N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Les calculatrices sont interdites

Problème A

Le flot de Toda

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels, I la matrice unité d'ordre m et e_j le j-ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^m$ dont les composantes sont les $\delta_{i,j}$, $i = 1, m$ (on rappelle que $\delta_{i,j}$ est nul si $i \neq j$ et vaut 1 si $i = j$).
On note $(u|v)$ le produit scalaire des vecteurs u et v de $\mathbb{R}^m$. Les vecteurs de $\mathbb{R}^m$ seont assimilés à des matrices colonnes. u^T note le transposé du vecteur u.
L'expression $i = 1, m$ signifie " pour tout i entier tel que $1 \leqslant i \leqslant m$".

1. Tridiagonalisation.

Soit u un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^m$; la matrice

$$H = I - 2uu^T \quad (1)$$

est la matrice de Householder d'ordre m associée au vecteur u.

Q.1. Montrer que $Hu = -u$ et que $Hv = v$ dès que v est orthogonal à u.

Q.2. Démontrer que H est symétrique et orthogonale.

Q.3. Soit $g \in \mathbb{R}^m$, de composantes γ_i, $1 \leqslant i \leqslant m$, un vecteur unitaire non colinéaire à e_1. On pose $u = (g - e_1)/\sqrt{2(1-\gamma_1)}$. Montrer que u est unitaire et que $Hg = e_1$.

Q.4. En déduire que si x est un vecteur de $\mathbb{R}^m$ non colinéaire à e_1, il existe un vecteur unitaire u et une matrice de Householder associée H telle que $Hx = \|x\| e_1$.

Soient c un réel, Q une matrice symétrique réelle d'ordre $m-1$, $q_{2,1}$ un vecteur de $\mathbb{R}^{m-1}$ et $\widehat{Q} = \left(\begin{array}{c|c} c & q_{2,1}^T \\ \hline q_{2,1} & Q \end{array}\right)$ une matrice définie par blocs. Si H_1 est une matrice de Householder d'ordre $m-1$, on pose $\widehat{H_1} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \zeta \\ \hline \zeta & H_1 \end{array}\right)$ où ζ note le vecteur nul dans $\mathbb{R}^{m-1}$ ainsi que $\widehat{S} = \widehat{H_1}\widehat{Q}\widehat{H_1} = (\widehat{\sigma_{i,j}})_{1 \leqslant i,j \leqslant m}$.

Q.5. Montrer que $\widehat{S}$ est semblable à $\widehat{Q}$ et qu'on peut choisir H_1 de telle sorte que $\widehat{\sigma_{i,1}} = \widehat{\sigma_{1,i}} = 0$ pour $i = 3, m$.

On dit qu'une matrice $T = (\tau_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant m}$ est tridiagonale si $\tau_{i,j} = 0$ dès que $|i - j| > 1$.

Q.6. En déduire un procédé permettant de déterminer une matrice tridiagonale symétrique semblable à $\widehat{Q}$.

2. Matrices de Jacobi.

Une matrice tridiagonale symétrique réelle est encore appelée matrice de Jacobi. Soit

$$T_0 = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & b_2 & a_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & a_2 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{m-1} \\ 0 & \dots & 0 & a_{m-1} & b_m \end{pmatrix} \quad (2)$$

une matrice de Jacobi d'ordre m. On pose $a_0 = a_m = 0$ et on suppose que $a_i \neq 0$, $i = 1, m$. On note $\sigma(T_0)$ le spectre de T_0, c'est à dire l'ensemble de ses valeurs propres.

Q.7. Soit $\lambda \in \sigma(T_0)$ et x un vecteur propre associé de composantes ξ_j, $j = 1, m$. En raisonnant par l'absurde, montrer que $\xi_m \neq 0$.

Q.8. Démontrer que les sous-espaces propres de T_0 sont de dimension 1. Quel est le cardinal de $\sigma(T_0)$?

3. Paires de Lax.

On remplace désormais les a_i et les b_i par des fonctions à valeurs réelles α_i et β_i de la variable réelle t. On pose alors

$$T(t) = \begin{pmatrix} \beta_1(t) & \alpha_1(t) & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_1(t) & \beta_2(t) & \alpha_2(t) & \ddots & \vdots \\ 0 & \alpha_2(t) & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \alpha_{m-1}(t) \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_{m-1}(t) & \beta_m(t) \end{pmatrix} \qquad (3)$$

ainsi que

$$U(t) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1(t) & 0 & \dots & 0 \\ -\alpha_1(t) & 0 & \alpha_2(t) & \ddots & \vdots \\ 0 & -\alpha_2(t) & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \alpha_{m-1}(t) \\ 0 & \dots & 0 & -\alpha_{m-1}(t) & 0 \end{pmatrix} \qquad (4)$$

et on étudie le système différentiel non linéaire suivant :

$$(5) \quad \begin{cases} T'(t) = U(t)T(t) - T(t)U(t), \ t \in \mathbb{R} \\ T(0) = T_0 \ \text{ donné par (2)} \end{cases}$$

dont on admettra qu'il possède une solution et une seule $T(t)$ définie sur $\mathbb{R}$. Le couple $(T(t), U(t))$ constitue une *paire de Lax*.

Q.9. Etant donnée $T(t)$ solution de (5), et donc $U(t)$, démontrer que le système différentiel

$$(6) \quad \begin{cases} V'(t) = U(t)V(t), \ t \in \mathbb{R} \\ V(0) = I \end{cases}$$

admet une solution et une seule $V(t)$ sur $\mathbb{R}$.

Q.10. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, la matrice $V(t)$ solution de (6) est orthogonale.

Q.11. Montrer que $V^T(t)T(t)V(t)$ est une matrice constante que l'on déterminera. Les valeurs propres de $T(t)$ dépendent-elles de t ?

On montre facilement, et on admettra, que le système différentiel (5) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$(7) \quad \begin{cases} \alpha_i'(t) = \alpha_i(t)(\beta_{i+1}(t) - \beta_i(t)), \ i = 1, m-1 \\ \beta_i'(t) = 2(\alpha_i^2(t) - \alpha_{i-1}^2(t)), \ i = 1, m \end{cases}$$

avec $\alpha_i(0) = a_i, \ i = 1, m-1, \ \beta_i(0) = b_i, \ i = 1, m$ et $\alpha_0(t) = 0 = \alpha_m(t), \ \forall t \in \mathbb{R}$.

