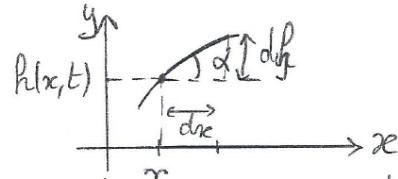


EXERCICE 1 : VIBRATION TRANSVERSE (CCINP PC 2017)

! définition de tension \vec{T} = force exercée par la partie droite sur la partie gauche...

1. 1) $F_y = T \sin \alpha \approx T \alpha$ or $\sin \alpha \approx \tan \alpha = \frac{\partial h}{\partial x}$



$F_y = T_x \frac{\partial h}{\partial x}$

2) On applique le théorème du centre de masse à l'elt de longueur dx de corde : $dm \vec{a} = F(x+dx) - F(x)$ (\vec{P} est négligé)

selon \vec{y} $\rho dx \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = T \left[\frac{\partial h}{\partial x}(x+dx) - \frac{\partial h}{\partial x}(x) \right] = T \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} dx$

$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$ équatio de d'Alembert $\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$ $c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$

3) en C, on n'a pas de pt matériel \rightarrow "mc" = 0 donc $m_C \vec{a}_C = 0$ alors le PFD, pour C de masse nulle, en project sur \vec{y} donne $0 = T \left[\frac{\partial h}{\partial x}(x_c^+) - \frac{\partial h}{\partial x}(x_c^-) \right]$ d'où $\frac{\partial h}{\partial x}(x_c^+) = \frac{\partial h}{\partial x}(x_c^-)$: pas de discontinuité de $\frac{\partial h}{\partial x}$ en C!

4) $h(x,t) = Z \sin(kx + \phi) \cos(\omega t)$. On injecte $h(x,t)$ ds l'équatio de d'Alembert : $\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = -\omega^2 h$ $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = -k^2 h$ $\rightarrow -\omega^2 h = -k^2 c^2 h \rightarrow k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$

5) les cdt aux limites sont $h(0,t) = 0$ et $h(2L,t) = 0$

$h(0,t) = 0 \rightarrow \sin \phi = 0 \rightarrow \phi = 0$
 $h(2L,t) = 0 \rightarrow \sin(2kL + \phi) = 0 \rightarrow 2kL = n\pi \rightarrow k_n = n \frac{\pi}{2L} \quad n \in \mathbb{N}^*$

Puis $\omega_n = c \times k_n$ $\omega_n = n \frac{\pi c}{2L}$ et $f_n = \frac{\omega_n}{2\pi}$: $f_n = n \frac{c}{4L}$

6) Mode fondamental $\rightarrow n=1$ $1V; 2N$

$n=2$ $2V; 3N$

$n=3$ $3V; 4N$

$$7) \text{ on admet } e(x,t) = \frac{\mu}{2} \left[\left(\frac{\partial h}{\partial t} \right)^2 + c^2 \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right]$$

2/2

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial h}{\partial t} \right)^2 = \omega^2 Z^2 \sin^2(kx) \sin^2(\omega t) \\ \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 = k^2 Z^2 \cos^2(kx) \cos^2(\omega t) = \frac{\omega^2}{c^2} Z^2 \cos^2(kx) \cos^2(\omega t) \end{array} \right.$$

$$\text{d'où } e(x,t) = \frac{\mu Z^2 \omega^2}{2} \left[\sin^2(kx) \sin^2(\omega t) + \cos^2(kx) \cos^2(\omega t) \right]$$

$$\text{or } \langle \cos^2(\omega t) \rangle = \langle \sin^2(\omega t) \rangle = \frac{1}{2} \Rightarrow \langle e \rangle = \frac{\mu Z^2 \omega^2}{2} \left[\frac{\sin^2(kx)}{2} + \frac{\cos^2(kx)}{2} \right]$$

$$\langle e(x) \rangle = \frac{\mu Z^2 \omega^2}{4} [\cos^2(kx) + \sin^2(kx)] \quad \boxed{\langle e(x) \rangle = \frac{\mu Z^2 \omega^2}{4}}$$

$$\text{or } \omega_n = n \frac{\pi c}{2L} \rightarrow \omega_1 = \frac{\pi c}{2L} \rightarrow \langle e \rangle_{n=1} = \frac{\mu \pi^2 c^2}{16L^2} Z^2$$

