

calculatrice autorisée

**EXERCICE 1 : ETUDE DE RESSORTS**

Les ressorts sont des dispositifs mécaniques permettant d'exercer des efforts élastiques.

Dans une première partie on étudiera : d'une part, l'influence des matériaux utilisés et de la géométrie des ressorts sur leurs caractéristiques mécaniques, d'autre part, certains traitements thermiques ou chimiques qui permettent d'améliorer leurs performances.

Dans une seconde partie, on étudiera la propagation d'ondes longitudinales dans un ressort hélicoïdal.

**Données numériques :**

Nombre d'avogadro :	$N_a = 6,0 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Charge de l'électron :	$-e = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

*Sur le Fer :*

Masse molaire :	$M_{\text{Fe}} = 56 \text{ g.mol}^{-1}$
Masse volumique :	$\rho_{\text{Fe}} = 7,9 \text{ g.cm}^{-3}$
Module d'Young :	$E_{\text{Fe}} = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$
Energie surfacique $\gamma$ :	$\gamma_{\text{Fe}} = 2,0 \text{ J.m}^{-2}$
Constante de torsion :	$G_{\text{Fe}} = 8,1 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$

*Sur le Zinc :*

Masse molaire :	$M_{\text{Zn}} = 65 \text{ g.mol}^{-1}$
Masse volumique :	$\rho_{\text{Zn}} = 7,1 \text{ g.cm}^{-3}$

*Potentiels standard d'oxydoréduction à 298 K :*

$$E^0(\text{Fe}^{2+} / \text{Fe}) = -0,44 \text{ V} \quad E^0(\text{Zn}^{2+} / \text{Zn}) = -0,76 \text{ V} \quad E^0(\text{H}_2\text{O} / \text{H}_2) = 0 \text{ V}$$

**I.1°) Caractérisation d'un ressort hélicoïdal**

La fabrication d'un ressort hélicoïdal se fait en enroulant un fil métallique sur un cylindre.

Les caractéristiques du ressort final dépendent du matériau utilisé et de sa géométrie. Nous allons nous intéresser à la limite en traction du fil métallique et à la relation entre les paramètres géométriques et la raideur du ressort.

**I.1°) a) Résistance théorique à la rupture du fil métallique**

On cherche à évaluer la contrainte maximale en traction que peut supporter un fil métallique avant de se rompre. Pour ce faire, on modélise les liaisons entre les atomes dans le fil par des ressorts. On suppose pour simplifier que le fil est constitué de plans d'atomes parallèles où les atomes en vis-à-vis sont reliés par des ressorts de raideurs  $k$  et de longueur à vide  $a_0$  (correspondant à la distance entre les deux plans en l'absence de contrainte extérieure). La figure 1 représente dans sa partie gauche un fil de section  $S$  et de longueur  $L$ , dans la partie droite on a représenté la modélisation par des ressorts entre les atomes des deux plans  $P_1$  et  $P_2$ . Sous l'action de la force de traction  $\vec{F}$ , la distance entre les plans  $P_1$  et  $P_2$  passe de  $a_0$  à  $a$ . On admettra que la distance entre les atomes dans les plans  $P_1$  (respectivement  $P_2$ ) est  $a_0$  et le reste en présence de la force de traction  $\vec{F}$ .

