

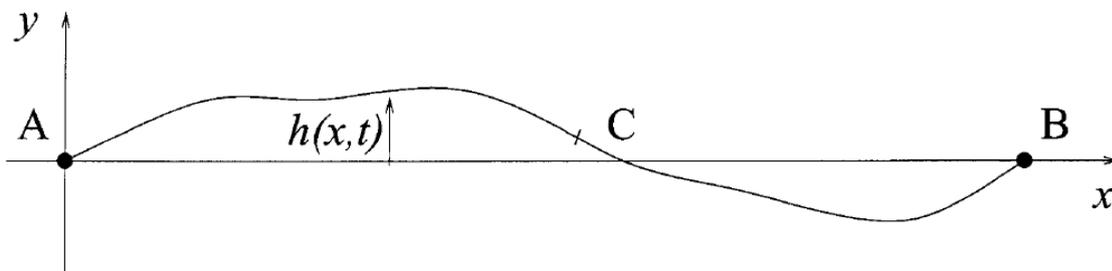
calculatrice autorisée

EXERCICE 1 : VIBRATION TRANSVERSE D'UNE CORDE**II.1 Ondes stationnaires le long d'une corde tendue**

Une fine corde métallique homogène, quasi-inextensible et sans raideur, de masse linéique μ , est soumise à une tension d'équilibre T . Ses déformations dans le plan (x, y) sont décrites par une fonction de hauteur $y = h(x, t)$. Dans tout le problème, les déformations de la corde par rapport à l'axe horizontal sont supposées suffisamment faibles pour que :

- l'angle $\alpha(x, t)$ que fait la courbe h avec l'horizontale soit un infiniment petit d'ordre 1, tout comme la dérivée $\partial h / \partial x$.
- les déplacements d'un point matériel lié à la corde n'aient qu'une composante verticale, les déplacements horizontaux étant négligeables.

Les extrémités de la corde sont dénommées A et B, d'abscisse respective x_A et x_B . Le milieu de la corde est noté C, d'abscisse x_C (Figure II.1). Tout au long du problème, on négligera les effets de pesanteur devant les forces de tension de la corde.

**Figure II.1****- II.1.1**

Soit un point O d'abscisse x_O situé dans l'intervalle $[AB]$ ($x_A < x_O < x_B$). La partie de la corde située à droite du point O ($x > x_O$) exerce à chaque instant sur la partie de la corde située à sa gauche une certaine force $\vec{F}(x_O, t)$.

Comment s'exprime, en fonction de T et d'une dérivée de $h(x, t)$, la composante verticale (suivant y) de cette force \vec{F} ?

- II.1.2

Etablir, dans le cadre des hypothèses énoncées ci-dessus, l'équation de d'Alembert vérifiée par $h(x, t)$. Exprimer la célérité c associée en fonction des paramètres μ et T .

- II.1.3

Peut-on observer des discontinuités spatiales de la dérivée $\partial h / \partial x$ en des points autres que A et B ? Justifier votre réponse.

- II.1.4

La corde est fixée en ses deux extrémités A et B à une hauteur nulle, soit $h(x_A, t) = 0$ et $h(x_B, t) = 0$. La longueur de la corde entre ces deux points est $2L$, et l'on choisit l'origine du

repère de façon à avoir $x_A = 0$ et $x_B = 2L$.

On recherche les ondes stationnaires de vibration de la corde sous la forme :

$$h(x, t) = Z \sin(kx + \phi) \cos(\omega t)$$

où Z est une amplitude arbitraire.

Donner, en la démontrant, la relation existant entre ω , k et c .

- **II.1.5**

Les valeurs admissibles de k (norme du vecteur d'onde) forment une suite de valeurs discrètes k_n , où $n = 1, 2, 3 \dots$ est entier positif.

Donner l'expression des k_n admissibles, des pulsations propres ω_n et des fréquences f_n associées.

Comment choisir la phase ϕ ?

- **II.1.6**

Tracer soigneusement l'allure de la déformation associée au mode de vibration fondamental k_1 , telle qu'on pourrait l'observer à l'aide, par exemple, d'une caméra rapide ou d'une lampe stroboscopique.