$$8) \langle e(x) \rangle \text{ est indépendant de } x; \text{ donc } \langle E \rangle = \int_0^{2L} \langle e(x) \rangle dx = \langle e(x) \rangle \times 2L$$

$$\text{d'où } \langle E \rangle_{n=1} = \frac{\mu \pi^2 c^2}{16L^2} Z^2 \times 2L = \frac{\pi^2 Z^2}{8L} \times \frac{\mu c^2}{T} \rightarrow \boxed{\langle E \rangle = \frac{\pi^2 Z^2 T}{8L}}$$

$$\text{A-N: } Z = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{8L \langle E \rangle}{T}} = 3 \text{ cm}$$

EXERCICE 2 : BATTERIE AU PLOMB (CCINP PSI 2019)

Composition de l'atome de plomb

7. Le noyau de plomb contient 82 protons et $207 - 82 = \underline{125}$ neutrons.

Diagramme potentiel-pH du plomb

8. Nombre d'oxydation du plomb :

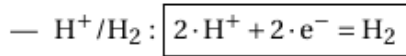
- PbO_2 : +IV;
- Pb_3O_4 : +8/3;
- Pb^{2+} , PbO et HPbO_2^- : +II;
- Pb : 0.

On place les espèces dans le diagramme potentiel-pH de sorte que le nombre d'oxydation croît avec E, et les espèces les plus basiques apparaissent aux pH les plus élevés. À noter que HPbO_2^- , ou $\text{PbO}(\text{OH})^-$ est plus basique que PbO .

Pb_3O_4 semble ne pas respecter la quantification de la charge. Dans les faits, il s'agit d'un **composé à valence mixte**, l'élément plomb étant présent à la fois aux degrés d'oxydation +II et +IV (deux Pb^{2+} et un Pb^{4+} pour quatre O^{2-}). **La quantification de la charge est donc bien respectée.**

Pb_3O_4 semble ne pas respecter la quantification de la charge. Dans les faits, il s'agit d'un **composé à valence mixte**, l'élément plomb étant présent à la fois aux degrés d'oxydation +II et +IV (deux Pb^{2+} et un Pb^{4+} pour quatre O^{2-}). **La quantification de la charge est donc bien respectée.**

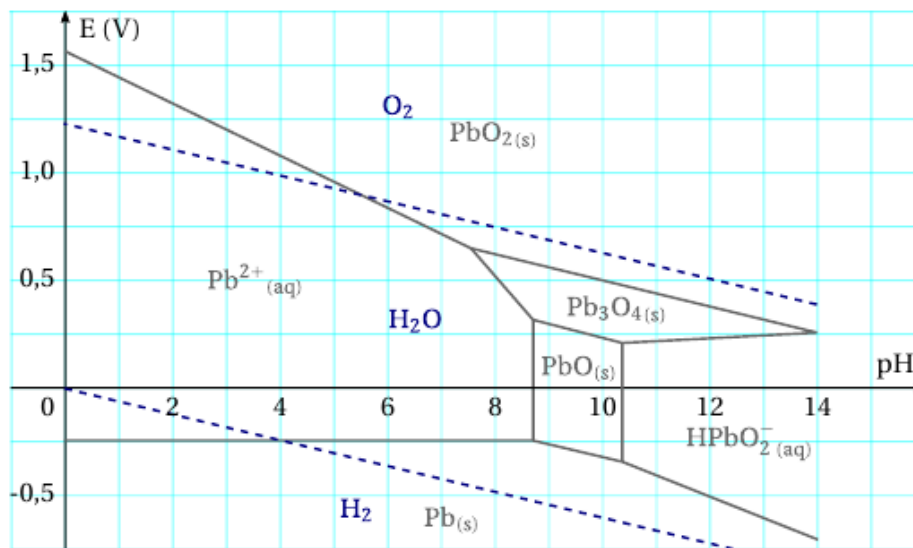
9. Couples de l'eau :



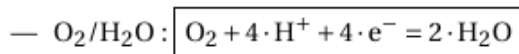
$$E = E^\circ(H^+/H_2) + \frac{0,06}{2} \cdot \log\left(\frac{[H^+]^2 \cdot p^\circ}{p_{H_2}}\right), \quad \blacksquare \quad (10)$$

soit pour $p_{H_2} = p^\circ$:

$E = -0,06 \cdot \text{pH (en V)}$. \blacksquare (11)



▲ Figure C2. Diagramme E – pH du plomb (allure).



$$E = E^\circ(O_2/H_2O) + \frac{0,06}{4} \cdot \log\left(\frac{[H^+]^4 \cdot p_{O_2}}{p^\circ}\right), \quad \blacksquare \quad (12)$$

soit pour $p_{O_2} = p^\circ$:

$E = 1,23 - 0,06 \cdot \text{pH (en V)}$. \blacksquare (13)

10. Cf. Fig. C2. En milieu acide, les domaines de $Pb_{(s)}$ et H_2O sont disjoints; **le plomb est donc a priori oxydé**. Les demi-réactions redox associées s'écrivent :



soit la réaction :



En milieu basique, le **plomb est thermodynamiquement stable** (existence d'un domaine commun avec l'eau).

Solubilité du sulfate de plomb dans une solution d'acide sulfurique

11. On écrit l'équilibre de mise en solution du sulfate de plomb : $\boxed{\text{PbSO}_4 = \text{Pb}^{2+} + \text{SO}_4^{2-}}$. À l'équilibre, $K_s = [\text{Pb}^{2+}]_{\text{éq}} \cdot [\text{SO}_4^{2-}]_{\text{éq}}$. On suppose que la solubilité s est faible devant la concentration en acide sulfurique, de sorte que $[\text{SO}_4^{2-}]_{\text{éq}} \approx 0,5 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$. On a alors :

$$s = [\text{Pb}^{2+}]_{\text{éq}} = \frac{K_s}{[\text{SO}_4^{2-}]_{\text{éq}}} = \frac{1,6 \cdot 10^{-8}}{0,5} = 3,2 \cdot 10^{-8} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}. \quad \blacksquare \quad (16)$$

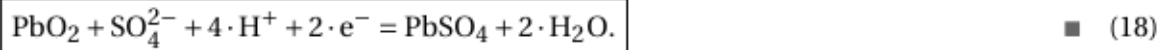
Le résultat est cohérent avec l'hypothèse faite.

Accumulateur au plomb en fonctionnement générateur

12. Couple $\text{PbO}_2/\text{PbSO}_4$:



soit :



Ce compartiment est le lieu d'une **réduction**, c'est donc la **cathode**.

Couple PbSO_4/Pb :

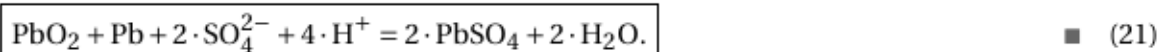


soit :



Ce compartiment est le lieu d'une **oxydation**, c'est donc l'**anode**.

On en déduit l'équation-bilan de décharge de la batterie :



13. Les ions H^+ intervenant dans le bilan global, la force électromotrice dépend du pH, avec :

$$\boxed{e = e^\circ + \frac{0,06}{2} \cdot \log\left([\text{H}^+]^4 \cdot [\text{SO}_4^{2-}]^2\right).} \quad \blacksquare \quad (22)$$

La force électromotrice est d'autant plus grande que la solution est acide, donc on a intérêt à utiliser de l'acide sulfurique **très concentré**. En outre, la résistance interne de la batterie en sera d'autant plus faible, ce qui est également un avantage.

Masse d'une batterie au plomb

- 14. Plus on met d'éléments en **série**, plus la **tension** délivrée est grande. À l'inverse, plus on met d'éléments en **parallèle**, plus la **capacité** est grande.
- 15. La tension à vide d'un élément est donnée par, d'après les courbes intensité-potential, $U_0^{\text{élément}} = 1,68 + 0,33 = 2,01 \text{ V}$ donc il faut **six cellules en série** pour atteindre 12 V.

Remarque. En pratique, du fait de la chute de tension en charge, il vaut mieux prévoir sept cellules pour maintenir une tension supérieure à 12 V lorsque la batterie débite.