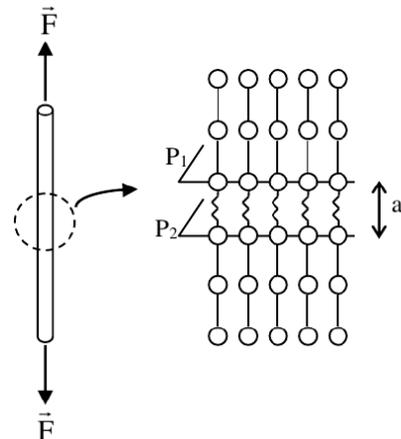


Figure 1

- Justifier la modélisation de l'interaction entre les atomes par des ressorts. Donner une condition d'application de ce modèle. Dans le cas où l'énergie d'interaction entre deux atomes s'exprime à l'aide d'une fonction  $U(a)$ , donner l'expression de la raideur  $k$  des ressorts en fonction de  $U$ .
- On admet que le fil se rompt quand l'énergie élastique emmagasinée dans les ressorts entre les plans  $P_1$  et  $P_2$  est supérieure ou égale à l'énergie nécessaire pour créer les interfaces métal-air résultantes de cette rupture. On appelle  $\gamma$  l'énergie surfacique nécessaire pour créer une interface d'aire unité. Exprimer la force maximale  $F_{\max}$  au-delà de laquelle le fil se rompt en fonction de  $\gamma$ ,  $S$ ,  $a_0$  et  $k$ .
- En résistance des matériaux, la loi de Hooke relie la contrainte surfacique qui s'exerce sur une section d'un barreau cylindrique avec son allongement relatif :  $\sigma = E\varepsilon$  où  $E$  est le module d'Young, caractéristique du matériau,  $\sigma$  la force surfacique et  $\varepsilon$  l'allongement relatif, quotient de l'allongement sur la longueur initiale. A l'aide de cette loi et du modèle des ressorts développé précédemment relier la raideur  $k$  à  $E$  et  $a_0$ . En déduire l'expression de  $F_{\max}$  en fonction de  $E$ ,  $S$ ,  $\gamma$  et  $a_0$ .
- Application numérique : Evaluation de  $F_{\max}$  pour un fil de fer.
  - Evaluer un ordre de grandeur de  $a_0$  qu'on assimile au paramètre de maille du Fer qui cristallise à température ambiante dans un réseau cubique centré (dont la maille est constituée d'un atome au centre et d'un atome en chacun des huit sommets d'un cube de côté  $a_0$ ).
  - Calculer  $F_{\max}$  pour un fil de fer de section  $S = 5 \text{ mm}^2$
- En réalité les mesures expérimentales donnent une valeur de  $F_{\max}$  de l'ordre de 100 fois plus faible que celle calculée à la question précédente. Quels aspects du modèle de l'étude précédente peut-on remettre en cause pour expliquer un tel écart ?

#### I.1°) b) Raideur

On étudie un ressort caractérisé par les paramètres géométriques suivant : longueur à vide  $L_0$ , diamètre moyen  $D$ , diamètre du fil  $d$ , pas à vide  $p$ , nombre de spires  $N$  ; longueur sous la contrainte  $F$  :  $L$  et allongement  $s = L - L_0$ . Toutes ces grandeurs sont indiquées sur la figure 2 ci-contre.

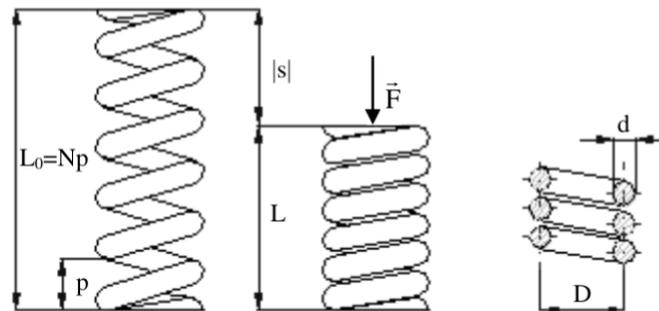


Figure 2

On isole la partie supérieure du ressort entre une section  $S$  (en gris sur la figure 3) et l'extrémité supérieure. On admet que l'extrémité supérieure du ressort est sur l'axe de symétrie de ce dernier ; ce qui a pour conséquence que la force extérieure appliquée sur l'extrémité du ressort à son point d'application comme indiqué sur la figure 3.

- Justifier qu'à l'équilibre les actions de la partie inférieure du ressort sur la partie supérieure ont une résultante égale à  $-\vec{F}$ . Calculer le couple  $\vec{M}_t$  que la partie inférieure du ressort exerce sur la section  $S$ , montrer que  $M_t = FD/2$ .

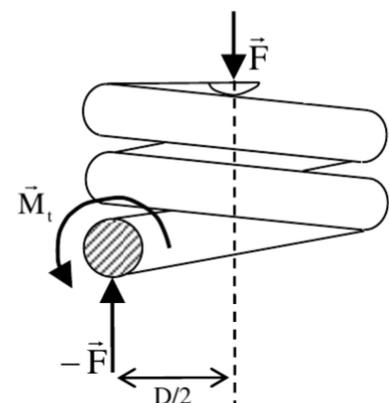


Figure 3

On isole un tronçon de ressort de longueur  $d\ell = \frac{D}{2}d\theta$ . Quand le ressort est à vide, le tronçon est supposé horizontal au premier ordre. Lors de la compression, le moment de torsion calculé à la question précédente fait tourner la face B d'un angle  $d\alpha$  ce qui entraîne un déplacement vertical  $ds$  (Figure 4 : en pointillé l'emplacement de la face B quand le ressort est à vide).

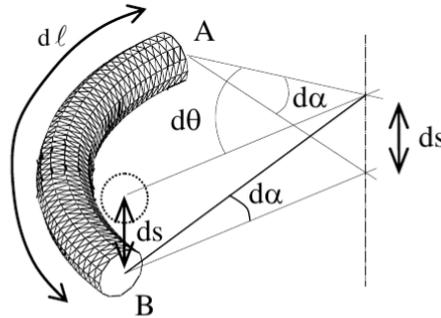


Figure 4

En résistance des matériaux la torsion est caractérisée par la loi suivante :  $M_t = GI_0 \frac{d\alpha}{d\ell}$  où  $G$  est la constante de torsion (aussi appelée module de Coulomb) caractéristique du matériau et  $I_0$  est le moment quadratique de torsion, dépendant de la forme de la section ici  $I_0 = \pi \frac{d^4}{32}$ .