Tracer de la même façon l'allure des déformations associées à la première, deuxième et troisième harmonique (respectivement k_2, k_3, k_4).

Compter et faire figurer sur votre schéma, à chaque fois, le nombre de "noeuds" et de "ventres" associés à ces modes de vibration.

- **II.1.7**

On peut montrer que l'énergie mécanique **par unité de longueur** $e(x, t)$ associée à l'onde est égale à :

$$e(x, t) = \frac{\mu}{2} \left[\left(\frac{\partial h}{\partial t} \right)^2 + c^2 \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right]$$

Calculer la valeur moyenne temporelle $\langle e \rangle$ en un point quelconque x de la corde, pour le mode de vibration fondamental.

- **II.1.8**

En déduire l'énergie totale associée à la vibration du mode fondamental. On exprimera le résultat en fonction de la tension T de la corde, de sa demi-longueur L et de l'amplitude Z des vibrations.

Application numérique : Que vaut l'amplitude Z des vibrations lorsque l'énergie totale du mode est égale à 0,1 J, avec $L = 1$ m, $T = 100$ N ?

EXERCICE 2 : BATTERIE AU PLOMB

Compte-tenu de leur forte densité énergétique ($150 \text{ W}\cdot\text{h}\cdot\text{kg}^{-1}$), les batteries lithium-ion sont de plus en plus utilisées dans les véhicules électriques. Néanmoins, ces batteries sont encore chères et exposées à un fort risque d'explosion si elles sont rechargées dans de mauvaises conditions.

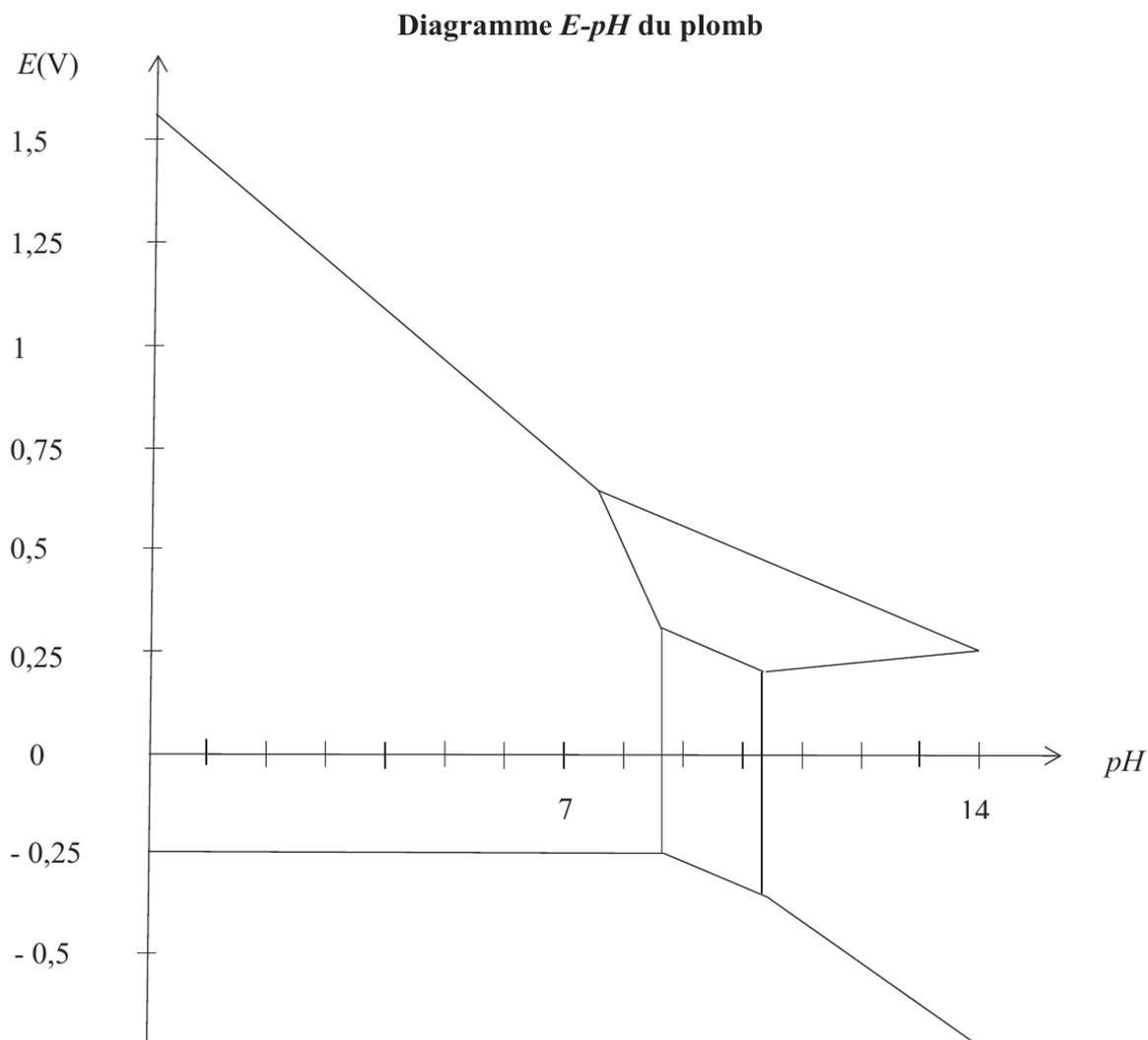
Mise au point par le Français Gaston Planté en 1859, la batterie au plomb est encore aujourd'hui très compétitive et reste la principale technologie utilisée dans les véhicules thermiques. En effet, elle est capable de fournir un courant crête de grande intensité, nécessaire pour le démarrage électrique des moteurs à combustion interne.