- 16. Pour un équivalent de plomb consommé, deux équivalents d'électrons circulent dans le circuit. La capacité de la batterie est donnée par $Q = n_e \cdot \mathcal{F}$, avec n_e le nombre de moles d'électrons échangés, soit :

$$Q = 2 \cdot n_{\text{Pb}} \cdot \mathcal{F} = 2 \cdot \frac{m_{\text{Pb}}}{M_{\text{Pb}}} \cdot \mathcal{F}, \quad \blacksquare \quad (23)$$

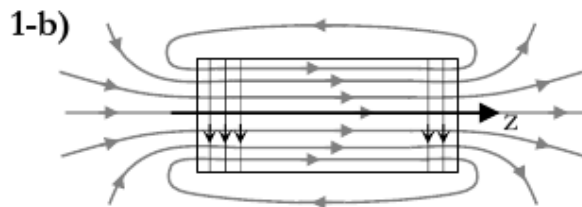
d'où :

$$m_{\text{Pb}} = \frac{M_{\text{Pb}} \cdot Q}{2 \cdot \mathcal{F}}. \quad \blacksquare \quad (24)$$

EXERCICE 3 : CAPTEUR INDUCTIF (PT 2015)

1) Champ créé par un solénoïde

1-a) La circulation du champ magnétostatique le long d'un contour fermé est égale au produit de la somme des courants traversant une surface s'appuyant ce contour, par la perméabilité magnétique du vide : $\oint \vec{B}(M) \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \cdot I_{\text{enlacés}}$.



Justification des directions : le champ est uniforme dans le solénoïde, donc par conservation du flux du champ magnétique, les lignes de champ y sont parallèles. À l'extérieur le champ diminue, donc les tubes de champ s'évasent.

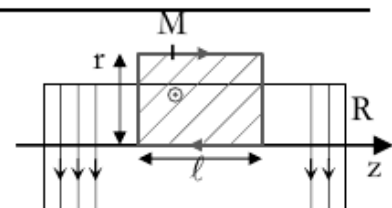
Justification du sens : le solénoïde est assimilable à un moment magnétique orienté dans le sens direct par rapport aux spires qui le constituent. Le champ magnétique sort du dispositif dans le même sens que le moment magnétique.

1-c) Soit un point M quelconque de l'espace.

Le plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ est un plan de symétrie des courants donc un plan d'antysymétrie de \vec{B} , ainsi $\vec{B}(M) = B(M) \cdot \vec{e}_z$.

De plus la distribution de courant est invariante par translation selon \vec{e}_z et par rotation selon θ , donc $\vec{B}(M) = B(r) \cdot \vec{e}_z$.

Contour d'Ampère : rectangle représenté ci-contre.



La circulation du champ magnétique sur ce contour se réduit à

$$\oint \vec{B}(M) \cdot d\vec{\ell} = \int_{r=0} B_{\text{axe}} \cdot \vec{e}_z \cdot (-dz \cdot \vec{e}_z) + \int_{r>0} (B(r) \cdot \vec{e}_z) \cdot (dz \cdot \vec{e}_z) + \int_{\text{"cotés"}} (B(r) \cdot \vec{e}_z) \cdot (dr \cdot \vec{e}_r).$$

Soit $\oint \vec{B}(M) \cdot d\vec{\ell} = (B(r) - B_{\text{axe}}) \cdot \ell.$

D'après le théorème d'Ampère, si $r > R$, $(B(r) - B_{\text{axe}}) \cdot \ell = -\mu_0 \cdot \frac{N}{l_0} \cdot \ell \cdot I_0$, or, d'après

l'énoncé, $B_{\text{axe}} = \mu_0 \cdot \frac{N}{l_0} \cdot I_0$, donc $B(r > R) = \mu_0 \cdot \frac{N}{l_0} \cdot I_0 - \mu_0 \cdot \frac{N}{l_0} \cdot I_0 = 0$ et $\boxed{\vec{B}_{\text{ext}} = \vec{0}}$.

Rq : l'énoncé attendait apparemment à cette question une « démonstration » de la nullité de B_{ext} ne faisant pas intervenir le théorème d'Ampère, vu que son utilisation est évoquée à la question suivante.

1-d) En poursuivant le raisonnement de la question précédente, si $r < R$, aucun courant

n'est enlacé donc $(B(r) - B_{\text{axe}}) \cdot \ell = \mu_0 \cdot 0$ et $\boxed{\vec{B}_{\text{int}} = \vec{B}_{\text{axe}} = \mu_0 \cdot \frac{N}{l_0} \cdot I_0 \cdot \vec{e}_z}$.