7. Calculer l'allongement total du ressort  $s = L - L_0 = \int_{\text{fil}} ds$ . En déduire que la constante de raideur  $k$  du ressort s'écrit :  $k = \frac{Gd^4}{8ND^3}$ .

8. Application numérique : Calculer la raideur d'un ressort de diamètre  $D = 2$  cm comprenant  $N = 100$  spires, fait avec un fil de fer de section  $S = 5$  mm<sup>2</sup>.

### I.2°) Traitements complémentaires

Une fois le ressort fabriqué, c'est-à-dire le fil enroulé de manière hélicoïdale autour d'un axe, certaines opérations de finitions peuvent être appliquées sur le ressort pour améliorer ses performances. On se propose dans cette partie d'étudier deux de ces opérations.

#### I.2°) a) Traitement thermique de revenu

On effectue souvent un traitement thermique (appelé "revenu") pour éliminer les contraintes internes emmagasinées lors de la déformation plastique du fil et augmenter la limite élastique. Ce traitement de "revenu" consiste à chauffer le matériau métallique à une température qui peut être comprise entre 200 et 500 °C et à le laisser refroidir lentement. Pour cela, les ressorts produits sont placés sur un tapis roulant qui traverse un four parcouru par un courant d'air chaud dont on peut fixer la température et la vitesse. La vitesse de déplacement du tapis est déterminée pour que les ressorts restent dans l'enceinte du four pendant le temps désiré.

Dans un cours de l'Université du Québec sur les traitements thermiques on peut trouver l'encadré de la figure 5. On y lit une formule donnant le temps nécessaire pour qu'un matériau passe de la température  $T_i$  à  $T_f$  quand il est soumis à un courant d'air chaud. Le coefficient  $a$  est le coefficient de la relation de Newton donnant la puissance thermique surfacique échangée  $\phi$  entre la paroi d'un solide et un fluide :  $\phi = a(T_{\text{paroi}} - T_{\text{fluide}})$ .

Université du Québec

## Temps de montée en température

*Le temps de chauffage est déterminé par la vitesse de circulation de l'air chaud*

$$t = \frac{P \times C}{S \times a} \times \log \left( \frac{T_r - T_i}{T_r - T_f} \right)$$

***t (h): temps de chauffage***  
***P (kg) : Poids du métal à traiter***  
***S (m<sup>2</sup>) : Surface du métal***  
***T<sub>i</sub> (°C): température initiale***  
***T<sub>f</sub> (°C): température finale***  
***T<sub>r</sub> (°C): température du courant d'air***

***C (kcal/kg °C): chaleur spécifique du métal***  
***a (kcal/m<sup>2</sup>h °C): coefficient de transmission de chaleur. Il est lié à la vitesse de passage de l'air***  
 À 0.3 m/s, a = 8  
 2 m/s, a = 16  
 10 m/s, a = 35 à 40  
 20 m/s, a = 66

MEC-200 – Technologie des matériaux 66 Session 8

[https://cours.etsmtl.ca/mec200/documents/Notes\\_de\\_cours/2010/Automne%202010/Cours%209%20-%20Traitement%20thermiques.pdf](https://cours.etsmtl.ca/mec200/documents/Notes_de_cours/2010/Automne%202010/Cours%209%20-%20Traitement%20thermiques.pdf)

Figure 5

9. Redémontrer la formule de l'encadré en précisant la modélisation adoptée et les approximations que vous avez été amené à faire.

10. Les ressorts à traiter sont déposés sur un tapis roulant qui traverse un four sur une distance de  $L = 2$  m à vitesse constante  $V_0$ . En supposant que le temps de passage dans le four corresponde au temps de montée en température évalué à la question précédente, relier la vitesse  $V_0$  au diamètre  $d$  du fil qui constitue le ressort sous la forme  $V_0 = \alpha d^n$ . Donner la valeur de  $n$ .

11. Dans la modélisation précédente, la conductivité du fer  $\lambda_{Fe}$  n'intervient pas. Dans le cadre d'une modélisation qui supposerait que la conduction thermique est le phénomène physique prépondérant, comment évaluer un ordre de grandeur du temps de montée en température ? En déduire une nouvelle relation entre  $V_0$  et  $d$  sous la forme :  $V_0 = \beta d^m$ . Donner la valeur de  $m$ .

12. Donner une inéquation reliant les paramètres  $a$ ,  $d$  et  $\lambda_{Fe}$  qui permette de valider l'une ou l'autre des modélisations précédentes.

