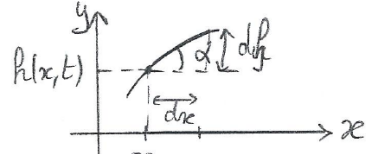


EXERCICE 2 : VIBRATION D'UNE CORDE (CCINP PC 2017)

! définition de tension \vec{T} = force exercée par la partie droite sur la partie gauche...

1. 1) $F_y = T \sin \alpha \approx T d$ or $\sin \alpha \approx \tan \alpha \approx \frac{\partial h}{\partial x}$



$F_y = T \times \frac{\partial h}{\partial x}$

2) On applique le théorème du centre de masse à l'elt de longueur dx de corde : $dm \vec{a} = F(x+dx) - F(x)$ (\vec{P} est négligé)

selon \vec{y} $\rightarrow \mu dx \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = T \left[\frac{\partial h}{\partial x}(x+dx) - \frac{\partial h}{\partial x}(x) \right] = T \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} dx$

$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = \frac{T}{\mu} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$ équatio de d'Alembert $\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$ $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$

3) en C, on n'a pas de pt matériel \rightarrow "mc" = 0 donc $m_C \vec{a}_C = 0$ alors le PFD, pour C de masse nulle, en projet sur \vec{y} donne $0 = T \left[\frac{\partial h}{\partial x}(x_c^+) - \frac{\partial h}{\partial x}(x_c^-) \right]$

d'où $\frac{\partial h}{\partial x}(x_c^+) = \frac{\partial h}{\partial x}(x_c^-)$: pas de discontinuité de $\frac{\partial h}{\partial x}$ en C!

4) $h(x,t) = Z \sin(kx + \phi) \cos(\omega t)$. On injecte $h(x,t)$ ds l'équatio de d'Alembert : $\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = -\omega^2 h$ $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = -k^2 h$ $\rightarrow -\omega^2 h = -k^2 c^2 h \rightarrow k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$

5) les cdt aux limites sont $h(0,t) = 0$ et $h(2L,t) = 0$

$\begin{cases} h(0,t) = 0 \rightarrow \sin \phi = 0 \rightarrow \phi = 0 \\ h(2L,t) = 0 \rightarrow \sin(2kL + \phi) = 0 \rightarrow 2kL = n\pi \rightarrow k_n = n \frac{\pi}{2L} \end{cases} n \in \mathbb{N}^*$

Puis $\omega_n = c \times k_n$ $\omega_n = n \frac{\pi c}{2L}$ et $f_n = \frac{\omega_n}{2\pi}$: $f_n = n \frac{c}{4L}$

6) Mode fondamental $\rightarrow n=1$ 1V; 2N

$n=2$ 2V; 3N

$n=3$ 3V; 4N

7) on admet $e(x,t) = \frac{\mu}{2} \left[\left(\frac{\partial h}{\partial t} \right)^2 + c^2 \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right]$

$\left(\frac{\partial h}{\partial t} \right)^2 = \omega^2 Z^2 \sin^2(kx) \cos^2(\omega t)$

$\left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 = k^2 Z^2 \cos^2(kx) \cos^2(\omega t) = \frac{\omega^2}{c^2} Z^2 \cos^2(kx) \cos^2(\omega t)$

d'où $e(x,t) = \frac{\mu Z^2 \omega^2}{2} [\sin^2(kx) \sin^2(\omega t) + \cos^2(kx) \cos^2(\omega t)]$
 or $\langle \cos^2(\omega t) \rangle = \langle \sin^2(\omega t) \rangle = \frac{1}{2} \Rightarrow \langle e \rangle = \frac{\mu Z^2 \omega^2}{2} \left[\frac{\sin^2(kx)}{2} + \frac{\cos^2(kx)}{2} \right]$

$\langle e(x) \rangle = \frac{\mu Z^2 \omega^2}{4} [\cos^2(kx) + \sin^2(kx)]$ $\langle e(x) \rangle = \frac{\mu Z^2 \omega^2}{4}$

or $\omega_n = n \frac{\pi c}{2L} \rightarrow \omega_1 = \frac{\pi c}{2L} \rightarrow \langle e \rangle_{n=1} = \frac{\mu \pi^2 c^2}{16L^2} Z^2$

8) $\langle e(x) \rangle$ est indépendant de x ; donc $\langle E \rangle = \int_0^{2L} \langle e(x) \rangle dx = \langle e(x) \rangle \times 2L$

d'où $\langle E \rangle_{n=1} = \frac{\mu \pi^2 c^2}{16L^2} Z^2 \times 2L = \frac{\pi^2 Z^2}{8L} \times \frac{\mu c^2}{T} \rightarrow$ $\langle E \rangle = \frac{\pi^2 Z^2}{8L} T$

A-N: $Z = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{8L \langle E \rangle}{T}} = 3 \text{ cm}$

EXERCICE 1 : ETUDE DE RESSORTS (X PSI 2018)

I : Caractérisations et traitements

1) le réseau cristallin est stable : l'énergie potentielle d'interaction $U(a)$ présente un minimum pour $a = a_0$, en l'absence de traction.

→ Au voisinage de a_0 , on peut donc développer $U(a)$ à l'ordre 2 :

$$U(a) = \underbrace{U(a_0)}_{U_0} + (a - a_0) \underbrace{\left(\frac{dU}{da}\right)_{a_0}}_0 + \frac{(a - a_0)^2}{2} \underbrace{\left(\frac{d^2U}{da^2}\right)_{a_0}}_{> 0 \text{ (minimum)}} + \dots$$

soit $U(a) = U_0 + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2U}{da^2}\right)_{a_0} (a - a_0)^2 + o((a - a_0)^2)$

→ cela n'est valable que dans l'approximation petites déformations : $|a - a_0| \ll a_0$.