C'est le système de Toda.

4. Etude asymptotique.

Pour tout réel t, on pose

$$L(t) = \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i^2(t) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \beta_i^2(t) \quad (8)$$

Q.12. Montrer que la fonction L est constante. En déduire que les fonctions β_i sont bornées sur $\mathbb{R}$, soit par D.

Q.13. Pour $1 \leqslant i \leqslant m-1$, montrer que $2\displaystyle\int_0^t \alpha_i^2(t)\,dt = \sum_{j=1,i} (\beta_j(t) - b_j)$ et en déduire que les α_i^2 sont intégrables sur $\mathbb{R}$.

Q.14. En déduire que les $\beta_i(t)$, $i = 1, m$, possèdent une limite lorsque $t \to \pm\infty$.

Q.15. Déduire des résultats des questions précédentes que la fonction $\alpha_i \alpha_i'$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. En déduire la limite de $\alpha_i(t)$ lorsque $t \to \pm\infty$.

On note $\chi_t(\lambda) = \det(\lambda I - T(t))$ le polynôme caractéristique de la matrice $T(t)$ et λ_i, $i = 1, m$, les valeurs propres de $T(t)$ rangées dans l'ordre décroissant.
Les limites de $\beta_i(t)$ pour $t \to +\infty$ ou $t \to -\infty$ seront respectivement notées β_i^+ et β_i^- ; l'ensemble des β_i^+, $i = 1, m$, sera noté B^+ et celui des β_i^- sera noté B^-.

Q.16. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\chi_t(\lambda)$ tend vers $\displaystyle\prod_{i=1,m} (\lambda - \beta_i^+)$

(respectivement vers $\displaystyle\prod_{i=1,m} (\lambda - \beta_i^-)$) lorsque $t \to +\infty$ (respectivement $-\infty$).

Q.17. En déduire que $\sigma(T) = B^+ = B^-$.

On rappelle que, par hypothèse, $\alpha_i(0) = a_i \neq 0$, $i = 1, m-1$.

Pour i fixé compris entre 1 et $m-1$, on note $A^+ = \{t > 0/\ \alpha_i(t) = 0\}$ et $A^- = \{t < 0/\ \alpha_i(t) = 0\}$.

Q.18. On suppose que A^+ n'est pas vide et on pose $\tau = \inf\{t/\ t \in A^+\}$. Déterminer la valeur de $\alpha_i(\tau)$ et montrer que pour $t \in]0, \tau[$, $\alpha_i(t)$ est du même signe que a_i.

Q.19. En supposant toujours que A^+ n'est pas vide, montrer que

$$\forall t \in [0, \tau[,\ \ |\ln|\alpha_i(t)| - \ln|\alpha_i(0)|| \leqslant 2D\tau$$

En déduire que nécessairement $A^+ = \emptyset$, puis que α_i ne s'annule en aucun point de $\mathbb{R}$.

Q.20. En raisonnant par l'absurde, montrer que $\beta_{i+1}^+ < \beta_i^+$, $i = 1, m-1$. En déduire que $\beta_i^+ = \lambda_i$, $i = 1, m$.

Q.21. Montrer que si δ est choisi tel que $0 < \delta < \beta_i^+ - \beta_{i+1}^+$, $i = 1, m-1$, alors il existe S et C strictement positifs tels que $\forall s > S$, $|\alpha_i(s)| < Ce^{-\delta s}$, $i = 1, m-1$. En déduire quil existe $C' > 0$ tel que pour $t > S$, $|\lambda_i - \beta_i(t)| < C'e^{-2\delta t}$, $i = 1, m$.

Problème B : polynômes d'Hermite

On désigne par E l'ensemble des applications f continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que la fonction $t \mapsto [f(t)]^2 e^{-t^2}$ soit intégrable sur $\mathbb{R}$. On admettra que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$.

Première partie

(1) Montrer que E contient les fonctions polynomiales.

(2) Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et que l'on définit un produit scalaire sur E en posant :

$$\forall (f,g) \in E^2 \quad (f|g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t)e^{-t^2}\mathrm{d}t.$$

On notera $\|\cdot\|$ la norme associée.

Deuxième partie

(1) Soit $n \in \mathbb{N}$ et ϕ_n l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ qui à tout polynôme P associe $P'' - 2XP' + 2nP$. Déterminer le degré de $\phi_n(X^k)$, pour $k \in \mathbb{N}$ et en déduire que le noyau de ϕ_n est une droite vectorielle de $\mathbb{R}[X]$, engendrée par un polynôme de degré n.

On désigne par H_n celui des polynômes de $\ker \phi_n$ dont le terme dominant est $2^n X^n$.

Calculer une relation entre les coefficients de H_n ; préciser en particulier H_0, H_1, H_2, H_3 et montrer que H_n est de la même parité que n. Rq : ne pas calculer complètement H_n ...

(2) On définit l'application ψ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ en posant : $\forall t \in \mathbb{R} \quad \psi(t) = e^{-t^2}$.

Établir une relation linéaire entre les dérivées d'ordre $n+2, n+1$ et n de ψ.

(3) Pour $n \in \mathbb{N}$, vérifier que la fonction $y_n : t \mapsto e^{t^2}\psi^{(n)}(t)$ est polynomiale et appartient à $\ker \phi_n$.

En déduire que les polynômes H_n définis dans le **1)** sont donnés par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\left(e^{-t^2}\right).$$

(4) Montrer que H_n, H_{n+1} et H_{n+2} sont liés par une relation linéaire que l'on déterminera.

(5) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{R}[X]$, établir : $(H_n|P) = (H_{n-1}|P')$.

(6) Pour $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, tel que $p \leqslant n$, calculer $(H_n|X^p)$.

En déduire que la famille $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale. Préciser la valeur de $\|H_n\|^2$.

Troisième partie

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $f \in E$, on pose $\xi_n(f) = (H_n|f) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(t)f(t)e^{-t^2}\mathrm{d}t$ et $\alpha_n(f) = \dfrac{\xi_n(f)}{\|H_n\|}$.

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f \in E$ fixés. Pour $(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ on pose : $f_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x_k H_k$.