### I.2°) b) Traitement anticorrosion

On réalise aussi régulièrement, des traitements anticorrosion en recouvrant la surface du ressort avec un matériau protecteur. Une des possibilités est de recouvrir le ressort d'une fine couche de zinc.

13. Expliquer en quoi la présence du zinc permet de protéger de la corrosion le fer qui constitue le ressort. Donner les avantages et les inconvénients de cette protection ainsi que les précautions à prendre pour qu'elle soit efficace.

Le procédé utilisé pour recouvrir le ressort d'une couche micrométrique de zinc est l'électrolyse : le ressort est utilisé comme l'une des électrodes d'un électrolyseur l'autre électrode étant en zinc. La solution électrolytique contient des ions  $Zn^{2+}$  à la concentration d'une mole par litre, les autres ions étant spectateurs, et son pH étant maintenu autour de 5.

14. Faire un schéma de principe de l'électrolyseur. Ecrire les demi réactions qui ont lieu en précisant quelle électrode est la cathode et laquelle est l'anode. On indiquera aussi le sens de parcours du courant et la polarité du générateur branché aux bornes de l'électrolyseur.

15. L'électrozinguage du ressort est effectué dans une cuve électrolytique de résistance interne  $R_0 = 5 \Omega$ . On utilise un générateur de courant délivrant une intensité de  $I = 1 \text{ A}$ .

- Evaluer le temps d'électrolyse minimum nécessaire pour déposer une couche de  $10 \mu\text{m}$  sur le ressort de la question 8.

- En utilisant les courbes intensité-potential de la figure 6, donner la tension relevée aux bornes des électrodes.

- En déduire l'énergie électrique nécessaire pour recouvrir le ressort de zinc.

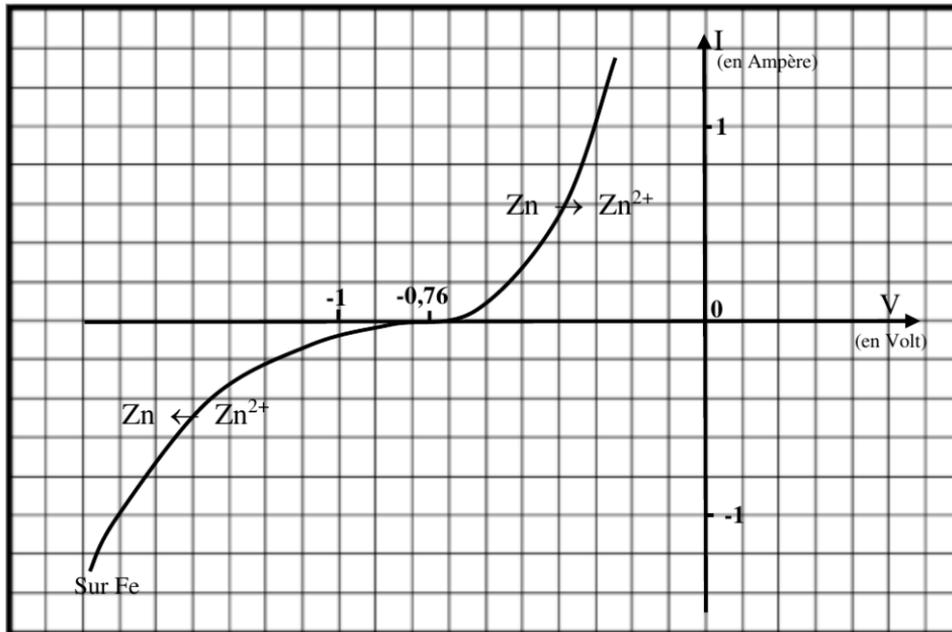


Figure 6

16. La surtension cathodique à vide de la réduction de l'eau sur une électrode en fer est de l'ordre de  $-0,65 \text{ V}$ . Cette réaction a-t-elle une influence sur le phénomène d'électrozinguage étudié précédemment ?

## **Partie II : Propagation d'ondes d'élongation dans un ressort.**

### **II.1°) Equation de propagation**

On cherche à établir dans cette sous-partie l'équation de propagation des ondes d'élongations longitudinales dans un ressort. On s'intéresse à un ressort d'axe (Ox). On repère par  $\xi(x, t)$  le déplacement lors du passage de l'onde d'un point du ressort situé en  $x$  quand le ressort est à vide.

17. *Question préliminaire :*

- Soit deux ressorts identiques de raideur  $k$  et de longueur à vide  $\ell_0$ . Trouver la raideur  $k_{\text{eq}}$  et la longueur à vide  $\ell_{\text{eq}}$  du ressort équivalent à l'association de ces deux ressorts quand ils sont montés en série (c'est-à-dire accroché l'un à l'autre le long d'un même axe).