① L'énergie est bien de la forme:

$$U(a) = U_0 + \frac{1}{2} k \underbrace{(a - a_0)^2}_{\text{allongement}} + \dots$$

$$\text{où } \boxed{k = \left(\frac{d^2U}{da^2} \right)_{a_0} > 0}$$

② A la limite de la rupture, $N \times \frac{1}{2} k (a - a_0)^2 \geq \gamma S$

or $N \approx \frac{S}{a_0^2}$ d'où $\boxed{\frac{k(a - a_0)^2}{2} \geq \gamma a_0^2}$

① A l'équilibre, le principe des actions réciproques ② appliqué de proche en proche donne: $F = N \times k (a - a_0)$

$$\text{donc } \boxed{F_{\max} = \frac{S}{a_0^2} k (a - a_0)_{\max} = \sqrt{2k\gamma} \frac{S}{a_0}}$$

③ la loi de Hooke s'écrit: $\sigma = E \epsilon$

où $\sigma = \frac{F}{S}$ et $\epsilon = \frac{\Delta L}{L} = \frac{1}{L} \times \underbrace{L}_{a_0} \times (a - a_0)$
nbre de "couches"

donc $F = E S \left(\frac{a - a_0}{a_0} \right)$.

① le modèle précédent donne: $F = \frac{S}{a_0^2} k (a - a_0)$.

En identifiant les deux, on obtient: $\boxed{k = E a_0}$

① On en déduit: $\boxed{F_{\max} = \sqrt{\frac{2 E \gamma}{a_0}} S}$

④ Réseau CC (défini dans l'énoncé):

→ la maille contient $1 + 8 \times \frac{1}{8} = 2$ atomes.
↑ centre ↑ coins

→ la masse volumique du fer est donnée par:

$$\rho = \frac{2 \times M}{N_A \cdot a_0^3} \quad \text{donc } \boxed{a_0 = \left(\frac{2M}{\rho N_A} \right)^{1/3}}$$

A.N. : $a_0 \approx 300 \mu\text{m}$

$F_{\text{max}} \approx 300 \text{ kN}$

- ⑤
- ⊗ Avec la valeur numérique précédente, on trouve $\left(\frac{\Delta L}{L}\right)_{\text{max}} = \left(\frac{a-a_0}{a_0}\right)_{\text{max}} \approx 25\%$!!! On n'est pas du tout dans le cadre des petites déformations
 - ⊗ la section \rightarrow le modèle est sûrement faux ...
 - ⊗ la section diminue \rightarrow rupture plus précoce

- ⑥
- ⊗ La condition d'équilibre ^{en translation} de la portion de ressort s'écrit : $\sum \vec{F}^{\text{ext}} = \vec{0}$. Si on néglige son poids devant la force \vec{F} , $\vec{F} + \vec{R}_{\text{inf} \rightarrow \text{sup}} = \vec{0}$ soit $\vec{R}_{\text{inf} \rightarrow \text{sup}} = -\vec{F}$

⊗ A l'équilibre, on doit aussi avoir $\sum \vec{M}^{\text{ext}} = \vec{0}$

or $\vec{M}_O(\vec{F}) = 0$

donc $\vec{M}_t + \vec{M}_O(-\vec{F}) = \vec{0}$

or $\vec{M}_O(-\vec{F}) = \ominus F \times \frac{D}{2} \vec{u}_\theta$ (trappe de levier)

d'où $\vec{M}_t = + F \frac{D}{2} \vec{u}_\theta$

- ⑦
- ⊗ D'après la figure 4, $ds \approx \frac{D}{2} d\alpha$... mais je ne vois pas comment calculer $s = \int ds$ (ce qui s'avère inutile!).

⊗ puisque $d\ell = \frac{D}{2} d\theta$, on a donc : $\frac{d\alpha}{d\ell} \approx \frac{4}{D^2} \frac{ds}{d\theta}$

⊗ or $M_t = G I_0 \frac{d\alpha}{d\ell} = F \frac{D}{2}$

où $F = k s_{\text{tot}}$

$$\text{Donc } k \frac{\Delta_{\text{tot}}}{2} \frac{D}{2} = G I_0 \times \frac{4}{D^2} \frac{ds}{d\theta}$$

$$\text{soit } \frac{k D^3}{8 G I_0} d\theta = \frac{1}{\Delta_{\text{tot}}} ds \quad - \text{ En intégrant le}$$

$$\text{long du ressort (N spires): } \frac{k D^3}{8 G I_0} \times N \times 2\pi = \frac{1}{\Delta_{\text{tot}}} \times \Delta_{\text{tot}}$$

$$\text{d'où } \boxed{k = \frac{G d^4}{8 N D^3}}$$

(4)

$$\boxed{8} \quad \boxed{k = \frac{G S^2}{8 \pi^2 N D^3} \approx 30 \text{ N.m}^{-1}}$$

9) ① Considérons la masse P (!) de métal et $T(t)$, sa température (supposée uniforme) à t .

② Appliquons lui le 1^{er} principe entre les instants t et $t + dt$:

$$dU = \delta Q^{\text{ext}} \quad \text{où } \begin{cases} dU = P c dT \\ \delta Q^{\text{ext}} = -\alpha S (T - T_r) dt \end{cases}$$

$$\text{donc } P c dT + \alpha S (T - T_r) dt = 0$$

$$\text{ou encore : } dt = - \frac{P c}{\alpha S} \frac{dT}{T - T_r}$$

ce qu'on intègre entre l'entrée et la sortie du four :

$$\boxed{t = \frac{P c}{\alpha S} \ln \left(\frac{T_r - T_i}{T_r - T_f} \right)}$$

$$\boxed{10} \quad V_0 = \frac{L}{t} \quad \text{où } t \propto \frac{P}{S}$$

$$\text{Or } \left. \begin{array}{l} P = \rho V \propto d^2 \\ \text{masse!} \\ S = S_{\text{tot}} \propto d \end{array} \right\} \begin{array}{l} \triangle \text{ c'est un cylindre} \\ \text{de diamètre } d \\ \text{donc } t \propto d \end{array}$$

$$\text{d'où } \boxed{V_0 \propto d^{-1}}$$

[11] Si la conduction thermique est le phénomène prépondérant, elle se fera radialement. Donc la distance caractéristique du phénomène est d . [5]

On sait par ailleurs que $\Delta t_{diff} \approx \frac{d^2}{D_{th}}$

où $D_{th} = \frac{\lambda}{\rho c}$ (en $m^2 \cdot s^{-1}$)

Or $V_0 = \frac{L}{\Delta t}$ donc $V_0 \propto d^{-2}$

[12] On n'est pas ici en régime permanent.