Composition de l'atome de plomb

Q7. Préciser la composition du noyau de l'atome de plomb : $^{207}_{82}\text{Pb}$.

Diagramme potentiel-pH du plomb

Le diagramme potentiel-pH, aussi dénommé diagramme E - pH , simplifié du plomb, tracé pour une concentration égale à $10^{-4} \text{ mol}\cdot\text{L}^{-1}$, pour toute espèce soluble contenant du plomb, est représenté **page 12**. Les espèces prises en compte sont : $\text{Pb}^{2+}(\text{aq})$, $\text{PbO}_2(\text{s})$, $\text{PbO}(\text{s})$, $\text{HPbO}_2^-(\text{aq})$, $\text{Pb}(\text{s})$ et $\text{Pb}_3\text{O}_4(\text{s})$.



- Q8.** Déterminer les nombres d'oxydation de l'élément plomb dans chacune des espèces considérées, puis reproduire sur votre copie ce diagramme $E-pH$ du plomb, en associant une espèce à chacun des domaines d'existence ou de prédominance.
Le nombre d'oxydation du plomb dans l'espèce $Pb_3O_4(s)$ est-il compatible avec la quantification de la charge ? Proposer une explication.
- Q9.** Écrire les demi-équations redox dans lesquelles interviennent les deux couples de l'eau. En supposant toutes les pressions partielles égales à la pression standard $P^\circ = 1$ bar, préciser les équations des droites associées au diagramme $E-pH$ de l'eau.
- Q10.** Superposer le diagramme $E-pH$ de l'eau au diagramme $E-pH$ du plomb. Le plomb est-il stable en solution aqueuse acide ? En solution aqueuse basique ? Si non, écrire l'(es) équation(s) de la (des) réaction(s) chimique(s) qui se produi(en)t.

Solubilité du sulfate de plomb dans une solution d'acide sulfurique

- Q11.** Déterminer, en faisant l'(es) approximation(s) qui s'impose(nt), la solubilité s du sulfate de plomb dans une solution d'acide sulfurique à $0,5 \text{ mol}\cdot\text{L}^{-1}$. Conclure.

Accumulateur au plomb en fonctionnement générateur

Les couples redox qui interviennent dans l'accumulateur au plomb (**figure 4**) sont $PbO_2(s)/PbSO_4(s)$ et $PbSO_4(s)/Pb(s)$.