Calculer $\|f_n - f\|^2$ et montrer que cette quantité admet un minimum pour une famille $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ que l'on précisera. Établir l'inégalité :

$$\sum_{k=0}^{n} \left[\alpha_k(f)\right]^2 \leqslant \|f\|^2$$

et conclure quant à la convergence de la série de terme général $\left[\alpha_k(f)\right]^2$.

Éléments de correction

Après lecture des copies, je donnerai de manière manuscrite les éléments de langage mal présentés.

Problème B : *polynômes d'Hermite*

Première partie

Voir l'autre ds pour le barème sur Hermite ainsi que les remarques importantes.

(1) Soit P un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$ (le cas $P = 0$ est trivial), de terme dominant $a_n X^n$; P est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et, au voisinage de $\pm\infty$, $[P(t)]^2$ est équivalent à $a_n^2 t^{2n}$; or :

$$\lim_{t \to \pm\infty} t^2 \cdot a_n^2 t^{2n} e^{-t^2} = 0,$$

donc, par comparaison avec une intégrale de Riemann ($2 > 1$), $t \mapsto [P(t)]^2 e^{-t^2}$ est intégrable sur $]-\infty, -1]$ et sur $[1, +\infty[$; comme elle est continue sur le segment $[-1, 1]$, elle est intégrable sur $\mathbb{R}$:

$$\boxed{E \text{ contient les fonctions polynomiales.}}$$

(2) Je montre que E est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: E en est une partie par définition, non vide car la fonction nulle est dans E ; il est clair que E est stable par la multiplication externe par un réel ; reste à prouver la stabilité pour l'addition : soient donc f et g dans E :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad [f(t) + g(t)]^2 = [f(t)]^2 + [g(t)]^2 + 2f(t)g(t) \leqslant 2\left([f(t)]^2 + [g(t)]^2\right).$$

Il en résulte que $t \mapsto [(f+g)(t)]^2 e^{-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, puisque $t \mapsto [f(t)]^2 e^{-t^2}$ et $t \mapsto [g(t)]^2 e^{-t^2}$ le sont par hypothèse. En conclusion :

$$\boxed{E \text{ est un } \mathbb{R}\text{-espace vectoriel.}}$$

Pour $(f, g) \in E^2$, la majoration :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad |f(t)g(t)| \leqslant \frac{1}{2}\left([f(t)]^2 + [g(t)]^2\right)$$

prouve que $t \mapsto f(t)\, g(t)\, e^{-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$: $(f|g)$ est bien défini. Il est clair que $(\cdot|\cdot)$ est bilinéaire symétrique, positive et, si $f \in E$ vérifie $(f|f) = 0$, alors, $t \mapsto [f(t)]^2 e^{-t^2}$ étant positive et continue, elle est nulle sur $\mathbb{R}$, d'où $f = 0$ puisque e^{-t^2} ne s'annule pas ; en résumé :

$$\boxed{(\cdot|\cdot) \text{ est un produit scalaire sur } E.}$$

Deuxième partie

(1) $\phi_n(1) = 2n$, $\phi_n(X) = 2(n-1)X$ et pour $k \geqslant 2$:

$$\phi_n(X^k) = k(k-1)X^{k-2} + 2(n-k)X^k. \text{ Donc :}$$

$$\boxed{\phi_n(X^k) \text{ est de degré : } k \text{ si } n \neq k,\ k-2 \text{ si } n = k \geqslant 2 \text{ et } -\infty \text{ si } n = k < 2.}$$

J'en déduis, par combinaisons linéaires, que pour P polynôme de degré $k \neq n$, $\phi_n(P)$ est encore de degré k ; donc un polynôme non nul de $\ker \phi_n$ est nécessairement de degré n. Pour $n = 0$, réciproquement, tout polynôme constant est dans $\ker \phi_0$: $\ker \phi_0$ est la droite des polynômes constants, qui est bien engendrée par un polynôme de degré 0. Pour $n \geqslant 1$, $\phi_n(\mathbb{R}_n[X])$ est contenu dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et plus précisément égal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ (car contenant $\left(\phi_n(1), \ldots, \phi_n(X^{n-1})\right)$ qui en est une base, en tant que famille de n polynômes de degrés échelonnés $0, \ldots, n-1$, donc libre) ; ϕ_n induit donc un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ de rang n : d'après le théorème du rang, son noyau est une droite vectorielle, qui coïncide avec $\ker \phi_n$ et est engendrée par un polynôme de degré n, puisqu'un polynôme non nul de $\ker \phi_n$ est nécessairement de degré n, comme je l'ai déjà signalé :

$$\boxed{\ker \phi_n \text{ est une droite vectorielle engendré par un polynôme de degré } n.}$$

H_n est de la forme $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$, avec $a_n = 2^n$ et $\phi_n(H_n) = 0$, donc :

$$\sum_{k=2}^{n} k(k-1)a_k X^{k-2} + 2\sum_{k=0}^{n}(n-k)a_k X^k = 0,$$

soit, en réindexant : $\sum\limits_{k=0}^{n-2}(k+1)(k+2)a_{k+2}X^k + 2\sum\limits_{k=0}^{n}(n-k)a_k X^k = 0$,

d'où : $a_{n-1} = 0 \quad \text{et} \quad \forall k \in \{0,\dots,n-2\} \quad a_k = -\dfrac{(k+1)(k+2)}{2(n-k)}a_{k+2}$.

J'en déduis par récurrence, compte tenu de $a_n = 2^n$:

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Pour } p \text{ tel que } 0 \leqslant 2p+1 \leqslant n,\ a_{n-2p-1} = 0 \text{ et} \\ \text{pour } p \text{ tel que } 0 \leqslant 2p \leqslant n,\ a_{n-2p} = (-1)^p \dfrac{2^{n-2p}n!}{p!(n-2p)!}\end{array}}$$

Ce résultat permet d'obtenir :

$$\boxed{H_0 = 1,\ H_1 = 2X,\ H_2 = 4X^2 - 2,\ H_3 = 8X^3 - 12X.}$$

Enfin la nullité des coefficients de la forme a_{n-2p-1} signifie que :

$$\boxed{H_n \text{ est de la même parité que } n.}$$

(2) Je remarque que : $\forall t \in \mathbb{R} \quad \psi'(t) + 2t\psi(t) = 0$ et la formule de Leibniz donne, en dérivant $n+1$ fois :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \psi^{(n+2)}(t) + 2t\psi^{(n+1)}(t) + 2(n+1)\psi^{(n)}(t) = 0.}$$