→ il faut comparer les 2 flux conductif :

$$\varphi_{cd} = \left| \lambda \frac{dT}{dr} \right| \# \lambda \frac{T_r - T}{d}$$

et conducto-convectif : $\varphi_{cc} \# a (T_r - T)$

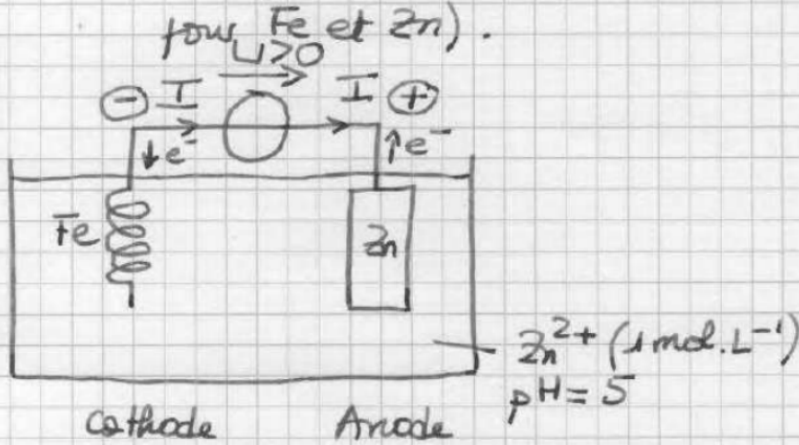
si $a \gg \frac{\lambda}{d}$: le phénomène est limité par la conduction (la conducto-convection n'est pas limitante) et c'est le modèle $V_0 \propto d^{-2}$ (cf. [11]) qui est le bon.

si $a \ll \frac{\lambda}{d}$: la conduction est beaucoup plus efficace que la conducto convection. Cette dernière est le phénomène qui pilote le confortement (car phénomène limitant) : c'est le modèle $V_0 \propto d^{-1}$ qui est le bon (cf. [10]).

[13] revêtement complet de zinc : le zinc est soumis ^(uniforme) à la corrosion, et non le fer. Mais la surtension cathodique de l'eau sur Zn est plus élevée que sur Fe : quasi-blocage cinétique. [6]

- ⊙ si revêtement abîmé: Zn est corrodé (anode locale), l'eau (et/ou O₂) est réduite sur Fe (cathode locale) - C'est le principe d'une anode sacrificielle (corrosion différentielle).
- ⊙ Inconvénients possibles: diminution des performances mécaniques (inertie, élasticité) et thermiques (coefficients de dilatation différent pour Fe et Zn).

14



- ⊙ Cathode (ressort): $Zn^{2+} + 2e^- \rightarrow Zn(s)$
- ⊙ Anode (Zn): $Zn(s) \rightarrow Zn^{2+} + 2e^-$

15

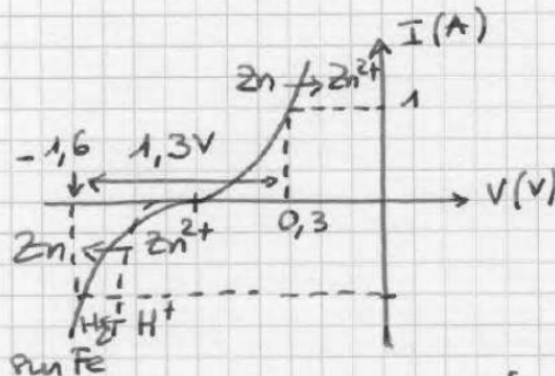
⊙ $dq = I dt$ or $dq = 2F d\xi$ (loi de Faraday)
 $= 2F \frac{dm}{M}$

avec $dm = \rho S_{tot} \cdot dl$ où $S_{tot} \approx N \times \frac{2\pi D}{2} \times \frac{2\pi L}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{S}{\pi}}$
 $= N \cdot 2D \sqrt{\pi^3 S}$ (section du fil)

d'où $\Delta t = \frac{4F\rho ND \sqrt{\pi^3 S}}{MI}$

A.N. $\Delta t \approx 3 \text{ h}$

⊙ On lit:



Il ne faut évidemment pas oublier la chute ohmique

$$R_0 I = 5V$$

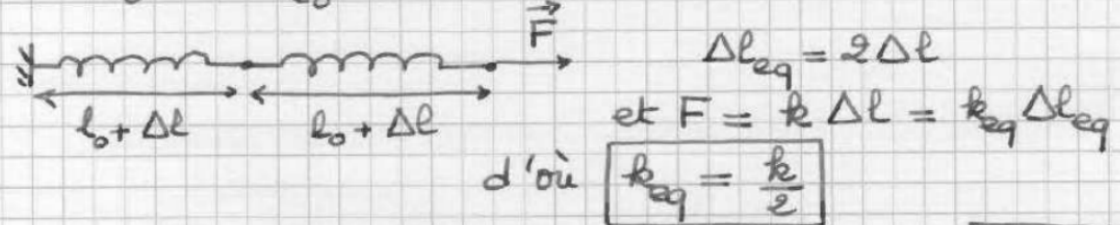
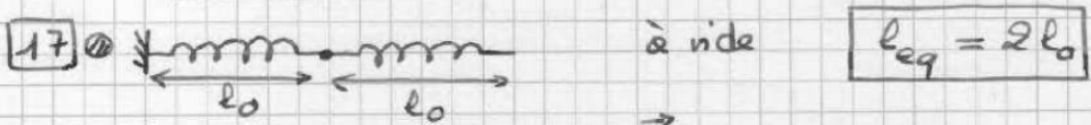
donc $U = 1,3 + 5 = 6,3V$

⑦ $W_{elec} = UI \Delta t \approx 70 \text{ kJ}$

16 ⑧ le potentiel de Nernst du couple H_2O/H_2 à $pH=5$ vaut $E = 0,00 - 0,06 \times 5 = -0,30V$.

⑨ la vague cathodique de l'eau démarre donc à $E + \eta_c = -0,95V$
 → elle est donc à droite de la vague cathodique de Zn^{2+} sur Fe, et parasitera donc l'électrolyse: le rendement faradique sera donc plus faible.