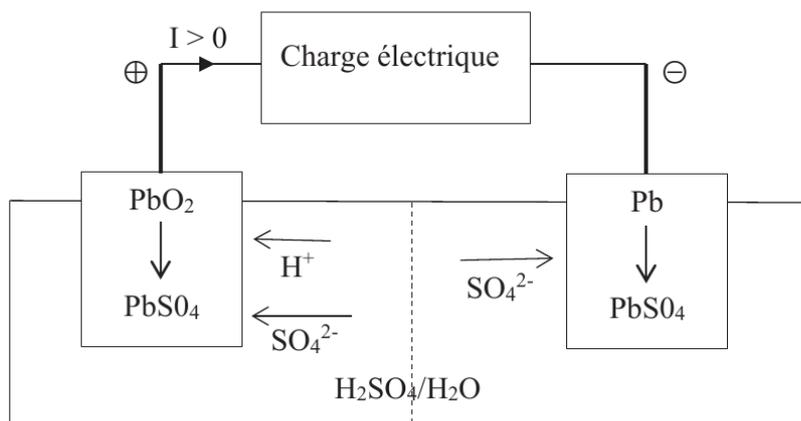


Figure 4 – Accumulateur au plomb

- Q12.** Écrire les deux demi-réactions chimiques, en fonctionnement générateur, en précisant celle qui a lieu à l'anode et celle qui a lieu à la cathode. En déduire la réaction globale de fonctionnement de l'accumulateur.
- Q13.** La tension ou force électromotrice d'un accumulateur au plomb dépend-elle du pH ? Si oui, est-il préférable d'utiliser dans l'accumulateur au plomb de l'acide sulfurique très concentré ou non ?

Masse d'une batterie au plomb

On désire réaliser une batterie au plomb dont la tension à vide U_0 est supérieure à 12 V et dont la capacité Q est supérieure à 50 A.h.

On donne sur la **figure 5**, les courbes intensité-potentiel d'un élément de la batterie utilisé en mode décharge.

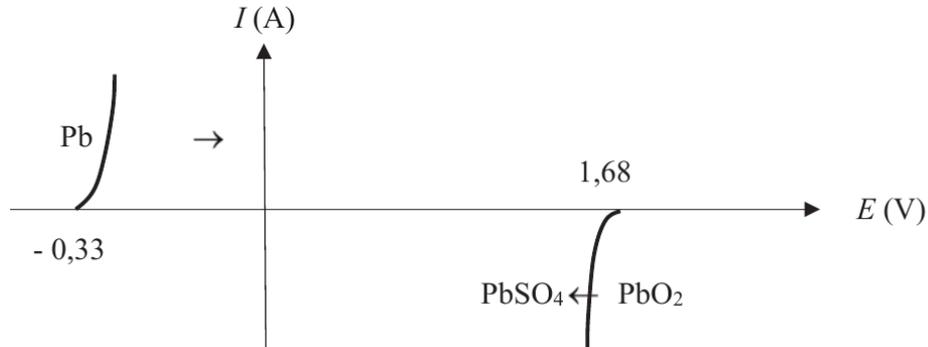


Figure 5 – Courbes intensité-potentiel

- Q14.** Quelle(s) grandeur(s) électrique(s) de la batterie est (sont) modifiée(s) par la mise en série de plusieurs éléments ? Quelle(s) grandeur(s) électrique(s) de la batterie est (sont) modifiée(s) par la mise en parallèle de plusieurs éléments ?
- Q15.** Combien faut-il associer d'éléments, en série, pour satisfaire le cahier des charges ?
- Q16.** Exprimer la masse totale en plomb pur, solide, contenue dans la batterie en fonction de la capacité Q de la batterie, de la constante F de Faraday et de la masse molaire $M(\text{Pb})$ du plomb.

Données

Formules trigonométriques

$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$a \cos \theta + b \sin \theta = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta + \varphi)$$

$$\text{avec } \cos \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ et } \sin \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2} (\cos(a - b) + \cos(a + b))$$

Données thermodynamiques à 298 K

L'acide sulfurique H_2SO_4 est un diacide dont les deux acidités sont considérées comme fortes, il s'ionise donc deux fois totalement en solution aqueuse.