- Généraliser ce résultat et en déduire que la raideur d'un ressort est inversement proportionnelle à sa longueur à vide. On appellera  $\alpha$  la constante de proportionnalité.

- Ce résultat est-il compatible avec le résultat de la question 7 ? Donner l'expression de  $\alpha$  en fonction des caractéristiques géométriques du ressort.

**18. Force en un point quelconque d'un ressort :**

Soit un ressort de raideur  $k$  et de longueur à vide  $\ell_0$ , tel que  $k \cdot \ell_0 = \alpha$ . On s'intéresse à un bout élémentaire de ce ressort de longueur  $dx$  compris entre  $x$  et  $x+dx$ . Exprimer l'allongement de ce ressort élémentaire lors du passage de l'onde. Puis utiliser le résultat de la question précédente pour déterminer la force qui s'exerce à ses extrémités.

Conclure en montrant que la force en  $x$  que la partie du ressort située avant  $x$  exerce sur la partie de ressort située après  $x$  s'écrit :  $F(x, t) = -\alpha \frac{\partial \xi}{\partial x}(x, t)$ .

**19. Etablissement de l'équation de propagation :**

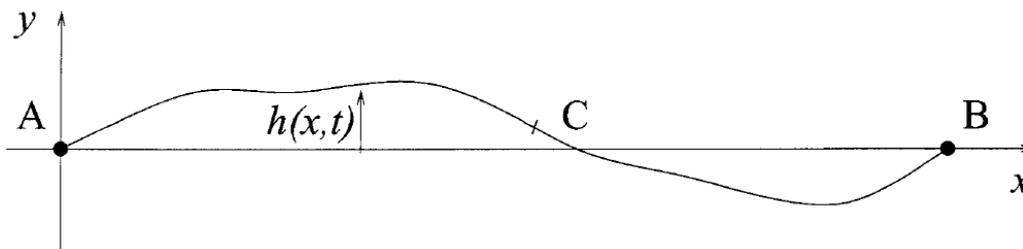
Montrer que si l'on néglige le poids du ressort, l'élongation  $\xi(x, t)$  vérifie l'équation de propagation suivante :  $\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$ . Montrer que  $c = \sqrt{\frac{\alpha}{\mu}}$  où  $\alpha$  est la constante introduite à la question 17 et  $\mu = \frac{m_{\text{ressort}}}{\ell_0}$  la masse linéique du ressort.

**EXERCICE 2 : VIBRATION TRANSVERSE LE LONG D'UNE CORDE****II.1 Ondes stationnaires le long d'une corde tendue**

Une fine corde métallique homogène, quasi-inextensible et sans raideur, de masse linéique  $\mu$ , est soumise à une tension d'équilibre  $T$ . Ses déformations dans le plan  $(x, y)$  sont décrites par une fonction de hauteur  $y = h(x, t)$ . Dans tout le problème, les déformations de la corde par rapport à l'axe horizontal sont supposées suffisamment faibles pour que :

- l'angle  $\alpha(x, t)$  que fait la courbe  $h$  avec l'horizontale soit un infiniment petit d'ordre 1, tout comme la dérivée  $\partial h / \partial x$ .
- les déplacements d'un point matériel lié à la corde n'aient qu'une composante verticale, les déplacements horizontaux étant négligeables.

Les extrémités de la corde sont dénommées A et B, d'abscisse respective  $x_A$  et  $x_B$ . Le milieu de la corde est noté C, d'abscisse  $x_C$  (Figure II.1). Tout au long du problème, on négligera les effets de pesanteur devant les forces de tension de la corde.

**Figure II.1****- II.1.1**

Soit un point O d'abscisse  $x_O$  situé dans l'intervalle  $[AB]$  ( $x_A < x_O < x_B$ ). La partie de la corde située à droite du point O ( $x > x_O$ ) exerce à chaque instant sur la partie de la corde située à sa gauche une certaine force  $\vec{F}(x_O, t)$ .

Comment s'exprime, en fonction de  $T$  et d'une dérivée de  $h(x, t)$ , la composante verticale (suivant  $y$ ) de cette force  $\vec{F}$  ?

**- II.1.2**

Etablir, dans le cadre des hypothèses énoncées ci-dessus, l'équation de d'Alembert vérifiée par  $h(x, t)$ . Exprimer la célérité  $c$  associée en fonction des paramètres  $\mu$  et  $T$ .

**- II.1.3**

Peut-on observer des discontinuités spatiales de la dérivée  $\partial h / \partial x$  en des points autres que  $A$  et  $B$ ? Justifier votre réponse.

**- II.1.4**

La corde est fixée en ses deux extrémités  $A$  et  $B$  à une hauteur nulle, soit  $h(x_A, t) = 0$  et  $h(x_B, t) = 0$ . La longueur de la corde entre ces deux points est  $2L$ , et l'on choisit l'origine du

repère de façon à avoir  $x_A = 0$  et  $x_B = 2L$ .

