme $(T > n) = (Y_n > 1)$, on a $0 \leq n \mathbb{P}(T > n) \leq n m^n \rightarrow 0$

en cours la fin était différente.

(car $m \in [0, 1[$ et par croissances comparées). Un passage à la limite donne donc

$$\mathbb{E}(T) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(T > k)$$

On utilise à nouveau $\mathbb{P}(T > k) = \mathbb{P}(Y_k \geq 1) \leq m^k$ pour en déduire que **1.5 pts**

$$\mathbb{E}(T) \leq \sum_{k=0}^{\infty} m^k = \frac{1}{1 - m}$$

III.C

1. Comme on l'a dit en III.A.3, l'événement $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} (Y_k = 0)$ est l'événement "la population finit par s'éteindre". Dans le cas $m \leq 1$, cet ensemble est de probabilité 1 (question III.1.4). **1 pts**

2. a. Fixons $k \in \mathbb{N}$. Comme $Z_{n+1} = Z_n + Y_n \geq Z_n$, $(Z_{n+1} \leq k) \subset (Z_n \leq k)$ et la suite $(\mathbb{P}(Z_n \leq k))_{k \geq 0}$ est donc décroissante. Elle est minorée par 0 et converge donc d'après le théorème de limite monotone. D'après la propriété de continuité décroissante, on a **2+1 pts**

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(Z_n \leq k) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} (Z_n \leq k)\right)$$

Si $\omega \in \bigcap_{n=1}^{\infty} (Z_n \leq k)$ alors $\forall n, Z_n(\omega) \leq k$ et donc $Z(\omega) \leq k$ (passage à la limite).

Réciproquement, si $Z(\omega) \leq k$ alors $\forall n, Z_n(\omega) \leq k$

(la suite croissante $(Z_n(\omega))_n$ est inférieure à sa limite) et donc $\omega \in \bigcap_{n=1}^{\infty} (Z_n \leq k)$.

Finalement, 2 pts

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(Z_n \leq k) = \mathbb{P}(Z \leq k)$$

b. On a $\mathbb{P}(Z_n = k) = \mathbb{P}(Z_n \leq k) - \mathbb{P}(Z_n \leq k-1)$ et donc (on passe à la limite) 1.5 pts

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(Z_n = k) = \mathbb{P}(Z \leq k) - \mathbb{P}(Z \leq k-1) = \mathbb{P}(Z = k)$$

c. Fixons $K \in \mathbb{N}$ et $s \in [0, 1[$. On a (toutes les séries convergent absolument)

Je veux de la clarté.

$$\begin{aligned} |G_{Z_n}(s) - G_Z(s)| &= \left| \sum_{k \geq K} (\mathbb{P}(Z_n = k) - \mathbb{P}(Z = k)) s^k \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} |\mathbb{P}(Z_n = k) - \mathbb{P}(Z = k)| s^k \end{aligned}$$

On découpe la somme. Pour les indices $\leq K$, on majore s^k par 1 (la somme est finie et cela ne pose pas de problème d'existence). Pour $k \geq K+1$, on remarque que $|\mathbb{P}(Z_n = k) - \mathbb{P}(Z = k)| \leq 1$ (car les deux termes sont entre 0 et 1 et leur différence est donc entre -1 et 1).

Comme $\sum (s^k)$ converge, on n'a à nouveau pas de problème d'existence. On obtient 2 pts

$$\begin{aligned} |G_{Z_n}(s) - G_Z(s)| &\leq \sum_{k=0}^K |\mathbb{P}(Z_n = k) - \mathbb{P}(Z = k)| + \sum_{k \geq K+1} s^k \\ &= \sum_{k=0}^K |\mathbb{P}(Z_n = k) - \mathbb{P}(Z = k)| + \frac{s^{K+1}}{1-s} \end{aligned}$$

Remarque : c'est un poil mieux que dans l'énoncé puisque $s \in [0, 1[$.

d. Soit $s \in [0, 1[$. Fixons $\varepsilon > 0$; comme $\frac{s^p}{1-s} \rightarrow 0$ quand $p \rightarrow +\infty$, on peut trouver un rang K pour lequel ce terme est $\leq \varepsilon/2$. K étant fixé,

$\sum_{k=0}^K |\mathbb{P}(Z_n = k) - \mathbb{P}(Z = k)| \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$ (somme d'un nombre constant de suites de limite nulle) et il existe un rang n_0 à partir duquel ce terme est aussi $\leq \varepsilon/2$. On a ainsi 3 pts

Ici l'ordre d'organisation des variables est fondamentale!!!