Partie II: Propagation d'ondes d'élongation dans un ressort. ⑧



⑩ Si on considère N ressorts en série, on a: $k_{eq} = \frac{k}{N}$
 or $l_{eq} = N l_0$ donc $k_{eq} = k \cdot \frac{l_0}{l_{eq}} \propto \frac{1}{l_{eq}}$
 $k_{eq} = \frac{\alpha}{l_{eq}}$ où $\alpha = k l_0$

⑪ Pour un ressort hélicoïdal, $L_0 = N p$ (pas à vide)
 et, d'après [7], $k = \frac{G d^4}{8 N D^3} = \frac{\alpha}{L_0}$
 avec $\alpha = \frac{G d^4 p}{8 D^3}$

18) Allongement de la tranche $[x, x+dx]$:

$$\underbrace{x + dx + \xi(x+dx, t) - (x + \xi(x, t))}_{\text{longueur hors équilibre}} - \underbrace{dx}_{\substack{\uparrow \\ \text{longueur} \\ \text{à l'équilibre}}}$$

soit un allongement $\frac{\partial \xi}{\partial x}(x, t) dx$ à l'ordre 1

la raideur de cette tranche vaut $k = \frac{\alpha}{dx}$
d'après 17)

sans se préoccuper du signe, la force s'exerçant à ses extrémités vaut $k \times \text{allongement} = \alpha \frac{\partial \xi}{\partial x}(x, t)$

Signe : Supposons l'allongement de la tranche positif : $\frac{\partial \xi}{\partial x}(x, t) > 0$.

→ la tranche exerce en x une force > 0 sur la partie "avant" (elle est allongée).

$$\text{donc } F_{d \rightarrow g}(x, t) = + \alpha \frac{\partial \xi}{\partial x}(x, t).$$

→ d'après le principe des actions réciproques, la force demandée, $F_{g \rightarrow d}(x, t)$, vaut donc :

$$F(x, t) = F_{g \rightarrow d}(x, t) = - \alpha \frac{\partial \xi}{\partial x}(x, t)$$

19) on applique le PFD à la tranche :

$$\Delta m \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = F(x, t) - F(x+dx, t)$$

$$\text{i.e. } \mu dx \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = - \alpha \frac{\partial \xi}{\partial x}(x, t) + \alpha \frac{\partial \xi}{\partial x}(x+dx, t)$$

ce qui donne, à l'ordre 1 :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\mu}{\alpha} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

$$\text{où } c = \sqrt{\frac{\alpha}{\mu}}, \quad \mu = \frac{m_{\text{ressort}}}{l_0} \quad (\text{masse linéique})$$

EXERCICE 3 : POLES GEOGRAPH. ET MAGNETIQUES (Mines-Ponts PSI 2019)

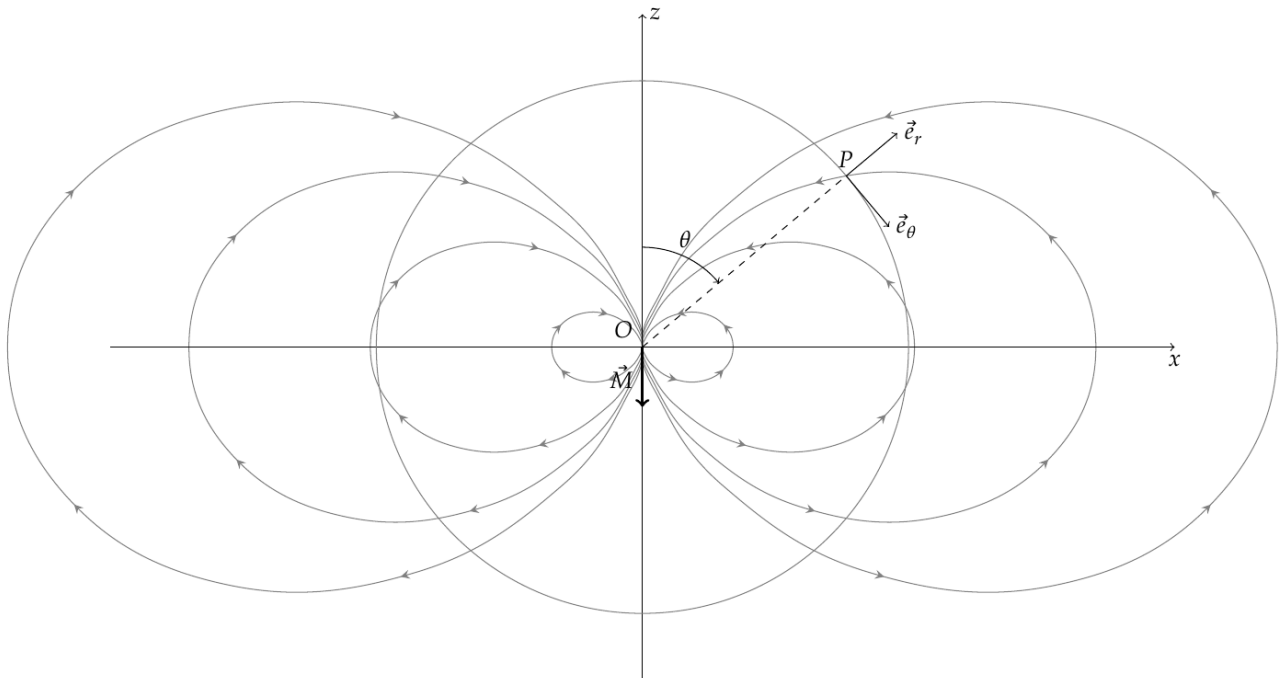
I.A Boussole, champ magnétique et dipôle centrale

Le type de boussole décrit dans cet énoncé ne correspond pas aux boussoles utilisées actuellement par les randonneurs :