1-e) Par définition, le flux propre du solénoïde s'exprime $\Phi_p = L_0 \cdot I_0$, or $\Phi_p = N \cdot S \cdot B_{\text{axe}}$

donc $L_0 = \frac{\Phi_p}{I_0} = N \cdot \pi \cdot R^2 \cdot \mu_0 \cdot \frac{N}{l_0}$ soit $\boxed{L_0 = \mu_0 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot N^2 / l_0}$.

2) Capteur utilisant un solénoïde à noyau ferromagnétique mobile

2-a) Le nombre de spires de chaque portion étant proportionnel à la longueur de celle-ci :

$\boxed{N_1 = N \cdot x / l_0}$ et $\boxed{N_2 = N \cdot (l_0 - x) / l_0}$.

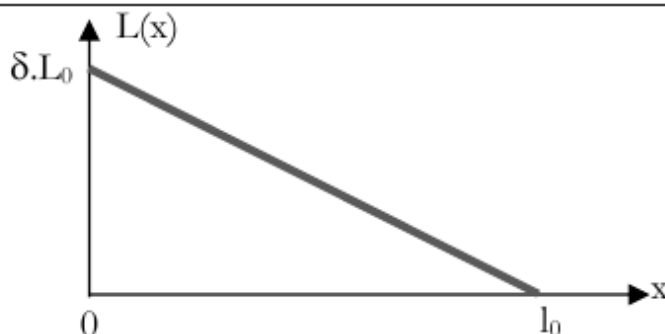
2-b) D'après la question **1-e)**, pour deux solénoïdes de longueurs respectives x et $l_0 - x$:

$$\boxed{L_1 = \frac{\mu_0 \cdot \pi \cdot R^2}{x} \cdot \frac{N^2 \cdot x^2}{l_0^2} = \frac{x}{l_0} \cdot L_0}$$

$$\boxed{L_2 = \delta \cdot \frac{\mu_0 \cdot \pi \cdot R^2}{l_0 - x} \cdot \frac{N^2 \cdot (l_0 - x)^2}{l_0^2} = \delta \cdot \frac{l_0 - x}{l_0} \cdot L_0}$$

Or l'inductance totale vaut $L(x) = L_1 + L_2 \approx L_2$, car $\delta \gg 1$, donc $\boxed{L(x) = \delta \cdot L_0 \cdot \left(1 - \frac{x}{l_0}\right)}$

2-c)



EXERCICE 4 : OSCILLATEUR MECANIQUE (PT 2015)**1) Repos**

1-a) D'après le principe fondamental de la dynamique, en l'absence de mouvement, la somme des forces sur chaque masse est nulle. Par projection selon l'horizontale, on en déduit que les deux ressorts ont pour longueur l_{R0} donc $x_{10} = l_{R0}$ et $x_{20} = 2.l_{R0}$.

1-b) En utilisant les données $T_1 = k. |x_1 - l_{R0}|$ et $T_2 = k. |(x_2 - x_1) - l_{R0}|$.

2) Mouvements de M_1 et M_2

2-a) Le principe fondamental de la dynamique appliqué à M_2 dans le référentiel du laboratoire s'écrit, en projection selon \vec{e}_x : $m.\ddot{x}_2 = -k.((x_2 - x_1) - l_{R0})$ soit

$$\ddot{x}_2 + \frac{k}{m}.x_2 = \frac{k}{m}.x_1 + \frac{k}{m}.l_{R0}. \text{ En identifiant } A = B = \frac{k}{m} \text{ et } C = \frac{k}{m}.l_{R0}$$

2-b) Le principe fondamental de la dynamique appliqué à M_1 dans le référentiel du laboratoire s'écrit, en projection selon \vec{e}_x : $m.\ddot{x}_1 = -k.(x_1 - l_{R0}) + k.((x_2 - x_1) - l_{R0})$ soit

$$\ddot{x}_1 + \frac{2.k}{m}.x_1 = \frac{k}{m}.x_2. \text{ En identifiant } D = \frac{2.k}{m}, E = \frac{k}{m} \text{ et } F = 0.$$