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 / \forall n \geq n_0, |G_{Z_n}(s) - G_Z(s)| \leq \varepsilon$$

ce qui signifie que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} G_{Z_n}(s) = G_Z(s)$$

Ceci reste vrai pour $s = 1$ (la suite est constante égale à 1).

On a finalement (G_{Z_n}) qui converge simplement sur $[0, 1]$ vers G_Z .

3. a. On a $Z_1 = 1 + Y_1$ et comme une variable constante est indépendante de toute autre variable, la question II.A.1 indique que **2 pts**

$$G_{Z_1}(s) = G_1(s)G_{Y_1}(s) = sf(s)$$

b. Avec le résultat admis et III.C.2 on a (f étant continue)**1 pts**

$$\forall s \in [0, 1], G_Z(s) = \lim_{n \rightarrow +\infty} G_{Z_n}(s) = sf(G_Z(s))$$

c. Le cours nous indique que Z est d'espérance finie si et seulement si G_Z est dérivable en 1 et qu'alors $\mathbb{E}(Z) = G'_Z(1)$. On sait qu'une fonction génératrice est dérivable sur $[0, 1[$. La question précédente donne

$$\forall s \in [0, 1[, G'_Z(s) = f(G_Z(s)) + G'_Z(s)f'(G_Z(s))$$

ce que l'on peut écrire **4 pts**

$$\forall s \in [0, 1[, (1 - f'(G_Z(s))) G'_Z(s) = f(G_Z(s))$$

Quand $s \rightarrow 1$, alors $(1 - f'(G_Z(s))) \rightarrow 1 - m$ et $f(G_Z(s)) \rightarrow f(1) = 1$

(les fonctions génératrices sont continues sur $[-1, 1]$).

Si $m \in [0, 1[$, on a donc $G'_Z(s) \rightarrow \frac{1}{1-m}$ quand $s \rightarrow 1$. D'après le théorème de limite de la dérivée (corollaire des accroissements finis et utilisable avec G_Z qui est continue sur $[0, 1]$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1[$), G_Z est dérivable en 1 et $G'_Z(1) = \frac{1}{1-m}$.

Si $m = 1$, on a G'_Z de limite infinie en 1 et le même théorème indique que G_Z est non dérivable en 1.

Finalement, $\mathbb{E}(Z) < +\infty$ si et seulement si $m < 1$ et dans ce cas, $\mathbb{E}(Z) = \frac{1}{1-m}$.

IV. Un exemple

Notons que l'énoncé est cohérent puisque les p_k vérifient les bonnes hypothèses (positifs, de somme 1 et avec un terme au moins d'indice > 1 qui est non nul).

IV.A On a **1 pts**

$$\forall t \in [0, 1], f(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{2^{k+1}} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{t}{2}} = \frac{1}{2-t}$$

f est dérivable sur $[0, 1]$ avec $f'(t) = \frac{1}{(2-t)^2}$. En particulier, **1.5 pts**

$$m = f'(1) = 1$$

IV.B f est croissante sur $[0, 1[$ (dérivée positive) et donc $f([0, 1]) = [f(0), f(1)[= [0, 1[$.

Soit $t \in [0, 1[$; comme $\varphi_0(t) = t \in [0, 1[$ et $\varphi_{n+1}(t) = f(\varphi_n(t))$, une récurrence immédiate donne
2 pts

$$\forall t \in [0, 1[, \forall n \in \mathbb{N}, \varphi_n(t) \in [0, 1[$$

IV.C Le calcul donne 1 pts

$$a_{n+1}(t) = \frac{1}{f(\varphi_n(t)) - 1} = \frac{2 - \varphi_n(t)}{-1 + \varphi_n(t)} = a_n(t) - 1$$

IV.D Il en découle que $a_n(t) = a_0(t) - n = \frac{1}{t-1} - n = \frac{n+1-nt}{t-1}$.

Comme $\varphi_n(t) = 1 + \frac{1}{a_n(t)}$, on trouve que 1 pts

$$\varphi_n(t) = \frac{n + (1-n)t}{1 + n - nt}$$

IV.E $\mathbb{P}(Y_n = k)$ est le coefficient devant t^k dans le DSE de $\varphi_n(t)$.