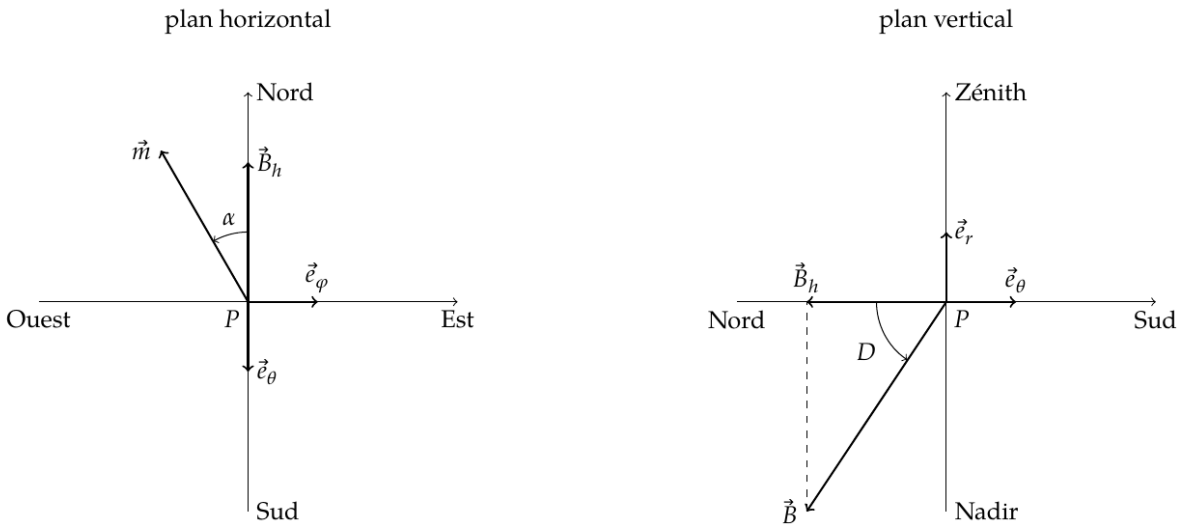


- L'aiguille des boussoles modernes n'est pas aimantée, elle est constituée d'un matériau qui n'a pas de propriété magnétique particulière. Cette aiguille sert uniquement à indiquer la direction du nord magnétique.
- Des aimants permanents de petite dimension sont placés sur une pièce mobile près de l'axe de rotation de la boussole. Cette pièce magnétique a un diamètre de l'ordre du millimètre.
- La direction du moment magnétique de la boussole n'est pas confondu avec celui de l'aiguille aimantée : si la boussole est prévue pour être utilisée dans l'hémisphère nord, le moment magnétique est incliné d'environ 60° vers le bas. Si la boussole est conçue pour être utilisée en Australie, dans le sud de l'Amérique ou de l'Afrique, le moment magnétique est incliné d'environ 60° vers le haut.
- Certaines boussoles indiquent le nord correctement sur toute la surface de la Terre à l'exception des régions polaires : les aimants sont placés sur une pièce qui est en liaison rotule avec le corps de la boussole. Le moment magnétique peut donc avoir une composante importante vers le haut ou vers le bas sans que l'aiguille ne soit affectée par ce mouvement.
- La capsule des boussoles modernes est rempli d'un liquide qui joue deux rôles. D'une part, la poussée d'Archimède qui s'exerce sur les parties mobiles permet de réduire les forces verticales, et donc les frottements solide entre l'équipage mobile et le pivot. D'autre part, les frottements fluides réduisent les oscillations de l'aiguille, les boussoles ont souvent un amortissement proche de la valeur critique, l'aiguille se place alors rapidement et sans osciller dans la direction du nord. (On n'observe pas les oscillations décrites à la question 2 avec une boussole moderne.)
- Les pivots et les pièces magnétiques utilisés font que l'aiguille ne pivote librement que si l'axe de la boussole est proche de la verticale. Si l'écart est de 20° ou plus, les frottements entre l'aiguille et la capsule sont tels que l'aiguille ne bouge pas. Il est impossible, en plaçant l'axe à l'horizontal de mettre en évidence l'inclinaison du champ magnétique terrestre. (La réponse suggérée par l'énoncé à la question 5 n'est pas réalisable.)

1. La carte de champ magnétique dipolaire a l'allure suivante :



En un point P à la surface de la Terre :

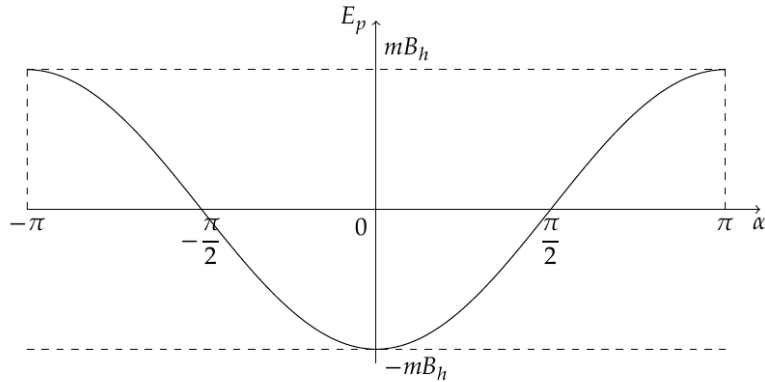


L'énergie potentielle d'interaction entre le moment magnétique de la boussole et le champ magnétique terrestre est :

$$E_p = -\vec{m} \cdot \vec{B}$$

En notant \vec{B}_h la composante horizontale du champ magnétique terrestre, qui est dirigée vers le nord : $E_p = -\vec{m} \cdot \vec{B}_h$.

Donc $E_p = -mB_h \cos \alpha$.



La position $\alpha = 0$ correspond à un minimum d'énergie potentielle, il s'agit donc d'une position d'équilibre stable.

L'aiguille indique le nord et cette position est stable.

2. L'énergie cinétique de l'aiguille est $E_c = \frac{1}{2}I\dot{\alpha}^2$ et l'énergie mécanique totale est $E_m = \frac{1}{2}I\dot{\alpha}^2 - mB_h \cos \alpha$.

La conservation de l'énergie se traduit par $\frac{dE_m}{dt} = 0$. Donc $I\frac{d^2\alpha}{dt^2} + mB_h \sin \alpha = 0$

Pour de petits mouvements : $\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{mB_h}{I} \sin \alpha = 0$

La période d'oscillation est alors : $\tau_{osc} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{I}{mB_h}}$.