On recherche les ondes stationnaires de vibration de la corde sous la forme :

$$h(x, t) = Z \sin(kx + \phi) \cos(\omega t)$$

où  $Z$  est une amplitude arbitraire.

Donner, en la démontrant, la relation existant entre  $\omega$ ,  $k$  et  $c$ .

**- II.1.5**

Les valeurs admissibles de  $k$  (norme du vecteur d'onde) forment une suite de valeurs discrètes  $k_n$ , où  $n = 1, 2, 3, \dots$  est entier positif.

Donner l'expression des  $k_n$  admissibles, des pulsations propres  $\omega_n$  et des fréquences  $f_n$  associées.

Comment choisir la phase  $\phi$ ?

**- II.1.6**

Tracer soigneusement l'allure de la déformation associée au mode de vibration fondamental  $k_1$ , telle qu'on pourrait l'observer à l'aide, par exemple, d'une caméra rapide ou d'une lampe stroboscopique.

Tracer de la même façon l'allure des déformations associées à la première, deuxième et troisième harmonique (respectivement  $k_2, k_3, k_4$ ).

Compter et faire figurer sur votre schéma, à chaque fois, le nombre de "noeuds" et de "ventres" associés à ces modes de vibration.

**- II.1.7**

On peut montrer que l'énergie mécanique **par unité de longueur**  $e(x, t)$  associée à l'onde est égale à :

$$e(x, t) = \frac{\mu}{2} \left[ \left( \frac{\partial h}{\partial t} \right)^2 + c^2 \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right]$$

Calculer la valeur moyenne temporelle  $\langle e \rangle$  en un point quelconque  $x$  de la corde, pour le mode de vibration fondamental.

**- II.1.8**

En déduire l'énergie totale associée à la vibration du mode fondamental. On exprimera le résultat en fonction de la tension  $T$  de la corde, de sa demi-longueur  $L$  et de l'amplitude  $Z$  des vibrations.

*Application numérique* : Que vaut l'amplitude  $Z$  des vibrations lorsque l'énergie totale du mode est égale à 0,1 J, avec  $L = 1$  m,  $T = 100$  N?

### EXERCICE 3 : POLES GEOGRAPHIQUES ET MAGNETIQUES

Les pôles géographiques sont assez proches des pôles magnétiques; dans tout ce qui suit, on pourra confondre les deux axes reliant les pôles opposés de chaque type. La recherche des pôles magnétiques s'est d'abord appuyée sur la mesure du champ magnétique terrestre (ou champ géomagnétique), et en particulier de sa direction. L'intensité croissante du champ géomagnétique à l'approche des pôles contribue enfin à expliquer un phénomène optique spectaculaire : les aurores polaires. Les parties I.A et I.B sont indépendantes entre elles.

La partie I.A est consacrée à la description dipolaire du champ géomagnétique (le dipôle disposé au centre de la Terre et modélisant des courants électriques dans le noyau de la planète). Enfin, la partie I.B décrit quelques propriétés des mouvements des particules chargées à l'approche du pôle nord.

#### I.A. — Boussole, champ géomagnétique et dipôle central

Une boussole est formée d'un aimant permanent, solide en forme d'aiguille équivalente à un petit dipôle magnétique  $\vec{m}$  de norme constante  $m$ , la direction du vecteur  $\vec{m}$  étant supposée indiquer le nord. Cette aiguille aimantée peut librement tourner autour d'un axe vertical  $(\Delta)$  dirigé par le vecteur  $\vec{e}_r$  local et formant un pivot à faible frottement (cf. fig. 1).

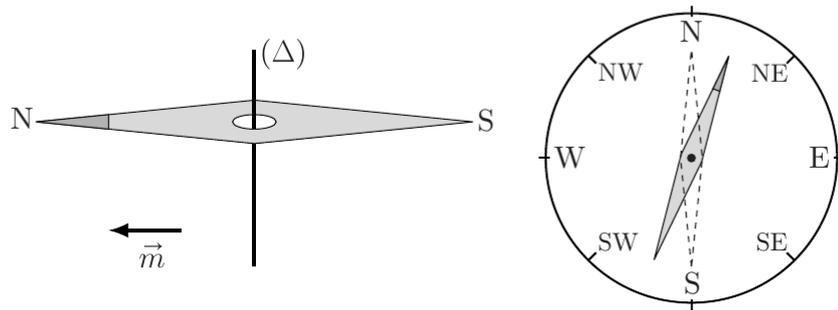


FIGURE 1 – Boussole de navigation

□ 1 — Pourquoi la boussole à l'équilibre indique-t-elle le nord? Cet équilibre est-il stable?