Or, pour $n \geq 1$, on a (à l'aide d'une division euclidienne non explicitée) 3 pts

On peut aussi passer bloc de Taylor.

$$\varphi_n(t) = \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n} \frac{1}{1+n-nt} = \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n(1+n)} \frac{1}{1 - \frac{n}{1+n}t}$$

et donc (développement de $\frac{1}{1-u}$ et regroupement des termes constants)

$$\varphi_n(t) = \frac{n}{1+n} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n^{k-1}}{(1+n)^{k+1}} t^k$$

On a ainsi prouvé que (la loi est caractérisée par...) 1 pts

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(Y_n = 0) = \frac{n}{1+n} \text{ et } \forall k \geq 1, \mathbb{P}(Y_n = k) = \frac{n^{k-1}}{(1+n)^{k+1}}$$

Comme $Y_0 = 1$, la formule reste valable dans le cas $n = 0$.

IV.F On a $(T > n) = (Y_n \geq 1)$ et donc 1 pts

$$\mathbb{P}(T > n) = \mathbb{P}(Y_n \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(Y_n = 0) = 1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

On peut reprendre le calcul de III.B.2 pour obtenir 2.5 pts

$$\sum_{k=0}^n k \mathbb{P}(T = k) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(T > k) - n \mathbb{P}(T > n)$$

$n \mathbb{P}(T > n) \rightarrow 1$ mais $\sum (\mathbb{P}(T > k))$ diverge (série de Riemann).

Ainsi, T n'admet pas d'espérance finie (la série ne converge pas donc ne converge pas absolument ; notons qu'ici les notions coincident puisque les termes sont positifs).

IV.G III.C.3 donne une relation vérifiée par $x = G_Z(s) : x = \frac{s}{2-x}$. On trouve donc (résolution d'une équation de degré 2) que $G_Z(s)$ vaut $1 \pm \sqrt{1-s}$. Mais $G_Z(s) \leq 1$ quand $s \in [0, 1[$ et donc 4 pts

$$\forall s \in [0, 1[, 1 - \sqrt{1-s}$$

Pour avoir la loi de Z , on effectue un DSE de cette fct et on identifie le coeff de s^k comme $\mathbb{P}(Z = k)$:

$$\mathbb{P}(Z = 0) = 0 \text{ et } \forall k \geq 1, \mathbb{P}(Z = k) = \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} \left(\frac{1}{2} - i\right) = \frac{1}{2^k k!} \prod_{i=1}^{k-1} (2i - 1) = \frac{(2k)!}{(2^k k!)^2}$$

V. Cas surcritique

V.A Les événements dont les $u_n^{(r)}$ sont les probabilités sont incompatibles (on ne peut voir arriver un événement pour la première fois à deux instants différents). $\sum (u_n^{(r)})$ est donc convergente (de somme ≤ 1). Pour tout $s \in [-1, 1]$, on a donc $|u_n^{(r)} s^n| \leq u_n^{(r)}$ qui est terme général d'une série absolument convergente (et a fortiori convergente).

V.B 1. $W_1 = X_{0,1} + \dots + X_{0,k}$. Si $W_1 \leq k$ alors il existe j tel que $X_{0,j} \leq 1$ c'est à dire

$$(W_1 \leq k) \subset \bigcup_{j=1}^k (X_{0,j} \leq 1)$$

En passant au complémentaire

$$\bigcap_{j=1}^k (X_{0,j} > 1) \subset (W_1 > k)$$

En passant aux probabilités, et comme les $X_{0,i}$ sont indépendantes,

$$(1 - p_0 - p_1)^k \leq \mathbb{P}(W_1 > k)$$

et donc

$$\mathbb{P}(W_1 > k) \geq (1 - p_0 - p_1)^k > 0$$

puisque $p_0 + p_1 \in [0, 1[$.

V.B.2) Pour tout entier naturel n , notons ψ_n la fonction génératrice de W_n . Exactement comme pour les φ_n , et les Y_n , on a : $\forall n \in \mathbb{N}; \psi_{n+1} = \psi_n \circ f$ sauf ici, $\psi_0(t) = t^k$. Alors par récurrence sur n , on montre facilement que : $\forall n \in \mathbb{N}; \forall t \in [0, 1]; \psi_n(t) = \varphi_n(t)^k$.

On veut montrer ici que $P \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}^+} (W_n \neq k) \right) > 0$.

En tenant compte que les W_n sont indépendantes, et de la suite décroissante d'événements $\left(\bigcap_{i=1}^n (W_j \neq k)\right)$, il s'agit de montrer que : $\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\bigcap_{j=1}^n (W_j \neq k) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^n P(W_j \neq k) > 0$.