La période d'oscillation permet de connaître la composante horizontale du champ magnétique : $B_h = \frac{I}{4\pi^2 \tau_{osc}^2 m}$

3. Le champ magnétique est $\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\vec{R}(\vec{M} \cdot \vec{R}) - R_T^2 \vec{M}}{R_T^3}$ avec $\begin{cases} \vec{R} = R_T \vec{e}_r \\ \vec{M} = M_0 (\cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta) \end{cases}$.

$$\text{Donc } \vec{B}(P) = \frac{\mu_0 M_0}{4\pi} \frac{3 \cos \theta \vec{e}_r - (\cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta)}{R_T^3}$$

$$\text{Donc } \vec{B}(P) = \frac{\mu_0 M_0}{4\pi} \frac{2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta}{R_T^3}$$

4. En un point de l'équateur, $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $\vec{B} = B_E \vec{e}_z = -B_E \vec{e}_\theta$.

$$\text{Donc } \frac{\mu_0 M_0}{4\pi R_T^3} \vec{e}_\theta = -B_E \vec{e}_\theta. \text{ Donc } M_0 = -\frac{4\pi R_T^3 B_E}{\mu_0}. \quad M_0 < 0 \text{ et } M_0 = -7,9 \cdot 10^{22} \text{ Am}^2$$

Avec $\theta = 0$ au pôle nord et $\theta = \pi$ au pôle sud, le champ magnétique est $\vec{B}_p = -\frac{2\mu_0 M_0}{4\pi R_T^3} \vec{e}_z$. Donc $B_p = 2B_E = 6,0 \cdot 10^{-5} \text{ T}$

5. L'angle D défini par l'énoncé n'est pas la déclinaison magnétique mais l'inclinaison, généralement notée I .

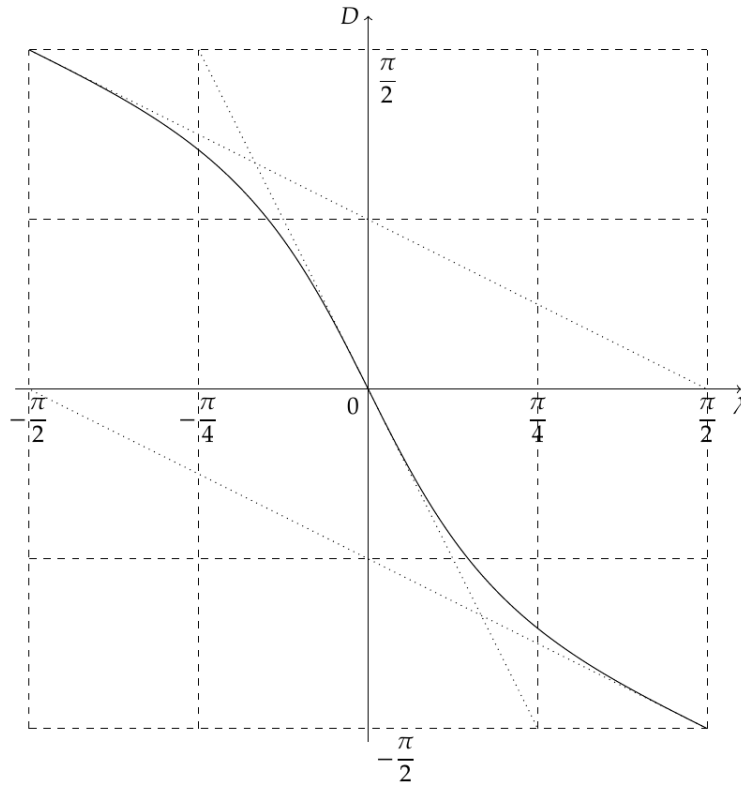
- Dans l'hémisphère nord, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, et $\vec{B} \cdot \vec{e}_r < 0$. La composante verticale du champ magnétique est dirigée vers le bas.

Dans l'hémisphère nord, l'inclinaison est négative.

- $\tan D = -\frac{\vec{B} \cdot \vec{e}_r}{\vec{B} \cdot \vec{e}_\theta}$.

Donc $\tan D = -2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$. Or $\lambda = \frac{\pi}{2} - \theta$ et donc $\tan D = -2 \tan \lambda$

- Le graphique donnant l'inclinaison D en fonction de la latitude est :



- À proximité des pôles, la composante horizontale du champ magnétique terrestre est faible. Le couple qui oriente l'aiguille de la boussole est donc beaucoup plus faible qu'à l'équateur ou aux latitudes moyennes. En outre, les courants électriques dans la haute atmosphère sont plus intenses au voisinage des régions polaires. Les champs magnétiques créés par ces courants peuvent avoir une influence comparable ou supérieure à celle du champ terrestre. L'aiguille de la boussole peut avoir une direction fluctuante et parfois éloignée de celle du pôle nord.

- Pour déterminer dans quel hémisphère on se trouve, on pourrait être tenté de placer l'axe de la boussole horizontalement, dans la direction Est-Ouest. Si le pôle nord de l'aiguille plonge vers le sol, la boussole est dans l'hémisphère nord. Inversement, si le pôle nord se dirige vers le haut, la boussole est dans l'hémisphère sud. Mais cette technique ne fonctionne pas avec les boussoles usuelles. Les frottements entre l'aiguille et la capsule sont trop importants dans cette position.

Il est possible d'utiliser une boussole d'inclinaison, comme celle représentée ci-contre. L'axe de cette boussole doit être placé perpendiculairement au méridien magnétique et l'aiguille s'aligne alors avec le champ magnétique terrestre. Cette boussole permet de déterminer l'angle d'inclinaison, et donc de savoir dans quel hémisphère on se trouve.

Avec une boussole moderne conçue pour fonctionner dans l'hémisphère nord, il suffit de regarder si l'aiguille se déplace librement lorsque la boussole est placée dans la position usuelle, avec son axe vertical. Si c'est le cas, vous êtes dans l'hémisphère nord. Si l'aiguille frotte sur les parois de la capsule, vous êtes dans l'hémisphère sud.

Enfin, il est possible d'attendre que la nuit tombe et d'observer les étoiles. La réponse à la question est alors évidente, mais la boussole ne sert à rien.



6. La force de LORENTZ est $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}_0$. Cette force ne travaille pas : l'énergie cinétique se conserve. Donc la norme de la vitesse est constante.