Produit de solubilité :

$$K_s(\text{PbSO}_4(\text{s})) = 1,6 \cdot 10^{-8}$$

Potentiels redox :

$$E^\circ(\text{H}^+(\text{aq})/\text{H}_2(\text{g})) = 0,00 \text{ V.}$$

$$E^\circ(\text{CH}_3\text{COOH}(\text{aq})/\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH}(\text{aq})) = 0,03 \text{ V.}$$

$$E^\circ(\text{S}_4\text{O}_6^{2-}(\text{aq})/\text{S}_2\text{O}_3^{2-}(\text{aq})) = 0,09 \text{ V.}$$

$$E^\circ(\text{I}_2(\text{aq})/\text{I}^-(\text{aq})) = 0,62 \text{ V.}$$

$$E^\circ(\text{O}_2(\text{g})/\text{H}_2\text{O}) = 1,23 \text{ V.}$$

$$E^\circ(\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}(\text{aq})/\text{Cr}^{3+}(\text{aq})) = 1,33 \text{ V.}$$

$$(RT \ln 10)/F = 0,06 \text{ V/unité de } pH.$$

EXERCICE 3 : CAPTEUR INDUCTIF

Dans cette partie, on s'intéresse au fonction d'un capteur inductif de déplacement. Le capteur utilise une bobine d'auto-induction. On s'intéresse dans un premier temps au champ magnétique créée par un solénoïde dans l'air, puis à partir de là au capteur lui-même, obtenu en insérant une partie mobile à l'intérieur du solénoïde.

1. On considère un solénoïde de longueur l_0 et de rayon R recouvert de N spires jointives bobinées sur un cylindre rempli d'air, dans lesquelles circule un courant électrique d'intensité I (**Fig. 6**). On considérera que les propriétés magnétiques de l'air sont celles du vide et que le champ magnétique sur l'axe du solénoïde est donné en norme par la relation $B = \mu_0 \frac{N}{l_0} I$.

Tous les calculs de champ magnétique seront menés dans l'approximation du **solénoïde illimité**.

Les données sont : R , N , I , μ_0 et l_0 .

- Donner l'énoncé du théorème d'Ampère.
- Donner l'allure des lignes de champ magnétique d'un solénoïde de longueur l_0 (les directions et sens de ces lignes seront justifiées).
- Démontrer que le champ magnétique à l'extérieur du solénoïde est nul (modèle du solénoïde illimité).
- À partir du théorème d'Ampère, déterminer complètement le champ magnétique en tout point intérieur au solénoïde.
- En déduire l'expression littérale du coefficient d'auto-inductance L_0 du solénoïde. On rappelle qu'on a par définition

$$\phi_{propre} = L_0 I = N \varphi$$

où φ est le flux créé par le solénoïde au travers d'une de ses spires.

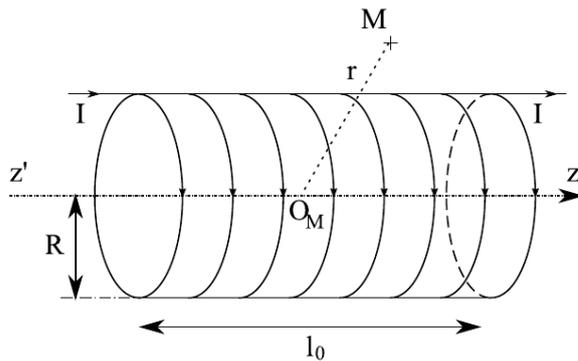


Fig. 6 : Solénoïde de longueur l_0 constitué de N spires jointives bobinées sur un cylindre de rayon R rempli d'air, dans lesquelles circule un courant I et étudiée dans l'approximation du solénoïde infini. r désigne la distance à l'axe d'un point M au niveau duquel on cherche à évaluer B .