On note  $I$  le moment d'inertie de l'aiguille aimantée relativement à son axe de rotation  $(\Delta)$ ; légèrement écartée de sa position d'équilibre (cf. fig. 1), l'aiguille aimantée oscille avec une pseudo-période  $\tau_{\text{osc}}$ .

□ 2 — Montrer que la connaissance de  $m$ ,  $\tau_{\text{osc}}$  et  $I$  permet de déterminer une des composantes du champ géomagnétique. Laquelle?

On étudie un modèle de champ géomagnétique créé par un dipôle magnétique  $\vec{M} = M_0 \vec{e}_z$  disposé au centre  $O$  de la Terre (assimilée à une sphère de rayon  $R_T$ ), l'axe  $(Oz)$  étant l'axe polaire géographique dirigé du pôle sud de cet axe vers son pôle nord (cf. fig. 5). On rappelle d'une part qu'un point de la surface est caractérisé par ses coordonnées géographiques  $\varphi$  (longitude) et  $\lambda = \frac{\pi}{2} - \theta$  (latitude) et d'autre part qu'à l'équateur le champ magnétique terrestre est horizontal, dirigé vers le pôle nord géographique et y a pour intensité  $B_E$ .

□ 3 — Exprimer, en un point de la surface de la Terre et en coordonnées sphériques, le champ géomagnétique en fonction de  $\mu_0$  (perméabilité du vide),  $M_0$  et  $R_T$ .

□ 4 — Préciser le signe de  $M_0$  puis estimer sa valeur numérique. Quelles sont la direction et l'intensité du champ géomagnétique aux pôles magnétiques nord et sud?

En un point  $P$  de la surface terrestre, on appelle *nord magnétique local* la direction  $\vec{e}_N$  du champ géomagnétique  $\vec{B}$ , projeté dans le plan horizontal, et *déclinaison magnétique* l'angle  $D$  formé par  $\vec{B}$  avec le nord magnétique local; la déclinaison magnétique est positive si  $\vec{B}$  est dirigé vers le haut (vers le ciel) et négative s'il est dirigé vers le bas (vers le sol).

□ 5 — Dans l'hémisphère nord, quel est le signe de  $D$ ? Calculer  $\tan(D)$  en fonction de la latitude  $\lambda$  puis tracer l'allure de la courbe donnant  $D$  en fonction de  $\lambda$  pour toutes les valeurs de  $\lambda$  du pôle sud au pôle nord. Pourquoi lisait-on parfois que les boussoles « s'affolent à proximité des pôles »? Peut-on déterminer, au moyen d'une boussole, si on se trouve dans l'hémisphère nord ou dans l'hémisphère sud?

### I.B. — Aurores polaires

Les aurores polaires sont des phénomènes lumineux spectaculaires observables sur le fond du ciel nocturne des régions polaires : des particules chargées issues du vent solaire et guidées vers les pôles le long des lignes de champ du champ géomagnétique y interagissent avec la haute atmosphère. On n'étudie que quelques caractéristiques du mouvement de ces particules à l'approche du pôle nord.

On étudie d'abord le mouvement circulaire de centre  $O'$  d'une particule de charge  $q$  et de masse  $m$  sous la seule influence d'un champ magnétostatique uniforme  $\vec{B}_0 = -B_0\vec{e}_z$ , avec  $B_0 > 0$ . On pourra utiliser des coordonnées polaires  $(r, \theta)$  dans le plan du mouvement.

□ 6 — Montrer que le mouvement est uniforme et exprimer la vitesse angulaire  $\omega_c$  du mouvement. Le cercle est-il parcouru dans le sens direct ou rétrograde?

Ce mouvement est équivalent, pour des durées nettement supérieures à  $2\pi/\omega_c$ , à une boucle de courant circulaire de rayon  $r$  parcourue par un courant (moyen)  $i$  associé à la rotation périodique de la charge  $q$ . Il s'agit donc d'un dipôle magnétique de moment  $\vec{M}$ .

□ 7 — Montrer que l'énergie cinétique  $E_c$  du mouvement vérifie  $E_c = -\vec{M} \cdot \vec{B}_0$ . Pour la suite de cette partie, on considérera que ce résultat reste applicable, même si  $\vec{B}_0$  n'est plus exactement uniforme.

On étudie maintenant le mouvement d'un proton dans un champ non uniforme,  $\vec{B}_0 = -B_0(z)\vec{e}_z$ ; on notera  $G_m(z) = \frac{dB_0}{dz}$  l'intensité du gradient associé. On admet l'expression de la résultante des forces exercées sur cette particule, en fonction du moment magnétique  $\vec{M}$  équivalent à son mouvement moyen :  $\vec{F} = (\vec{M} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{B}_0$  soit aussi  $\vec{F} = -M_z \frac{dB_0}{dz} \vec{e}_z$ . Le proton, issu du vent solaire, s'approche du pôle terrestre nord.