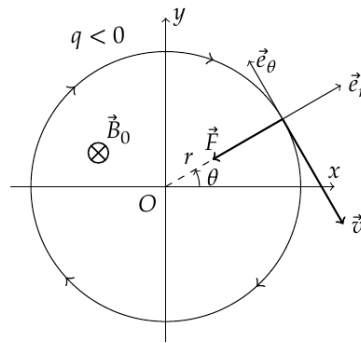
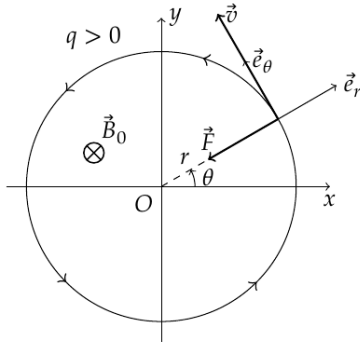
La mouvement est circulaire uniforme.

Pour un mouvement circulaire uniforme, la vitesse est $\vec{v} = r\omega_c\vec{e}_\theta$ l'accélération est $\vec{a} = -r\omega_c^2\vec{e}_r$.

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à la particule chargée est alors : $m\vec{a} = q\vec{v} \wedge \vec{B}_0$.

Donc $mr\omega_c^2 = |q|B_0r\omega_c^2$ et donc $\omega_c = \frac{|q|B_0}{m}$

Le sens de parcours dépend du signe de la charge q :



7. L'intensité comptée positivement dans le sens trigonométrique, associée à la rotation de la particule chargée est $i = \frac{q}{T}$ où $T = \frac{2\pi r}{v}$ est la période de révolution.

Le moment magnétique associé à la boucle de courant est $\vec{M} = \pi r^2 i \vec{e}_z$. Donc $\vec{M} = \frac{1}{2} r q v \vec{e}_z$.

Et donc $\vec{M} \cdot \vec{B}_0 = -\frac{1}{2} r q v B_0$. Or, en utilisant la relation fondamentale de la dynamique $q v B_0 = m \frac{v^2}{r}$.

Donc $\vec{M} \cdot \vec{B}_0 = -\frac{1}{2} m v^2$, et donc $\vec{M} \cdot \vec{B}_0 = -E_c$

8. La situation au voisinage du pôle nord est représenté ci-contre.

Le champ magnétique terrestre est $\vec{B}_0 = -B_0(z)\vec{e}_z$ avec $B_0 > 0$.

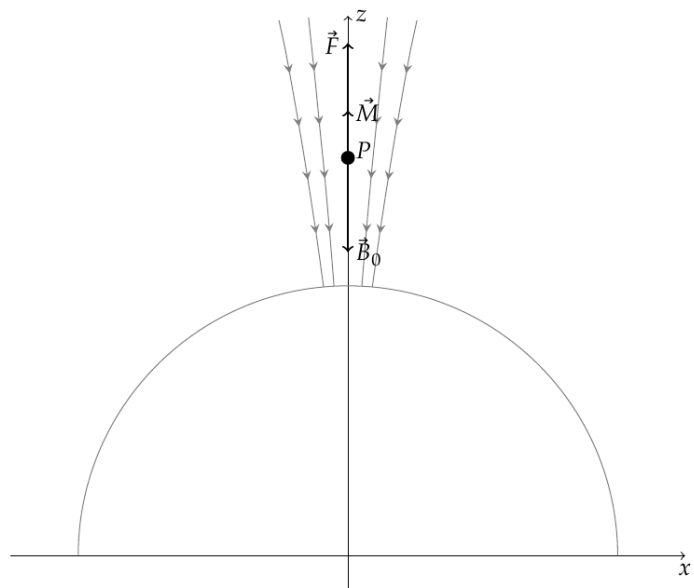
Sur l'axe Oz, la norme du champ magnétique décroît avec l'altitude, donc $\frac{dB_0}{dz} < 0$

Le mouvement du proton a été décrit à la question 6 : $\vec{M} = M_z \vec{e}_z$ avec $M_z > 0$.

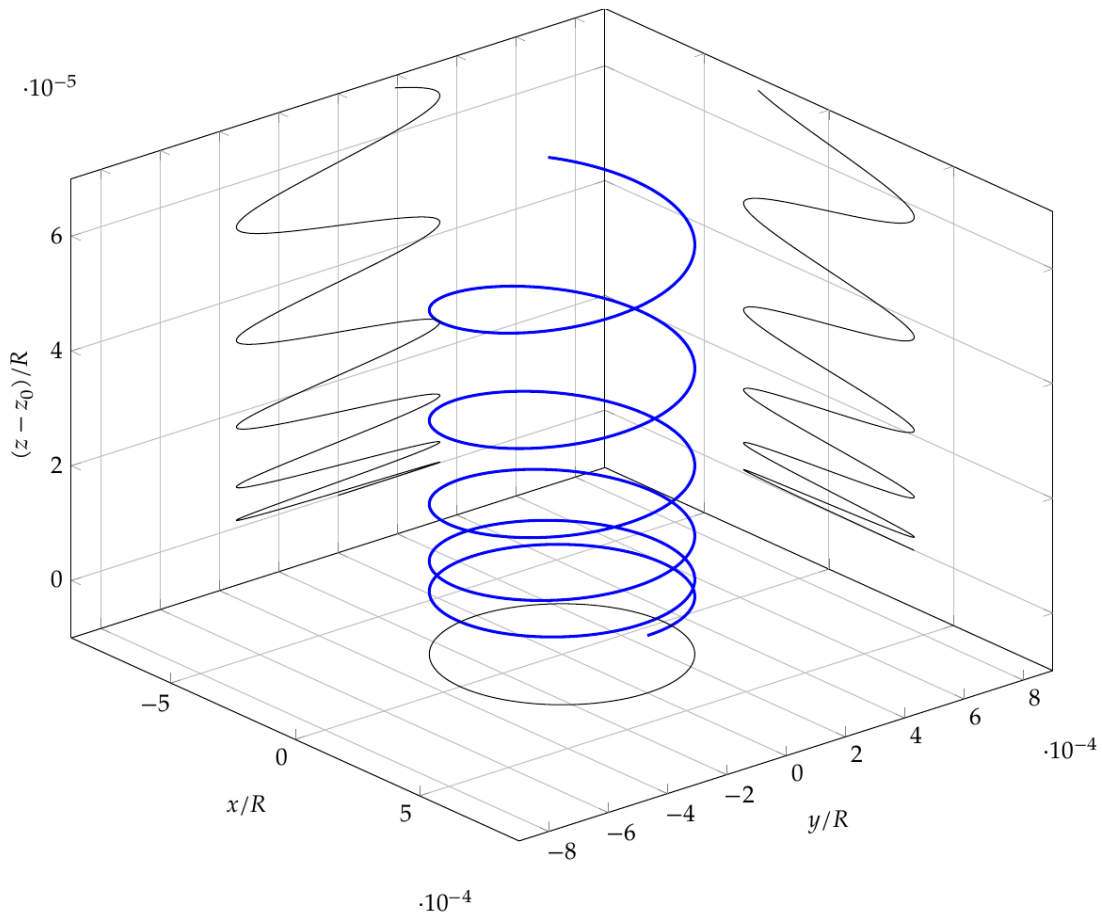
La force subit par le proton est $\vec{F} = -M_z \frac{dB_0}{dz} \vec{e}_z$