(3) Une récurrence facile montre que $\psi^{(n)}(t)$ est le produit de e^{-t^2} par un polynôme de terme dominant $(-2)^n X^n$. En outre, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} y_n'(t) &= e^{t^2}\left[\psi^{(n+1)}(t) + 2t\psi^{(n)}(t)\right] \\ y_n''(t) &= e^{t^2}\left[\psi^{(n+2)}(t) + 4t\psi^{(n+1)}(t) + 2\psi^{(n)}(t) + 4t^2\psi^{(n)}(t)\right] \end{aligned}$$

d'où : $\phi_n(y_n)(t) = e^{t^2}\left[\psi^{(n+2)}(t) + 2t\psi^{(n+1)}(t) + (2n+2)\psi^{(n)}(t)\right] = 0$

d'après la question précédente. En conclusion :

$$\boxed{y_n \text{ est un polynôme de } \ker\phi_n.}$$

H_n étant l'unique polynôme de la droite $\ker\phi_n$ de coefficient dominant 2^n, j'en déduis :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \quad H_n(t) = (-1)^n y_n(t) = (-1)^n e^{t^2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\left(e^{-t^2}\right).}$$

(4) En multipliant la relation du **2)** par e^{t^2}, j'obtiens :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad y_{n+2}(t) + 2ty_{n+1}(t) + 2(n+1)y_n(t) = 0,$$

autrement dit, d'après la question précédente, en simplifiant par $(-1)^n$:

$$\boxed{H_{n+2} - 2XH_{n+1} + 2(n+1)H_n = 0.}$$

(5) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{R}[X]$; j'intègre par parties, sachant que tous les produits d'un polynôme par $t \mapsto e^{-t^2}$ sont intégrables sur $\mathbb{R}$ et admettent une limite nulle en $\pm\infty$:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(t)P(t)e^{-t^2}\mathrm{d}t &= \int_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\left(e^{-t^2}\right)P(t)\mathrm{d}t \\ &= \left[(-1)^n\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}t^{n-1}}\left(e^{-t^2}\right)P(t)\right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty}(-1)^n\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}t^{n-1}}\left(e^{-t^2}\right)P'(t)\mathrm{d}t \\ &= 0 + \int_{-\infty}^{+\infty} H_{n-1}(t)e^{-t^2}P'(t)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

En conclusion :

$$\boxed{\text{Pour } n \in \mathbb{N}^* \text{ et } P \in \mathbb{R}[X],\ (H_n|P) = (H_{n-1}|P').}$$

(6) En itérant le résultat précédent, je trouve, pour $p \leqslant n$: $(H_n|X^p) = (H_{n-p}|p!) = p!(H_{n-p}|1)$.
Pour $p < n$, j'applique une fois de plus le résultat précédent : $(H_{n-p}|1) = (H_{n-p-1}|0) = 0$.
Pour $p = n$, $(H_0|1) = I_0 = \sqrt{\pi}$. En résumé :

$$\boxed{\text{Pour } p < n,\ (H_n|X^p) = 0 \text{ et } (H_n|X^n) = n!\sqrt{\pi}.}$$

H_p étant de degré p, le résultat précédent prouve que, pour $p < n$, $(H_n|H_p) = 0$ et, H_n ayant 2^n pour coefficient dominant, $(H_n|H_n) = 2^n(H_n|X^n)$, soit finalement :

$$\boxed{\text{La famille } (H_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est orthogonale et } \forall n \in \mathbb{N} \quad \|H_n\|^2 = 2^n n!\sqrt{\pi}.}$$

Troisième partie

La projection orthogonale de f sur $F = Vect(H_0, \ldots, H_n)$ est :

$$g_n = \sum_{k=0}^{n} \beta_k(f) H_k \quad \text{où} \quad \beta_k(f) = \frac{(H_k|f)}{\|H_k\|^2}$$

et $f - g_n$ est orthogonal à F, donc à $g_n - f_n$, d'où grâce au théorème de Pythagore :

$$\|f - f_n\|^2 = \|f - g_n + g_n - f_n\|^2 = \|f - g_n\|^2 + \|g_n - f_n\|^2 .$$

De même, $f - g_n$ est orthogonal à g_n, donc :

$$\|f - g_n\|^2 = (f - g_n|f - g_n) = (f - g_n|f) = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n} \beta_k(f)(H_k|f) = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n} [\alpha_k(f)]^2 .$$

Enfin, la famille $(H_0, \ldots, H_n)$ étant orthogonale :

$$\|g_n - f_n\|^2 = \sum_{k=0}^{n} [\beta_k(f) - x_k]^2 \|H_k\|^2 .$$

Il en résulte que :

$$\boxed{\|f - f_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n} [\alpha_k(f)]^2 + \sum_{k=0}^{n} [\beta_k(f) - x_k]^2 \|H_k\|^2 \text{ est minimum lorsque : } \forall k \leqslant n \quad x_k = \beta_k(f).}$$

Pour ce choix des x_k, j'ai : $\sum\limits_{k=0}^{n} \big[\alpha_k(f)\big]^2 = \|f\|^2 - \|f - f_n\|^2$.

En particulier :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} [\alpha_k(f)]^2 \leqslant \|f\|^2.}$$

La série de terme général $[\alpha_k(f)]^2$ est à termes positifs et je viens de voir que ses sommes partielles sont majorées :

$$\boxed{\text{La série de terme général } [\alpha_k(f)]^2 \text{ est convergente.}}$$

Problème A

5. Tridiagonalisation.

Q.1. 3 points Comme la base canonique de $\mathbb{R}^m$ est orthonormée, le produit scalaire de $x, y \in \mathbb{R}^m$ vaut $(x|y) = x^T y$. Ici,

$$Hu = u - 2uu^T u = u - 2u\|u\|^2 = u - 2u = -u$$

$$\forall v \in \text{Vect}(u)^\perp,\ Hv = v - 2uu^T v = v - 2u(u|v) = v$$

Remarque : ceci montre que l'endomorphisme canoniquement associé à H est la réflexion orthogonale d'hyperplan $\text{Vect}(u)^\perp$.