2. Le capteur étudié est représenté sur la **Fig. 7**. Une partie mobile de longueur l_0 , appelée noyau, peut se déplacer en translation à l'intérieur du solénoïde initialement rempli d'air. Pour la suite de l'étude, nous admettrons les résultats suivants :

- L'insertion d'un noyau à l'intérieur d'un solénoïde conduit à une modification de son coefficient d'auto-inductance : l'inductance en présence du noyau est le produit de l'inductance dans l'air par un facteur multiplicatif δ ($\delta > 1$).
- Le coefficient d'auto-inductance du capteur peut être évalué comme celui résultant de la mise en série de deux solénoïdes :
 - le premier, de longueur x , est rempli d'air ;
 - le deuxième, de longueur $l_0 - x$, contient le noyau.

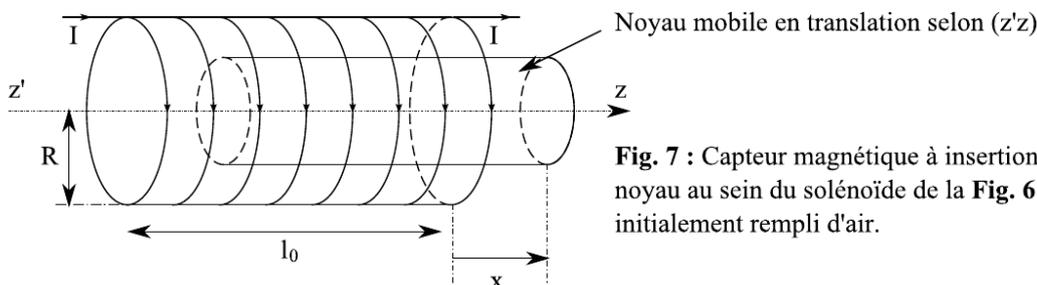


Fig. 7 : Capteur magnétique à insertion d'un noyau au sein du solénoïde de la **Fig. 6** initialement rempli d'air.

- Déterminer en fonction de N , l_0 et x , le nombre N_1 de spires de la partie gauche du solénoïde sans noyau et celui N_2 de la partie droite avec le noyau interne.
- En déduire l'inductance propre de chaque partie puis l'inductance $L(x)$ en fonction de δ , L_0 , l_0 et x .
- Représenter graphiquement $L(x)$ en fonction de x si $0 < x < l_0$.

EXERCICE 4 : OSCILLATEUR MECANIQUE

On s'intéresse dans cette partie au système décrit sur la **Fig. 8**. Deux objets identiques de masse m se déplacent sans frottement sur un axe ($x'x$). Le premier est une masselotte, tandis que le deuxième correspond à la partie centrale du capteur capacitif de la **Fig. 4**.

D'un point de vue mécanique, ces deux objets seront supposés ponctuels pour toute la suite de cette partie C, de même masse m , positionnés respectivement aux points M_1 et M_2 . Le point M_1 est accroché à un point fixe O par l'intermédiaire d'un ressort de raideur k et de longueur à vide l_{R0} tandis que le point M_2 est accroché à M_1 par l'intermédiaire d'une ressort identique au précédent.

Le condensateur cylindrique double est positionné de telle manière que son armature centrale soit ajustée à sa position de référence à l'équilibre mécanique.

Dans les conditions de fonctionnement du système, les forces d'attraction électrostatiques entre les armatures fixe et mobile seront complètement négligées. Les points M_1 et M_2 sont repérés sur l'axe par leurs abscisses respectives $x_1(t)$ et $x_2(t)$.

Les données sont : m , k et l_{R0} .

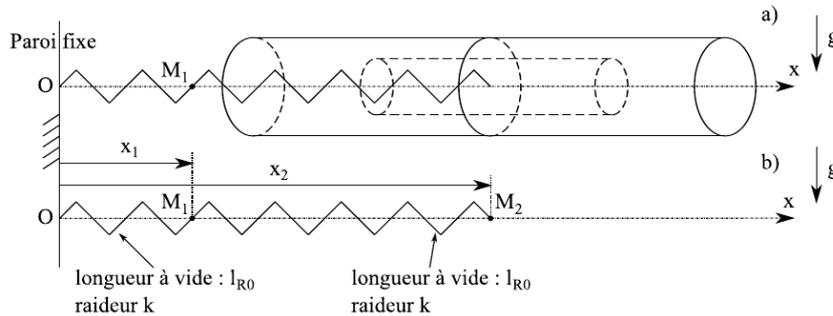


Fig. 8 : Système mécanique étudié : a) Description comprenant la masselotte en M_1 et le capteur capacitif à condensateur cylindrique étudié en partie A), b) Système mécanique équivalent à partir duquel les raisonnements de la partie C) seront menés.