avec $= -M_z \frac{dB_0}{dz} > 0$. Donc $\vec{F} = F_z \vec{e}_z$ avec $F_z > 0$.

$$\begin{cases} \vec{B}_0 = -B_0(z)\vec{e}_z & \text{avec } B_0 > 0 \\ \vec{M} = M_z \vec{e}_z & \text{avec } M_z > 0 \\ \vec{F} = F_z \vec{e}_z & \text{avec } F_z > 0 \end{cases}$$

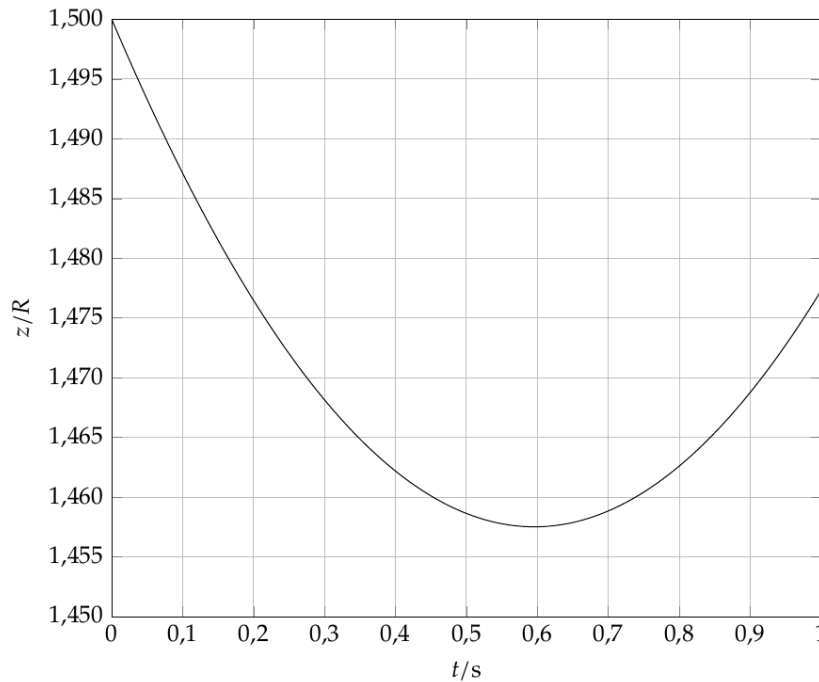


La force de LORENTZ ne travaille pas, la norme de la vitesse est donc constante au cours du mouvement. La trajectoire d'un proton est une hélice dont le pas et le rayon sont variables. La courbe ci-dessous donne l'allure de la trajectoire pour quelques périodes cyclotron.



Le mouvement de rotation est due à la force de LORENTZ, qui est essentiellement dirigée vers l'axe de la trajectoire hélicoïdale qui est une ligne de champ.

Le mouvement de dérive est due à la force moyenne $\vec{F} = -M_z \frac{dB_0}{dz} \vec{e}_z$. La figure ci-dessous donne l'allure de l'altitude $z(t)$ d'un proton. La force \vec{F} est dirigée vers le haut (dans le sens des z croissants.)



Si l'on ne considère que la composante verticale du mouvement, le proton est freiné lorsqu'il s'approche de la Terre, il est accéléré lorsqu'il s'en éloigne.

9. L'équation de MAXWELL-THOMSON s'écrit $\text{div } \vec{B} = 0$.

Donc avec un champ magnétique de la forme $\vec{B}_0 = -B_0(z)\vec{e}_z$, l'équation de MAXWELL-THOMSON implique $\frac{dB_0}{dz} = 0$ et donc $G_m(z) = 0$.

En réalité, le champ magnétique au voisinage de l'axe (Oz) est de la forme $\vec{B} \approx -B_0(z,r)\vec{e}_z - B_r(r,z)\vec{e}_r$ avec $B_r(r,z) \ll B_0(z)$.

L'équation de MAXWELL-THOMSON implique alors $\frac{\partial B_0}{\partial z} = -\frac{\partial B_r}{\partial r}$. Et alors $G_m(z) \neq 0$.

10. Les équations obtenues aux questions précédentes :

$$\begin{cases} E_c = M(z)B_0(z) & \text{énergie cinétique constante} \\ F_z = -M(z)\frac{dB_0}{dz} & \text{force de dérive} \\ B_0(z) = \frac{\mu_0 M_0}{2\pi z^3} & \text{champ magnétique sur l'axe (Oz)} \end{cases}$$

Donc
$$\begin{cases} F_z = -\frac{E_c}{B_0(z)} \frac{dB_0}{dz} \\ \frac{1}{B_0(z)} \frac{dB_0}{dz} = -\frac{3}{z} \end{cases}$$

Donc, la force de dérive qui agit sur un proton est $F_z = \frac{2E_c}{z}$.

Au voisinage immédiat de la Terre, les forces qui agissent sur le proton sont la force de dérive et le poids :

$$\begin{cases} F_z = \frac{2E_c}{R_T} & \text{force de dérive} \\ P = mg & \text{poids} \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_z = 3,8 \cdot 10^{-23} \text{ N} & \text{force de dérive} \\ P = 1,7 \cdot 10^{-26} \text{ N} & \text{poids} \end{cases}$$

Avec les valeurs précédentes $\frac{P}{F_z} = 4,4 \cdot 10^{-4}$. Le poids est négligeable devant la force dérive.