Premier cas : si $p_0 = 0$

$$\varphi_1(t) = f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n t^n \text{ et le terme en } t^k \text{ dans } \psi_1(t) \text{ est } p_1^k t^k.$$

$$\varphi_2(t) = f \circ f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n f(t)^n \text{ et donc le terme en } t^k \text{ dans } \psi_2(t) \text{ est } p_1^{2k} t^k.$$

Ainsi de suite, on voit clairement que le terme en t^k dans $\psi_n(t)$ est $p_1^{nk} t^k$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*; P(W_n = k) = p_1^{nk} \text{ et } P(W_n \neq k) = 1 - p_1^{nk}$$

La série $\left(\sum_{n=1}^{\infty} p_1^{nk}\right)$ est convergente à termes positifs, et $\ln(1 - p_1^{nk}) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -p_1^{nk}$,

alors la série $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 - p_1^{nk})\right)$ cv. Soit L sa somme : $u = e^L = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^n P(W_j \neq k) > 0$.

Deuxième cas : si $p_0 > 0$

Ici, on va changer d'espace probabilisé. On pose : $\Omega' = \bigcap_{i=1}^k (X_{0,i} \geq 2)$ qui vérifie :

$$P \left(\bigcap_{i=1}^k (X_{0,i} \geq 2) \right) = (1 - p_0 - p_1)^k > 0. \text{ On pose aussi : } A' = \{M \cap \Omega'; M \in \mathbf{A}\} \text{ et } P' = P_{\Omega'}.$$

Pour toute variable aléatoire X définie sur Ω , on note X' sa restriction à Ω' .

Dans l'espace (Ω', A', P') , les variables aléatoires W'_n et les $X'_{n,i}$ vérifient les mêmes hypothèses que les variables aléatoires W_n et les $X_{n,i}$ sur $(\Omega, \mathbf{A}, P)$, avec $P'(X'_{n,i} = 0) = P'(X'_{0,1} = 0) = 0$.

(Les $X'_{n,i}$ sont bien à valeurs dans $\mathbb{N}$, et suivent la même loi).

On s'est alors ramené au premier cas : D'où $P' \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}^+} (W'_n \neq k) \right) > 0$.

C'est à dire $\frac{P \left(\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} (W_n \neq k) \right) \cap \Omega' \right)}{P(\Omega')} > 0$, donc $P \left(\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} (W_n \neq k) \right) \cap \Omega' \right) > 0$.

Mais $\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} (W_n \neq k) \right) \cap \Omega' \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} (W_n \neq k)$, d'où $P \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} (W_n \neq k) \right) > 0$.

V.C

1. On se donne $n \in \mathbb{N}^*$ et $r \geq 2$.

Soit $\omega \in \Omega$ pour lequel la suite (W_p) prend la valeur k pour la r -ième fois exactement au rang n .

Il existe un premier rang i où $W_i = k$ (et $i \leq n - r + 1$). A partir du moment où l'on retrouve une population de taille k , l'expérience reprend alors comme initialement de façon indépendante

de ce qui s'est passé lors des étapes précédentes. On cherche alors les événement donnant pour la $r - 1$ -ième fois une population égale à k au bout de $n - i$ générations.

On partitionne ainsi l'événement dont on cherche la proba en $n - r - 1$ ss-ensembles disjoints.

La probabilité du i -ème de ces sous-ensemble est $u_i u_{n-i}^{(r-1)}$.

On trouve finalement que

$$u_n^{(r)} = \sum_{i=1}^{n-r+1} u_i u_{n-i}^{(r-1)}$$

Comme $u_a^{(b)}$ est nul si $a < b$ (on ne peut avoir b succès en strictement moins de b épreuves),

on peut ajouter les termes d'indices $n - r + 2, \dots, n - 1$ qui sont nuls et écrire que

$$u_n^{(r)} = \sum_{i=1}^{n-1} u_i u_{n-i}^{(r-1)}$$

2. En posant $u_0^{(r)} = 0$ pour tout $r \geq 1$ (et en particulier $u_0 = 0$), la relation précédente d'écrit aussi

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n^{(r)} = \sum_{i=0}^n u_i u_{n-i}^{(r-1)}$$

La suite $u^{(r)}$ est alors le produit de Cauchy des suites u et u^{r-1} .

