ORAGE ET FOUDRE

calculatrice autorisée

1) Le diazote N_2 (environ 80% en moles) et le dioxygène O_2 (environ 20%).
$M_{air} = 0{,}80\, M_{N2} + 0{,}20\, M_{O2} = 28{,}8.10^{-3}$ kg.mol^{-1}.

2) La particule d'air de volume dV située entre z et z+dz est à l'équilibre sous l'effet de son poids : $\rho_{air}\, dV \vec{g}$ et des forces de pression : $-\overrightarrow{grad}\, P\, dV$, donc : $-\overrightarrow{grad}\, P + \rho_{air}\, \vec{g} = \vec{0}$

En projetant sur l'axe z : $\dfrac{dP}{dz} = -\rho_{air}\, g$

3) La loi des gaz parfaits donne : $P\, M_{air} = \rho_{air}\, RT$, avec ici $T = T_0$.
En éliminant ρ_{air} avec la relation du **2) :** $\dfrac{dP}{P} = -\dfrac{g\, M_{air}}{RT_0}\, dz$

Par intégration, et en utilisant : $P=P_0$, pour $z=0$, il vient : $\boxed{P(z) = P_0 \exp(-z/H)}$ avec : $H = \dfrac{R\, T_0}{g\, M_{air}}$.

4) L'atmosphère a donc une épaisseur de l'ordre de H (ou de quelques H) avec <u>H = 8800 m</u>

5) **a)** On reprend la relation du **3)** mais en utilisant $T(z) = T_0 - \lambda z$ à la place de T_0.
On obtient : $\dfrac{dP}{P} = -\dfrac{g\, M_{air}}{R(T_0 - \lambda z)}\, dz$, qui s'intègre en : $\ln(P) = \dfrac{g\, M_{air}}{R\, \lambda}\, \ln\left(1 - \dfrac{\lambda z}{T_0}\right) + Cte$

Comme $P=P_0$, pour $z=0$, il vient : $Cte = \ln(P_0)$ et : $\boxed{P = P_0 \exp\left(\dfrac{g\, M_{air}}{R\, \lambda}\, \ln\left(1 - \dfrac{\lambda z}{T_0}\right)\right) = P_0 \left(1 - \dfrac{\lambda z}{T_0}\right)^{\frac{g\, M_{air}}{R\, \lambda}}}$

b) On retrouve jusqu'à 14 km d'altitude, avec cette formule les mêmes résultats que ceux fournis dans le tableau, avec trois chiffres.
Le modèle proposé est donc pertinent jusqu'à cette altitude avec une précision de l'ordre de 0,5 % pour le calcul de la pression.

13) Tout plan contenant le point O est un plan de symétrie de la distribution de charge.
Au point M, le vecteur champ électrique qui est un vecteur axial (vrai vecteur) appartient à l'intersection des plans contenant O et M ; il est donc suivant le vecteur $\overrightarrow{OM}$, c'est-à-dire suivant $\vec{e}_r$, premier vecteur de base des sphériques. Il s'écrit ainsi : $\vec{E} = E(r,\theta,\varphi)\vec{e}_r$

Par ailleurs, il y a invariance de E par rapport aux coordonnées θ et φ, donc : $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$

14) **a)** On applique le théorème de Gauss à une sphère de rayon r passant par M (entre les armatures) où on calcule le champ. La charge intérieure est donc celle de l'armature intérieure, soit Q.

Le flux du champ électrique à travers cette sphère vaut $E(r).4\pi r^2$.

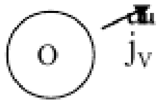
Le théorème de Gauss s'écrit donc : $E(r).4\pi r^2 = Q/\varepsilon_0$ soit : $\vec{E}(r)=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e_r}$

b) Il faut calculer la circulation du champ sur un chemin entre les armatures intérieure et extérieure de deux façons : $\int_1^2 \vec{E}.\vec{dl}=\int_1^2 -\overrightarrow{grad}\,V.\vec{dl}=\int_1^2(-dV)=V_1-V_2$

et $\int_1^2 \vec{E}.\vec{dl}=\int_1^2 \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e_r}.\vec{dl}=\int_1^2 \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{R_1}-\dfrac{1}{R_2}\right)$. L'égalité donne : $\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{R_1}-\dfrac{1}{R_2}\right)=V_1-V_2$

c) Par définition de C : $Q=C(V_1-V_2)$; on déduit de **b)** : $\boxed{C=\dfrac{4\pi\varepsilon_0}{\left(\dfrac{1}{R_1}-\dfrac{1}{R_2}\right)}}$