1. Repos.

- Déterminer les positions de repos x_{10} et x_{20} en fonction des données.
- Les ressorts sont linéaires : leur tension est proportionnelle à leur allongement. Exprimer, en fonction de x_1 , x_2 et des données, le module des tensions mécaniques T_1 et T_2 .

2. Mouvements de M_1 et de M_2 .

- Étudier le mouvement de M_2 et montrer que l'équation différentielle vérifiée par $x_2(t)$ est de la forme $\ddot{x}_2 + Ax_2 = Bx_1 + C$ (vous identifierez A , B , C en fonction des données).
- Étudier le mouvement de M_1 et montrer que l'équation différentielle vérifiée par $x_1(t)$ est de la forme $\ddot{x}_1 + Dx_1 = Ex_2 + F$ (vous identifierez D , E , F en fonction des données).

3. En posant $XX_1(t) = x_1(t) - x_{10}$ et $XX_2(t) = x_2(t) - x_{20}$, on obtient le système d'équation suivant :

$$\frac{d^2 XX_2}{dt^2} = -\omega_0^2(XX_2 - XX_1) \quad \text{et} \quad \frac{d^2 XX_1}{dt^2} = -\omega_0^2(2XX_1 - XX_2)$$

avec $\omega_0^2 = k/m$ et l'on envisage la situation où les deux points vibrent avec la même pulsation Ω : $XX_1(t) = X_{m1} \cos(\Omega t + \varphi_1)$ et $XX_2(t) = X_{m2} \cos(\Omega t + \varphi_2)$.

- (a) Montrer que l'on obtient les expressions suivantes [\underline{X}_{m1} et \underline{X}_{m2} sont les amplitudes complexes associées à $XX_1(t)$ et $XX_2(t)$ (voir page 1)] :

$$(2\omega_0^2 - \Omega^2)\underline{X}_{m1} - \omega_0^2\underline{X}_{m2} = 0 \quad \text{et} \quad -\omega_0^2\underline{X}_{m1} + (\omega_0^2 - \Omega^2)\underline{X}_{m2} = 0$$

- (b) Montrer alors que ce mouvement n'est possible que pour deux valeurs de pulsation Ω_1 et $\Omega_2 < \Omega_1$ à expliciter en fonction de ω_0 (voir valeurs page 1).

4. La loi générale du mouvement de M_2 est de la forme :

$$\begin{aligned} XX_1(t) &= A_1 \cos(\Omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\Omega_2 t + \varphi_2) \\ XX_2(t) &= A_1 \cos(\Omega_1 t + \varphi_1) - A_2 \cos(\Omega_2 t + \varphi_2) \end{aligned}$$

A_1 , A_2 , φ_1 et φ_2 dépendant des conditions initiales.

- (a) Les deux masses sont initialement au repos : en déduire les valeurs de φ_1 et φ_2 .

- (b) Le protocole expérimental permet de choisir les valeurs de $x_1(0)$ et $x_2(0)$:

i. On considère d'abord $x_1(0) = 1,5l_{R0}$ et $x_2(0) = 2,5l_{R0}$:

α) Déterminer les expressions littérales de A_1 et A_2 .

β) À quelle fréquence oscillent les deux ressorts ?

γ) Que peut-on dire de $XX_1(t)$ et de $XX_2(t)$? Quel nom donneriez-vous à ce type de solution ?

δ) Donner l'expression littérale de $XX_2(t)$.

ii. On considère maintenant $x_1(0) = 1,5l_{R0}$ et $x_2(0) = 1,5l_{R0}$:

α) Déterminer les expressions littérales de A_1 et A_2 .

β) À quelle fréquence oscillent les deux ressorts ?

γ) Que peut-on dire de $XX_1(t)$ et de $XX_2(t)$? Quel nom donneriez-vous à ce type de solution ?

δ) Donner l'expression littérale de $XX_2(t)$.