Q.2. 3 points On rappelle que $(AB)^T = B^T A^T$ dès que le produit AB existe. Ici, la transposition étant en outre linéaire et involutive,

$$H^T = I^T - 2(u^T)^T u^T = I - 2uu^T$$

De plus

$$H^2 = I - 4uu^T + 4uu^T uu^T = I - 4uu^T + 4u\|u\|^2 u^T = I$$

On a ainsi $H = H^T = H^{-1}$ ce qui montre que H est à la fois symétrique et orthogonale.

Q.3. Par bilinéarité du produit scalaire, on a 2.5 points

$$\|u\|^2 = \frac{1}{2(1-\gamma_1)}\left(\|g\|^2 - 2(g|e_1) + \|e_1\|^2)\right) = \frac{1}{1-\gamma_1}\left(1 - (g|e_1)\right)$$

Par ailleurs, la base canonique étant orthonormée, $\gamma_i = (e_i|g)$. On en déduit alors que

$$\|u\|^2 = 1$$

Remarque : l'hypothèse (g, e_1) libre permet d'affirmer qu'il existe $i > 1$ tel que $\gamma_i \neq 0$ et que $\gamma_1^2 = \|g\|^2 - \sum_{k\geqslant 2} \gamma_k^2 < 1$ ce qui donne en particulier $1 - \gamma_1 \neq 0$ 1 points et assure que u est bien défini. Bonus

On a aussi : 2.5 points

$$u^T g = \frac{1}{\sqrt{2(1-\gamma_1)}}\left(g^T g - g^T e_1\right) = \frac{1}{\sqrt{2(1-\gamma_1)}}\left(\|g\|^2 - (g|e_1)\right) = \frac{1}{\sqrt{2(1-\gamma_1)}}(1-\gamma_1) = \sqrt{\frac{1-\gamma_1}{2}}$$

et donc

$$Hg = g - 2uu^T g = g - 2\sqrt{\frac{1-\gamma_1}{2}}\,\frac{g - e_1}{\sqrt{2(1-\gamma_1)}} = e_1$$

Tjs une histoire de calculs en bon...

Q.4. Soit $x \notin \text{Vect}(e_1)$. $g = \frac{1}{\|x\|}x$ est unitaire et non colinéaire à e_1. En choisissant $u = \dfrac{g - e_1}{\sqrt{2(1-\gamma_1)}}$, la question précédente donne 1 points

$$Hx = \|x\| Hg = \|x\| e_1$$

Q.5. Un calcul par blocs donne (H_1 étant une matrice de Householder, la question **2** donne $H_1^2 = I_{m-1}$)

$$\widehat{H_1}^2 = \begin{pmatrix} 1 & \zeta^T \\ \zeta & H_1^2 \end{pmatrix} = I_m$$

et on a donc $\widehat{H_1} = \widehat{H_1}^{-1}$ ce qui montre que 2 points

$$\widehat{S} = \widehat{H_1}^{-1}\widehat{Q}\widehat{H_1}$$

est semblable à $\widehat{Q}$. On peut même dire que $\widehat{S}$ représente l'endomorphisme $\widehat{q}$ canoniquement associé à $\widehat{Q}$ dans la base $\mathcal{B}$ formée des colonnes de $\widehat{H_1}$ (ces colonnes forment une base puisque $\widehat{H_1}$ est inversible, on vient de le voir). Distinguons maintenant deux cas.

- Si $q_{2,1}$ est nul alors $q(e_1)$ est colinéaire à e_1. En choisissant H_1 de façon quelconque, le premier vecteur de $\mathcal{B}$ est e_1 et la première colonne de $\widehat{Q}$ représente $q(e_1)$ dans $\mathcal{B}$ est du type $(*, 0, \dots, 0)$. Comme $\widehat{S}$ est symétrique, la première ligne est la même et on a $\widehat{\sigma_{i,1}} = \widehat{\sigma_{1,i}} = 0$ pour $i = 2, m$ (et donc a fortiori pour $i = 3, m$).
- Si $q_{2,1} \neq 0$, la question précédente utilisée avec $x = q_{2,1}$ donne une matrice H_1 telle que $H_1 q_{2,1} = \|q_{2,1}\| e'_1$ où e'_1 est le premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^{m-1}$. Un cacul par blocs donne alors 3 points

$$\widehat{S} = \begin{pmatrix} c & q_{1,2}^T H_1 \\ H_1 q_{1,2} & H_1 Q H_1 \end{pmatrix}$$

  Par choix de H_1, on a donc $\widehat{\sigma_{i,1}} = \widehat{\sigma_{1,i}} = 0$ pour $i = 3, m$

Q.6. 3 points Question à rédiger...

On vient de voir qu'il existe une matrice de Householder H_1 de taille $m-1$ telle que

$$\widehat{H_1}\widehat{Q}\widehat{H_1} = \begin{pmatrix} * & * & 0 & \dots & \dots & 0 \\ * & & & & & \\ 0 & & & & & \\ \vdots & & & H_1 Q H_1 & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & & & \end{pmatrix}$$

De même, $H_1 Q H_1$ étant une matrice symétrique d'ordre $m-1$, on trouve une matrice de Householder H_2 de taille $m-2$. En posant cette fois

$$\widehat{H_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & & & \\ \vdots & \vdots & & H_2 & & \\ 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & & & & \end{pmatrix}$$

on calcule $\widehat{H_2}\widehat{H_1}\widehat{Q}\widehat{H_1}\widehat{H_2}$ et on vérifie que l'on obtient une matrice du type

$$\widehat{H_2}\widehat{H_1}\widehat{Q}\widehat{H_1}\widehat{H_2} = \begin{pmatrix} * & * & 0 & \dots & \dots & 0 \\ * & * & * & 0 & \dots & 0 \\ 0 & * & & & & \\ \vdots & 0 & & S & & \\ \vdots & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & & & & \end{pmatrix}$$

où S est encore une matrice symétrique. On a ainsi réussi à obtenir de bonnes seconde ligne et colonne (sans perdre les zéros apparus à l'étape précédente). En poursuivant ainsi (il y a $m-2$ étapes), on obtient des matrices symétriques et orthogonales $\widehat{H_1}, \dots, \widehat{H_{m-2}}$ telles que

$$\widehat{H_{m-2}} \dots \widehat{H_1}\widehat{Q}\widehat{H_1} \dots \widehat{H_{m-2}}$$

est tridiagonale symétrique. Comme $\widehat{H_1} \dots \widehat{H_{m-2}}$ admet $\widehat{H_{m-2}} \dots \widehat{H_1}$ pour inverse, on a bien la relation de similitude voulue.