15) Si Q>0, le champ électrique est radial vers l'extérieur et crée un vecteur densité de courant dans le même sens :



16) On reprend la formule du **14 c)** avec R_1=6370 km, R_2=6370+80 km, ce qui donne : <u>C=57,1 mF</u>

17) En prenant E = 110 V/m (valeur moyenne par beau temps sensiblement constante dans l'électrosphère sur 80 km) on obtient : $U=V_1-V_2 \approx E.e=110.\ 80000=8{,}8\,MV$.

L'énergie stockée est alors : $W=\dfrac{1}{2}CU^2=220\,GJ$

18) En sens inverse : par beau temps, il est radial vers l'intérieur (du + vers le – comme sur la figure 1 de l'énoncé), et par temps d'orage, de la terre vers le nuage (encore du + vers le – comme sur la figure 3).

19) **a)** L'éclair correspond à un claquage diélectrique interne au nuage. Un coup de foudre concerne sans doute plutôt la Terre (même si le vocabulaire n'est pas toujours absolu).

b) Non : elle peut descendre ou monter, suivant le signe des charges mises en jeu au niveau de la terre lors de la décharge avec le nuage.

20) Le champ vaut 20 kV/m sur une épaisseur de 2000 m entre terre et nuage, soit une différence de potentiel de : U = 20000. 2000 = 40 MV.

21) La charge mise en jeu vaut environ (en supposant le courant constant) :

$Q \approx I.\Delta t=50\,000.\ 10^{-2}=500\ C$.

L'énergie véhiculée vaut alors : $W=Q.U=500.\ 40.10^6=20\,GJ$

Cette énergie ne mérite pas d'être récupérée. En effet, ce serait extrêmement compliqué pour une énergie somme toute modeste (20 GJ est l'énergie délivrée par une tranche de centrale nucléaire de 1 GW pendant 20 secondes seulement).

24) Le système choisi est une portion de ligne de longueur L parcouru par l'onde de courant. Pendant la durée T du coup de foudre, la ligne est parcourue par un courant de l'ordre de I/2. Ce courant échauffe la ligne par effet Joule, et celle-ci voit sa température augmenter.
Hypothèses simplificatrices : le courant reste du même ordre de grandeur pendant la durée Δt : on fait le calcul en continu, même s'il s'agit en fait d'une impulsion qui se propage.
On néglige l'effet de peau, en raisonnant comme si la densité de courant était uniforme dans la ligne (ce qui serait d'ailleurs le cas en courant continu). La résistance choisie pour le fil est donc celle d'un cylindre parcouru par un courant continu.
On suppose qu'il n'y a pas de perte thermique au niveau de la ligne : toute l'énergie dissipée par effet Joule sert donc à échauffer la ligne, ce qui se traduit dans le premier principe appliqué au système.

25) Pour calculer la résistance, il faut la conductivité du métal : $\gamma_{\text{mét}}$
Les paramètres géométriques sont fixés : longueur L considérée et section $S = \pi R^2$
Enfin, il faut la capacité thermique massique c_p du métal (supposée indépendante de la température) pour calculer la variation d'enthalpie du système. Il faut aussi sa masse volumique $\rho_{\text{mét}}$ pour connaître sa capacité thermique totale *via* sa masse m

26) résistance de la portion de ligne : $R_0 = \dfrac{1}{\gamma_{\text{mét}}}\dfrac{L}{\pi R^2}$

Chaleur reçue : $W = R_0\left(\dfrac{I}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{\gamma_{\text{mét}}}\dfrac{L}{\pi R^2}\left(\dfrac{I}{2}\right)^2 \Delta t$

Variation d'enthalpie : $C_p\,\Delta T_{\text{foudre}} = m\Delta T_{\text{foudre}} = \pi R^2 L \rho_{\text{mét}}\, c_p \Delta T_{\text{foudre}}$

Le premier principe donne :

$$\pi R^2 L \rho_{\text{mét}}\, c_p\ \Delta T_{\text{foudre}} = \frac{1}{\gamma_{\text{mét}}}\frac{L}{\pi R^2}\left(\frac{I}{2}\right)^2 \Delta t \ \Rightarrow\ \Delta T_{\text{foudre}} = \frac{1}{\gamma_{\text{mét}}\ \rho_{\text{mét}}\ c_p}\frac{1}{\pi^2 R^4}\left(\frac{I}{2}\right)^2 \Delta t$$

L'application numérique (non demandée donne une valeur de l'ordre de un centième de degré.