Comme toutes les séries entières sont de rayon de convergence $\geq 1 > 0$, le cours nous indique que

$$\forall s \in]-1, 1[, \sum_{n \geq 0} u_n^{(r)} s^n = \left(\sum_{n \geq 0} u_n s^n \right) \left(\sum_{n \geq 0} u_n^{(r-1)} s^n \right)$$

Comme les termes d'indice 0 sont nuls, on trouve finalement

$$\forall s \in]-1, 1[, U_r(s) = U(s)U_{r-1}(s)$$

et ceci reste vrai pour $s = \pm 1$ par continuité des fcts sur $[-1, 1]$. Une récurrence simple donne alors

$$\forall r \geq 1, U_r = U^r$$

V.D

1. $U(1)$ correspond à la probabilité que $(W_n)_{n \geq 1}$ prenne au moins une fois la valeur k et on a donc

$$U(1) = 1 - u \in [0, 1[$$

Notons E_r l'événement "la suite $(W_n)_{n \geq 1}$ prend au moins r fois la valeur k ". Si la suite prend au moins r fois la valeur k , il y a bien un rang où elle prend pour la r -ième fois la valeur k et réciproquement. Deux événements correspondant à des rangs différents sont bien sûr différents et ainsi

$$\mathbb{P}(E_r) = \sum_{n \geq 1} u_n^{(r)} = U_r(1) = U(1)^r = (1-u)^r$$

Les E_r formant une suite décroissante d'ensembles,

la propriété de continuité décroissante indique (puisque $1-u \in [0, 1[$)

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{r \geq 0} E_r\right) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(E_r) = 0$$

Or, $\bigcap_{r \geq 0} E_r$ correspond à l'événement "la suite (W_n) prend une infinité de fois la valeur k "

et on a donc le résultat demandé.

2. Soit $k \geq 1$. On partitionne les événements en deux sous-ensembles A et $\bar{A}$: ceux pour lesquels on atteint la valeur k au moins une fois et les autres. On note B l'événement "la suite Y prend la valeur k une infinité de fois. Par formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap A) + \mathbb{P}(B \cap \bar{A}) = \mathbb{P}(B \cap A)$$

Plus précisément, notons A_i l'ensemble des événements correspondant à l'obtention d'une population k pour la première fois au rang i . Les A_i partitionnent A et

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i) \mathbb{P}(B | A_i)$$

La question précédente nous apprend que $\mathbb{P}(B | A_i) = 0$ (si on tombe sur une population de k individus, tout se passe ensuite comme dans l'expérience de cette partie) et finalement $\mathbb{P}(B) = 0$.

V.E Par continuité croissante, on a

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bar{A}_n\right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^N \bar{A}_n\right)$$

Or, on a

$$\forall N \in \mathbb{N}, 0 \leq \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^N \bar{A}_n\right) \leq \sum_{n=0}^N \mathbb{P}(\bar{A}_n) = 0$$

et ainsi,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bar{A}_n\right) = 0$$

On en déduit que (le complémentaire d'une réunion est l'intersection des complémentaires)

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bar{A}_n\right) = 1$$

V.F Si la suite $(Y_n(\omega))$ tend vers $+\infty$ alors elle finit pas dépasser définitivement en temps fini toute valeur k , ce qui implique qu'elle ne prend aucune valeur une infinité de fois. Réciproquement, si cette propriété a lieu alors pour tout entier k_0 et pour $j \in [0, k_0 - 1]$, la valeur j n'est plus prise à partir d'un rang n_j ; à partir du rang $\max(n_0, \dots, n_{k_0-1})$, on a $Y_n(\omega) \geq k_0$ et on a donc montré que $Y_n(\omega) \rightarrow +\infty$ (définition d'une limite infinie). L'événement "la suite (Y_n) est de limite infinie" est donc égal à l'intersection des événements A_k : "la suite (Y_n) ne prend pas une infinité de fois la valeur k " et sa probabilité est

$$\beta = \mathbb{P} \left(\bigcap_{k=0}^{\infty} A_k \right)$$

On a vu que les événements A_k pour $k \geq 1$ sont tous de probabilité 1. L'événement A_0 correspond, lui, à l'événement "la suite (Y_n) ne prend jamais la valeur 0" (prendre une fois la valeur 0 équivaut à prendre la valeur 0 à partir d'un certain rang) et sa négation est "la population finit par s'éteindre". On a donc $\mathbb{P}(A_0) = 1 - \alpha$.

Pour se ramener à la question précédente, j'utilise la formule des probabilités composées :

$$\beta = \mathbb{P}(A_0) \mathbb{P}_{A_0} \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \right)$$

Les $A_k, k \geq 1$, étant de probabilité 1 pour la probabilité conditionnelle, on a ainsi

$$\beta = \mathbb{P}(A_0) = 1 - \alpha$$

Pour le niveau X-ENS, voir 2016 PC d'X.