3-a) Les amplitudes complexes de $XX_1(t)$ et $XX_2(t)$ vérifient les équations fournies :

$$\begin{cases} (j.\Omega)^2.\underline{X}_{m2} = -\omega_0^2.(\underline{X}_{m2} - \underline{X}_{m1}) \\ (j.\Omega)^2.\underline{X}_{m1} = -\omega_0^2.(2.\underline{X}_{m1} - \underline{X}_{m2}) \end{cases} \text{ d'où } \begin{cases} -\omega_0^2.\underline{X}_{m1} + (\omega_0^2 - \Omega^2).\underline{X}_{m2} = 0 & \text{(a)} \\ (2.\omega_0^2 - \Omega^2).\underline{X}_{m1} - \omega_0^2.\underline{X}_{m2} = 0 & \text{(b)} \end{cases}$$

3-b) En formant $\omega_0^2.(a) + (\omega_0^2 - \Omega^2).(b)$, on obtient

$$-\omega_0^4.\underline{X}_{m1} + (\omega_0^2 - \Omega^2).(2.\omega_0^2 - \Omega^2).\underline{X}_{m1} = 0 \text{ qui impose } \Omega^4 - 3.\Omega^2.\omega_0^2 + \omega_0^4 = 0.$$

On posant $\xi = \Omega^2$, $\xi^2 - 3.\omega_0^2.\xi + \omega_0^4 = 0$ de discriminant $\Delta = 5.\omega_0^4$, on obtient :

$$\xi = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.\omega_0^2 \text{ d'où } \Omega_1 = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}}.\omega_0 \approx 1,618.\omega_0 \text{ et } \Omega_2 = \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}}.\omega_0 \approx 0,618.\omega_0.$$

4-a) Les masses sont au repos à $t=0$ donc $\dot{XX}_1(0) = \dot{XX}_2(0) = 0$ ce qui impose :

$$\begin{cases} -A_1 \cdot \Omega_1 \cdot \sin(\varphi_1) - A_2 \cdot \Omega_2 \cdot \sin(\varphi_2) = 0 \\ -A_1 \cdot \Omega_1 \cdot \sin(\varphi_1) + A_2 \cdot \Omega_2 \cdot \sin(\varphi_2) = 0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} A_1 \cdot \Omega_1 \cdot \sin(\varphi_1) = 0 \\ A_2 \cdot \Omega_2 \cdot \sin(\varphi_2) = 0 \end{cases}$$

On retient comme solutions $\boxed{\varphi_1 = 0 \text{ si } A_1 \neq 0}$ et $\boxed{\varphi_2 = 0 \text{ si } A_2 \neq 0}$.

4-b-i-1) On a alors $XX_1(0) = 0,5.l_{R0}$ et $XX_2(0) = 0,5.l_{R0}$ soit

$$A_1 + A_2 = 0,5.l_{R0} \text{ et } A_1 - A_2 = 0,5.l_{R0} \text{ d'où } \boxed{A_1 = 0,5.l_{R0}} \text{ et } \boxed{A_2 = 0}.$$

4-b-i-2) Les deux ressorts oscillent alors à la fréquence $\boxed{f_1 = \Omega_1/2.\pi}$

4-b-i-3) On a alors $\boxed{XX_1(t) = XX_2(t)}$, on parle de $\boxed{\text{mode symétrique}}$ (*bors programme*).

4-b-i-4) $\boxed{XX_2(t) = 0,5.l_{R0} \cdot \cos(\Omega_1.t)}$.

4-b-ii-1) On a alors $XX_1(0) = 0,5.l_{R0}$ et $XX_2(0) = -0,5.l_{R0}$ soit

$$A_1 + A_2 = 0,5.l_{R0} \text{ et } A_1 - A_2 = -0,5.l_{R0} \text{ d'où } \boxed{A_1 = 0} \text{ et } \boxed{A_2 = 0,5.l_{R0}}.$$

4-b-ii-2) Les deux ressorts oscillent alors à la fréquence $\boxed{f_2 = \Omega_2/2.\pi}$.

4-b-ii-3) On a alors $\boxed{XX_1(t) = -XX_2(t)}$, $\boxed{\text{mode antisymétrique}}$ (*bors programme*).

4-b-ii-4) $\boxed{XX_2(t) = -0,5.l_{R0} \cdot \cos(\Omega_2.t)}$.