Remarque : on pourrait bien sûr décrire récursivement la stratégie précédente mais il est difficile de savoir ce que veut exactement l'énoncé.

6. Matrices de Jacobi.

Q.7. 2 points $T_0x = \lambda x$ donne n équations qui s'écrivent

$$\begin{cases} (b_1-\lambda)\xi_1 + a_1 = 0 \\ \forall k \in [2, m-1],\ a_{k-1}\xi_{k-1} + (b_k-\lambda)\xi_k + a_k\xi_{k+1} = 0 \\ a_{m-1}\xi_{m-1} + (b_m-\lambda)\xi_m = 0 \end{cases}$$

Supposons, par l'absurde, que $\xi_m = 0$. Comme $a_{m-1} \neq 0$, la dernière équation donne $\xi_{m-1} = 0$. Comme $a_{m-2} \neq 0$, la précédente donne alors $\xi_{m-2} = 0$. Le processus (récurrent) se poursuit jusqu'à exploiter la seconde équation qui, comme $a_1 \neq 0$, donne $\xi_1 = 0$. On a alors $x = 0$ ce qui est contradictoire avec le fait que x est vecteur propre.
Remarque : on pourrait proprement montrer par récurrence descendante la nullité des ξ_i.

Q.8. 2.5+1.5 points Soit $\lambda \in \sigma(T_0)$ et u, v deux vecteurs propres associés (dont on note u_k et v_k les coordonnées dans la base canonique). La question précédente montre que u_n et v_n sont non nuls. Par ailleurs, $v_nu - u_nv \in \ker(T_0 - \lambda Id)$ (qui est un espace vectoriel) et sa dernière coordonnée est nulle. La question précédente montre que $v_nu - u_nv = 0$. Ainsi, (u, v) est liée. $\ker(T_0 - \lambda Id)$ est donc une droite vectorielle (espace non réduit à $\{0\}$ et où deux éléments sont liés).
Or, T_0 est diagonalisable puisque symétrique réelle. La somme des dimensions des sous-esapces propres est donc égale à m. Et comme toutes ces dimensions valent 1, on a finalement

$$\mathrm{card}(\sigma(T_0)) = m$$

Q.9. 3 points T étant une solution de (5), les α_i et β_i sont dérivables sur $\mathbb{R}$ puis, par récurrence à l'aide des relations, de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
Rappelons que si E est un espace vectoriel de dimension finie, un système linéaire d'ordre 1 d'inconnue $y\ :\ \mathbb{R} \to E$ est un système qui s'écrit $\forall t \in \mathbb{R},\ y'(t) = a(t)(y(t))$ où pour tout tout t, $a(t) \in \mathcal{L}(E)$. Le cours nous indique que si $t \mapsto a(t)$ est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{L}(E)$ alors l'ensemble des solutions de ce système est un espace vectoriel de dimension $\dim(E)$. De plus, si $t_0 \in \mathbb{R}$ et $u \in E$, il existe une unique solution telle que $y(t_0) = u$ (problème de Cauchy).
Ces rappels étant faits, je dis que (6) est un problème de Cauchy pour un système différentiel linéaire d'inconnue $V\ :\ t \in \mathbb{R} \mapsto V(t) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (et donc, ici, $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$). L'application a du rappel est celle qui à un réel t associe $a(t)\ :\ M \mapsto U(t)M$ qui est bien linéaire de E dans E.
Comme $t \mapsto a(t)$ est continue (ce qui résulte de la continuité de $t \mapsto U(t)$, provenant elle même de la continuité des α_i), le problème (6) admet bien une unique solution.
Remarque : tout s'éclaire quand on comprend qu'il s'agit d'un système à m^2 inconnues qui sont les fonctions coordonnées $v_{i,j}$ de V. La première équation du système est, par exemple,

$$v_{1,1}'(t) = \sum_{k=1}^{m} u_{1,k}(t)v_{k,1}(t) = \alpha_1(t)v_2(t)$$

Il y a m^2 telles équations et on est bien dans le cadre du cours...

Q.10. 3 points Posons $W\ :\ t \mapsto V^T(t)V(t)$. W est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall t \in \mathbb{R},\ W'(t) = (V'(t))^TV(t) + (V(t))^TV'(t)$$

Or, $(V'(t))^T = (V(t))^TU^T(t) = -V^T(t)U(t)$ et $V'(t) = U(t)V(t)$. Ainsi,U antisym !

$$\forall t \in \mathbb{R},\ W'(t) = 0$$

W est donc constante sur l'intervalle $\mathbb{R}$. Comme $W(0) = I$, on a ainsi

$$\forall t \in \mathbb{R},\ V^T(t)V(t) = W(t) = I$$

ce qui montre que $V(t) \in O_m(\mathbb{R})$ pour tout réel t.

Q.11. 3+2 points Comme $(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$, on a

$$\begin{aligned}(V^TTV)' &= (V')^TTV + V^TT'V + V^TTV' \\ &= V^TU^TTV + V^T(UT - TU)V + V^TTUV \\ &= 0\end{aligned}$$

le dernier point provenant de l'antisymétrie de $U(t)$. Une fonction à dérivée nulle sur un intervalle est constante et ainsi

$$\forall t \in \mathbb{R},\ V^T(t)T(t)V(t) = V^T(0)T(0)V(0) = T_0$$

Comme $V(t)$ est orthogonale, ceci montre que $T(t)$ est semblable à T_0 pour tout t. Deux matrices semblables ayant même spectre, on a

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \sigma(T(t)) = \sigma(T_0)$$

7. Etude asymptotique.

Q.12. 2+1 points L est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned}L' &= 2\sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i\alpha_i' + \sum_{i=1}^{m} \beta_i\beta_i' \\ &= 2\sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i^2(\beta_{i+1} - \beta_i) + 2\sum_{i=1}^{m} \beta_i(\alpha_1^2 - \alpha_{i-1}^2)\end{aligned}$$