□ 8 — À l'approche du pôle nord et en justifiant votre réponse, préciser la direction et le sens des trois vecteurs  $\vec{B}_0$ ,  $\vec{M}$  et  $\vec{F}$ . Le proton est-il freiné ou accéléré?

□ 9 — L'hypothèse  $G_m(z) \neq 0$  est-elle compatible avec l'équation de Maxwell assurant la conservation du flux magnétique le long d'un tube de courant?

□ 10 — Compte tenu du caractère dipolaire du champ géomagnétique, évaluer  $G_m(z)$  puis l'accélération d'un proton d'énergie  $E_c = 0,50 \text{ keV}$  à l'approche immédiate du pôle; comparer aux effets de la pesanteur. Que peut-on en conclure?

## Données numériques et constantes fondamentales

Champ magnétique terrestre à l'équateur	$B_E = 3,0 \times 10^{-5} \text{ T}$
Charge élémentaire	$e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$
Durée du jour solaire moyen	$T_0 = 24 \text{ h} = 8,6 \times 10^4 \text{ s}$
Intensité du champ de pesanteur	$g_0 = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
Masse du proton	$m_p = 1,7 \times 10^{-27} \text{ kg}$
Masse volumique de l'eau liquide à 4°C	$\rho_e = 1,0 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
Perméabilité magnétique du vide	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$
Rayon terrestre	$R_T = 6,4 \times 10^3 \text{ km}$
Viscosité dynamique de l'eau liquide à 4°C	$\eta_e = 1,6 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$
Logarithme népérien du nombre 20	$\ln(20) \simeq 3,0$

## Coordonnées sphériques et géographiques

On notera  $(Oxyz)$  les axes cartésiens associés à la base orthonormée et directe  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ . Les coordonnées sphériques d'un point  $P$  sont notées  $(r, \theta, \varphi)$  avec la base locale associée  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ , cf. fig. 5 à gauche. On note aussi  $\varphi$  (longitude) et  $\lambda$  la latitude d'un point  $P$  de la surface terrestre; le point  $A$  est situé sur l'équateur dans le méridien origine ( $\varphi = 0$ ); celui-ci passe par l'observatoire de Greenwich  $G$ , cf. fig. 5 à droite.

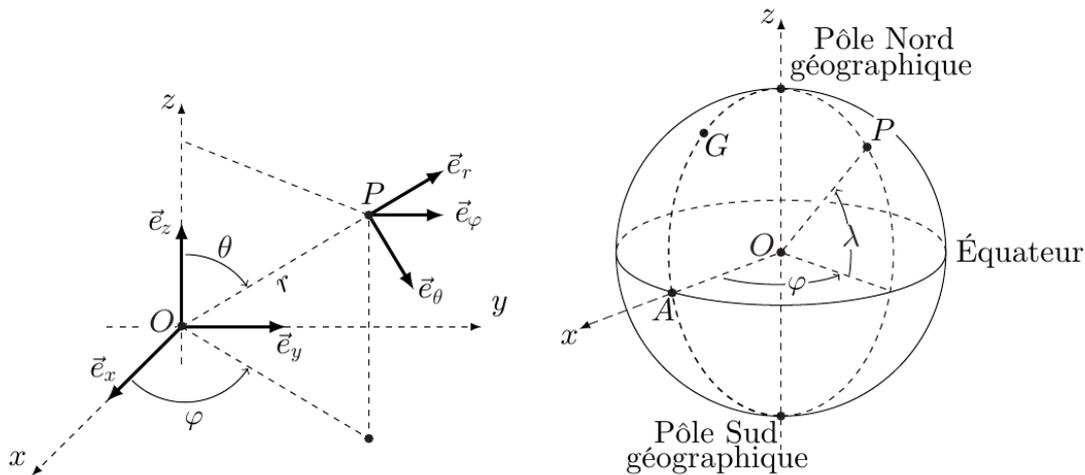


FIGURE 5 – Coordonnées sphériques et géographiques

## Données et formules relatives aux dipôles magnétiques

Le champ magnétique créé par un dipôle de moment dipolaire  $\vec{M}$  placé à l'origine  $O$  des coordonnées est donné au point  $P$  par :

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\vec{R}(\vec{M} \cdot \vec{R}) - R^2 \vec{M}}{R^5} \quad \text{où } \vec{R} = \overrightarrow{OP} \text{ et } R = \|\vec{R}\|$$

Les interactions d'un dipôle magnétique rigide de moment dipolaire  $\vec{m}$  soumis à un champ magnétique extérieur  $\vec{B}$  sont décrites par l'énergie potentielle  $E_p = -\vec{m} \cdot \vec{B}$  et par le couple des actions électromagnétiques  $\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}$ .