27) **a)** j est en $A.m^{-2}$.

b) Le courant I est le flux de $\vec{j}$ à travers une demi sphère de rayon $r>R_b$ sur laquelle le module j est uniforme : $I = j2\pi r^2 \Rightarrow j(r) = \dfrac{I}{2\pi r^2}$

28) **a)** La loi d'Ohm locale dans le sol : $\vec{j} = \gamma_{sol}\vec{E}$ donne le champ dans le sol : $E(r) = \dfrac{j(r)}{\gamma_{sol}} = \dfrac{I}{\gamma_{sol}\,2\pi r^2}$

b) $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V$ projeté sur $\vec{e}_r$ donne : $E = -\dfrac{dV}{dr} = \dfrac{I}{\gamma_{sol}\,2\pi r^2}$ qui s'intègre, en tenant compte de $V=0$ à l'infini, en : $V(r) = \dfrac{I}{\gamma_{sol}\,2\pi r}$

29) **a)** on se place à la limite de l'électrocution ; entre les deux pieds on trouve la différence de potentiel maximale supportable par la loi d'Ohm : $U_{\max} = R_h I_{\max}$

Par la question précédente, cette différence de potentielle vaut :

$$U_{max} = V(D) - V(D+a) = \frac{I}{\gamma_{sol}\,2\pi}\left(\frac{1}{D} - \frac{1}{D+a}\right) = \frac{I}{\gamma_{sol}\,2\pi}\frac{a}{D(D+a)}$$

On en déduit la relation demandée : $R_h I_{max} = \dfrac{I}{\gamma_{sol}\,2\pi}\dfrac{a}{D(D+a)}$

b) Pour D>>a : D+a ≈ D et $D \approx \sqrt{\dfrac{I a}{R_h I_{max} \gamma_{sol}\, 2\pi}}$

c) AN : <u>D = 110 m</u>

d) Toutes choses égales par ailleurs, les grands animaux sont plus affectés car leurs pattes sont plus espacées, ce qui les expose à des différences de potentiel supérieures, pour des résistances assez peu différentes.

30) **a)** La couche comprise entre r et r+dr est assimilable à un cylindre de section S= $2\pi r^2$ et de longueur dr. Sa résistance est donc : $dR_C = \dfrac{1}{\gamma_{mét}}\dfrac{dr}{2\pi r^2}$

b) On en déduit en sommant les résistance en série pour former la coque hémisphériques :

$$R_C = \int_{R_{int}}^{R_{ext}} dR_C = \frac{1}{2\pi\gamma_{mét}}\int_{R_{int}}^{R_{ext}}\frac{dr}{r^2} = \frac{1}{2\pi\gamma_{mét}}\left(\frac{1}{R_{int}} - \frac{1}{R_{ext}}\right)$$

31) **a)** Le courant traverse le métal et le sol : les deux résistances sont en série : $R_{glob} = R_{métal} + R_{sol}$

$R_{métal}$ se déduit de la question précédente : $R_{métal} = \dfrac{1}{2\pi\gamma_{mét}}\left(\dfrac{1}{R_a} - \dfrac{1}{R_b}\right)$

On obtient R_{sol} par application de la loi d'Ohm et en utilisant la question **28)** :

$$R_{sol} = \frac{V(R_b) - V(r=\infty)}{I} = \frac{V(R_b)}{I}\frac{1}{\gamma_{sol}\, 2\pi R_b}$$

Finalement : $R_{glob} = R_{métal} + R_{sol} = \dfrac{1}{2\pi\gamma_{mét}}\left(\dfrac{1}{R_a} - \dfrac{1}{R_b}\right) + \dfrac{1}{2\pi\gamma_{sol}\, R_b}$

b) AN : <u>R_{glob} = 47 Ω</u>

c) La législation n'est pas respectée. Pour diminuer la résistance de terre, il faut surtout diminuer R_{sol} qui est le terme prédominant, ce qui se fait en augmentant R_b.
Ceci revient augmenter la surface de contact métal-sol : on peut le réaliser en utilisant de grosses pièces métalliques, ou mieux, des grilles ou des armatures métalliques au contact de la terre.