En développant, les termes s'éléminent presque tous. Il reste

$$L' = -2\alpha_0^2\beta_1 + 2\beta_m\alpha_m^2 = 0$$

L est donc constante sur l'intervalle $\mathbb{R}$:

$$\forall t \in \mathbb{R},\ L(t) = L(0) = \sum_{i=1}^{m-1} a_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} b_i^2$$

Une somme de carrés étant positive, on a donc on m'a raconté des carabistouilles...

$$\forall k \in [1, m],\ \beta_k(t)^2 \leqslant 2L(t) = 2L(0)$$

et donc

$$\forall k \in [1, m],\ |\beta_k(t)| \leqslant D = \sqrt{2L(0)}$$

Q.13. 3+2 points Fixons $i \in [1, m-1]$. On a

$$\sum_{j=1}^{i} \beta_j'(t) = 2\sum_{j=1}^{i}(\alpha_j^2(t) - \alpha_{j-1}^2(t)) = 2(\alpha_i^2(t) - \alpha_0^2(t)) = 2\alpha_i^2(t)$$

Intégrons cette égalité sur $[0, t]$:

$$\forall t \in \mathbb{R},\ 2\int_0^t \alpha_i^2(t)\ dt = \sum_{j=1}^{i}(\beta_j(t) - \beta_j(0)) = \sum_{j=1}^{i}(\beta_j(t) - b_j)$$

La fonction $t \mapsto \displaystyle\int_0^t \alpha_i^2(t)\ dt$ est croissante sur $\mathbb{R}$ (puisque α_i^2 est positive) et elle est bornée (les β_j le sont). Par théorème de limite monotone, cette fonction admet une limite finie en $+\infty$ et en $-\infty$. Ainsi, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \alpha_i^2$ existe. Et comme $\alpha_i^2 \geqslant 0$, ceci revient à dire que

$$\alpha_i^2 \in L^1(\mathbb{R})$$

Q.14. 3 points On montre par récurrence sur i que la propriété H_i : "β_i admet une limite finie en $\pm\infty$" est vraie pour tout $i \in [1, m]$.

- Initialisation : on a $\beta_1(t) = b_1 + 2\displaystyle\int_0^t \alpha_1^2$ et H_1 est vraie puisque $\alpha_1^2 \in L^1(\mathbb{R})$.

- Hérédité : soit $i \in [2, m]$ tel que $H_1, \ldots, H_{i-1}$ soient vraies. On a cette fois

$$\beta_i(t) = b_i - \sum_{k=1}^{i-1} (\beta_k(t) - b_k) + 2 \int_0^t \alpha_i^2$$

Comme $\alpha_i^2 \in L^1$ et comme $\beta_1, \ldots, \beta_{i-1}$ admettent des limites finies en $\pm\infty$, la propriété H_i est vraie elle aussi.

Q.15. 2+3 points On a Attention aux signes !!

$$\forall t \in \mathbb{R},\ |\alpha_i(t)\alpha_i'(t)| = |\alpha_i^2(t)(\beta_{i+1}(t) - \beta_i(t))| \leqslant 2D\alpha_i^2(t)$$

Ainsi, $\alpha_i\alpha_i'$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et majorée en module par une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$. C'est donc aussi une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$.
Remarquons que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \int_0^t \alpha_i(u)\alpha_i'(u)\ du = \frac{1}{2}(\alpha_i^2(t) - \alpha_i^2(0)) = \frac{1}{2}\alpha_i^2(t)$$

On vien de voir que le membre de gauche admet une limite finie en $\pm\infty$ (l'intégrabilité entraîne l'existence de l'intégrale). Il en est donc de même du membre de droite et α_i admet des limites finie ℓ_i^+ et ℓ_i^- en $+\infty$ et $-\infty$. Si, par l'absurde, $\ell_i^+ \neq 0$ alors $|t\alpha_i^2(t)| \to +\infty$ quand $t \to +\infty$ ce qui indique que α_i^2 n'est pas intégrable au voisinage de $+\infty$ et est contradictoire avec ce qui précède. On a donc

$$\lim_{t \to +\infty} \alpha_i(t) = 0$$

On montre de même que

$$\lim_{t \to -\infty} \alpha_i(t) = 0$$

Q.16. 3 points On a $T(t) \mapsto \mathrm{diag}(\beta_1^+, \ldots, \beta_m^+)$ quand $t \to +\infty$ (par exemple pour la norme infinie, le choix de norme importe peu puisque $\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ est de dimension finie). Or, $M \mapsto \det(M)$ est continue (par exemple par multilinéarité en dimension finie ou, plus simplement, par théorèmes d'opérations puisque le déterminant est somme et produit des coefficients de la matrice). On a donc

$$\lim_{t \to +\infty} \det(\lambda I - T(t)) = \det(\lambda I - \mathrm{diag}(\beta_1^+, \ldots, \beta_m^+)) = \prod_{i=1}^{m} (\lambda - \beta_i^+)$$

Par ailleurs, on a vu (question 11) que $\sigma(T(t)) = \sigma(T_0)$ pour tout t et (question 8) que les valeurs propres de T_0 sont simples et en nombre m. On a donc

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \chi_t(\lambda) = \prod_{s \in \sigma(T_0)} (\lambda - s)$$

Un passage à la limite donne alors

$$\prod_{i=1}^{m} (\lambda - \beta_i^+) = \prod_{s \in \sigma(T_0)} (\lambda - s)$$

En procédant de même en $-\infty$, on a donc

$$\prod_{i=1}^{m} (\lambda - \beta_i^-) = \prod_{s \in \sigma(T_0)} (\lambda - s)$$

Q.17. 2 points En identifiant les racines des polynômes on a donc

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \sigma(T(t)) = \sigma(T_0) = B^+ = B^-$$

Q.18. fin du barême Par définition de la borne inférieure, il existe une suite (t_n) d'éléments de A^+ telle que $t_n \to \tau$ quand $n \to +\infty$. α_i étant continue, on en déduit que

$$\alpha_i(\tau) = \lim_{n\to+\infty} \alpha_i(t_n) = 0$$

α_i ne s'annulant pas sur $]0, \tau[$ (par définition de la borne inférieure) et étant non nulle en 0, elle est par théorème des valeurs intermédiaires (qui s'applique puisque α_i est continue) du signe de a_i sur tout l'intervalle.

Q.19. α_i ne s'annulant pas sur $[0, \tau[$, les relations (7) donnent

$$\forall t \in [0, \tau[,\ \frac{\alpha_i'(t)}{\alpha_i(t)} = \beta_{i+1}(t) - \beta_i(t)$$

En intégrant cette relation on en déduit que

$$\forall t \in [0, \tau[,\ \ln(|\alpha_i(t)|) - \ln(|\alpha_i(0)|) = \int_0^t (\beta_{i+1}(u) - \beta_i(u))\, du$$

On passe à la valeur absolue et on utilise la postivité de l'intégrale pour en déduire

$$\begin{aligned} \forall t \in [0, \tau[,\ |\ln(|\alpha_i(t)|) - \ln(|\alpha_i(0)|)| &\leqslant \int_0^t |\beta_{i+1}(u) - \beta_i(u)|\, du \\ &\leqslant \int_0^t (|\beta_{i+1}(u)| + |\beta_i(u)|)\, du \\ &\leqslant 2Dt \\ &\leqslant 2D\tau \end{aligned}$$

En passant à la limite quand $t \to \tau^-$, on obtient une contradiction ($+\infty \leqslant 2D\tau$) et on a donc $A^+ = \emptyset$. On fait le même raisonnement pour montrer que $A^- = \emptyset$ (on suppose l'inverse, on note τ la borne supérieure de A^- et on travaille sur $[\tau, 0[$). On a donc

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \alpha_i(t) \neq 0$$

Q.20. Supposons, par l'absurde, que $\beta_{i+1}^+ \geqslant \beta_i +$. La question 17 montre que les β_k^+ sont deux à deux distincts (puisque B^+ est de cardinal m) et on a donc $\beta_{i+1}^+ > \beta_i +$. Par définition des limites,

$$\exists\, t_0/\ \forall t \geqslant t_0,\ \beta_{i+1}(t) > \beta_i(t)$$

- Si $a_i > 0$ alors α_i est toujours > 0 et les relations (7) donnent

  $$\forall t \geqslant t_0,\ \alpha_i'(t) > 0$$

  α_i est donc croissante sur $[t_0, +\infty[$, > 0 en t_0 et de limite nulle en $+\infty$, ce qui est impossible.
- Si $a_i < 0$ alors α_i est toujours < 0 et les relations (7) donnent

  $$\forall t \geqslant t_0,\ \alpha_i'(t) < 0$$

  α_i est donc décroissante sur $[t_0, +\infty[$, < 0 en t_0 et de limite nulle en $+\infty$, ce qui est impossible.

Dans tous les cas, on a une contradiction et ainsi

$$\beta_{i+1}^+ < \beta_i^+$$

Les suites (β_k) et les (λ_k) sont toutes deux ordonnées dans l'ordre décroissant et prennent des valeurs globalement égales (question 17). On a donc

$$\forall i,\ \beta_{i+1}^+ = \lambda_i$$

On pourrait bien sûr mener une récurrence sur i pour le justifier.

Q.21. Par définition des limites,

$$\exists S > 0/\ \forall t \geqslant S,\ \beta_i(t) - \beta_{i+1}(t) \geqslant \delta$$

Distinguons encore deux cas.

- Si $a_i > 0$ alors α_i reste > 0 et (7) donne

$$\forall t \geqslant S,\ \alpha_i'(t) \leqslant -\delta \alpha_i(t)$$

$t \mapsto \alpha_i(t)e^{\delta t}$ est donc strictement décroissante sur $[S, +\infty[$ (sa dérivée est strictement négative) et si on pose $C = \alpha_i(S)e^{\delta S}$ on a

$$\forall t > S,\ 0 \leqslant \alpha_i(t) < Ce^{-\delta t}$$

- Si $a_i < 0$ alors α_i reste < 0 et (7) donne

$$\forall t \geqslant S,\ \alpha_i'(t) \geqslant -\delta \alpha_i(t)$$

$t \mapsto \alpha_i(t)e^{\delta t}$ est donc strictement croissante sur $[S, +\infty[$ (sa dérivée est strictement positive) et si on pose $C = -\alpha_i(S)e^{\delta S}$ on a

$$\forall t > S,\ -Ce^{-\delta t} < \alpha_i(t) \leqslant 0$$

Dans les deux cas, on a trouvé $C > 0$ tel que

$$\forall t > S,\ |\alpha_i(t)| < Ce^{-\delta t}$$

Si on veut des constantes indépendantes de i, il suffit de prendre le maximum des ces constantes pour $i = 1, m$. On fera cette hypothèse dans la suite. On a donc

$$\exists S, C > 0 /\ \forall i \in [1, m],\ \forall t > S,\ |\alpha_i(t)| < Ce^{-\delta t}$$

En utilisant les formules vues en question 14, on a

$$\beta_1(t) - \beta_1(s) = 2 \int_s^t \alpha_1^2$$

$$\forall i \in [2, m],\ \beta_i(t) - \beta_i(s) = -\sum_{k=1}^{i-1} (\beta_k(t) - \beta_k(s)) + 2 \int_s^t \alpha_i^2$$

On fait tendre t vers $+\infty$ puis on passe au module :

$$|\lambda_1 - \beta_1(s)| = 2 \int_s^{+\infty} \alpha_1^2$$

$$\forall i \in [2, m],\ |\lambda_i - \beta_i(s)| \leqslant \sum_{k=1}^{i-1} |\beta_k(t) - \beta_k(s)| + 2 \int_s^{+\infty} \alpha_i^2$$

Pour $s > S$, on peut utiliser le début de la question pour majorer u_i^2. Pour tout $s > S$, on a alors

$$|\lambda_1 - \beta_1(s)| < \frac{C^2}{\delta} e^{-2\delta s}$$

$$\forall i \in [2, m],\ |\lambda_i - \beta_i(s)| < \sum_{k=1}^{i-1} |\beta_k(t) - \beta_k(s)| + \frac{C^2}{\delta} e^{-2\delta s}$$

Une récurrence immédiate donne finalement

$$\forall s > S,\ \forall i \in [1..m],\ |\lambda_i - \beta_i(s)| < \frac{(i+1)C^2}{\delta} e^{-2\delta s}$$

et on obtient le résultat voulu en posant

$$C' = \frac{(m+1)C^2}{\delta}$$

Commentaires sur le site et à l'oral après la correction de quelques copies.