N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Barême en bleu , remarques complémentaires en rouge.

Mais après correction des copies.

Les calculatrices sont interdites

L'épreuve est constituée d'un problème en cinq parties largement indépendantes.

Lorsqu'un raisonnement utilise un résultat obtenu précédemment dans le problème, il est demandé au candidat d'indiquer précisément le numéro de la question utilisée.

Problème

Soit $p \in]0,1[$. On pose $q = 1 - p$.

On considère un automate qui génère successivement les lettres C ou P jusqu'à obtenir une certaine séquence prédéfinie.

On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'automate génère la n-ième lettre à l'instant n de façon indépendante de toutes les générations précédentes. On suppose également qu'à chaque génération, les lettres P et C ont des probabilités p et q (respectivement) d'être générées. Suivant les parties considérées, on définit différents niveaux que l'automate peut atteindre.

On considère dans tous les cas que l'automate est initialement au niveau 0. On se propose alors d'étudier essentiellement l'existence de l'espérance et de la variance de la variable aléatoire correspondant au temps d'attente de la séquence prédéfinie à travers sa série génératrice.

Pour cette étude probabiliste, on mobilise diverses propriétés analytiques (surtout sur les séries entières) et quelques propriétés d'algèbre linéaire.

Dans les parties **I**, **II** et **V**, on examine le temps d'attente pour les séquences C puis CC, puis CPC et CCPPC. La partie **II** est indépendante de la partie **I** et traite de questions préliminaires sur les séries entières qui seront investies dans les parties **III** et **V**. La partie **IV** est indépendante des parties précédentes et traite les questions préliminaires d'algèbre linéaire qui servent exclusivement dans la partie **V**. La partie **III** ne dépend de la partie **I** que par la question **Q3** et de la partie **II** que par la question **Q8**. La partie **V** utilise seulement la question **Q9** de la partie **II** et la partie **IV**.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note P_n l'événement «l'automate génère la lettre P à l'instant n » et C_n l'événement «l'automate génère la lettre C à l'instant n».

Partie I – Étude d'un cas simple

Dans cette partie, on dit que l'automate passe du niveau 0 au niveau 1 dès qu'il génère la lettre C. Si, en revanche, il génère la lettre P, alors il reste au niveau 0. L'expérience s'arrête dès que

l'automate a atteint le niveau 1. On résume l'expérience par la figure 1 suivante :

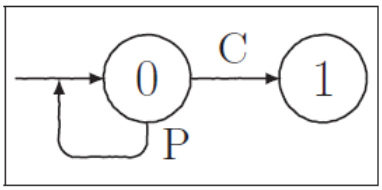


Figure 1

On note Y l'instant où, pour la première fois, l'automate atteint le niveau 1. On admet que Y est une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ telle que $Y(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$.

On note G_Y la série génératrice de Y et R_Y son rayon de convergence.

On sait alors que $R_Y \geqslant 1$ et que :

$$\forall t \in]-R_Y, R_Y[,\ G_Y(t) = \mathbf{E}(t^Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(Y=n)t^n.$$

Q1. Reconnaître la loi de Y et préciser en particulier $\mathbf{P}(Y=n)$ pour $n \in N^*$.

Q2. Montrer que $R_Y = \dfrac{1}{p} > 1$ et que : $\forall t \in \left]-\dfrac{1}{p}, \dfrac{1}{p}\right[, \quad G_Y(t) = \dfrac{qt}{1-pt}$.

Q3. En déduire l'existence et les valeurs de l'espérance $\mathbf{E}(Y)$ et de la variance $\mathbf{V}(Y)$.

Partie II – Séries entières

Soit $z \in \mathbb{C}$ et $a \in \mathbb{C}^*$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n(a) = -\dfrac{1}{a^{n+1}}$.

Q4. Montrer que $\sum u_n(a)z^n$ est une série entière de rayon de convergence égal à $|a|$.

Q5. Montrer que si $|z| < |a|$, on a : $\dfrac{1}{z-a} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(a)z^n$.

Soit a, b et λ des nombres complexes non nuls.

Dans les questions **Q6** à **Q8**, on suppose que $|a| < |b|$.

On définit alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$v_n = \sum_{k=0}^{n} u_k(a)u_{n-k}(b)$ et, pour tout réel t tel que $|t| < |a|$.

$$f(t) = \frac{\lambda t^2}{(t-a)(t-b)}.$$

Q6. Montrer que l'on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{a^{n+1}} - \frac{1}{b^{n+1}}\right).$$

En déduire un éuivalent de v_n en l'infini.

Q7. En déduire que le rayon de convergence de $\sum v_n z^n$ est égal à $|a|$ et que si $|z| < |a|$, alors

$$\frac{1}{(z-a)(z-b)} = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n z^n.$$

Q8. Justifier que f est développable en série entière au voisinage de 0 et que la série entière qui lui est associée possède un rayon de convergence R_f tel que $R_f = |a|$.

Soit a, b, c et λ des nombres complexes non nuls. On suppose que : $|a| \leqslant |b| \leqslant |c|$.

Pour tout réel t tel que $|t| < |a|$, on pose :

$$g(t) = \frac{\lambda t^3}{(t-a)(t-b)(t-c)}.$$

Q9. Justifier que g est développable en série entière au voisinage de 0 et que la série entière qui lui est associée possède un rayon de convergence R_g tel que $R_g \geqslant |a|$.

Partie III – Étude d'un cas intermédiaire

Dans cette partie, on suppose que l'automate passe du niveau 0 au niveau 1 en générant la lettre C.

De même, l'automate passe du niveau 1 au niveau 2 en générant la lettre C.

Si, en revanche, il génère la lettre P alors qu'il est au niveau 0 ou 1, il retombe au niveau 0.

L'expérience s'arrête dès que l'automate a atteint le niveau 2, c'est-à-dire dès que l'automate aura généré la séquence CC.

On résume l'expérience par la figure 2 suivante :

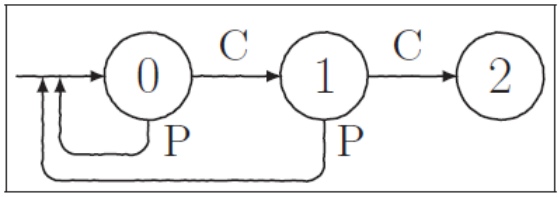


Figure 2

On note Z l'instant où, pour la première fois, l'automate atteint le niveau 2. Ainsi Z est le temps d'attente de la séquence CC. On admet que Z est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ telle que $Z(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $p_n = \mathbf{P}(Z = n)$. On note G_Z la série génératrice de Z et R_Z son rayon de convergence. On rappelle que $R_Z \geqslant 1$.

Q10. Calculer p_1, p_2 et p_3.

Q11. Montrer que, pour tout $n \geqslant 3$, on a : $p_n = p\,p_{n-1} + pq\,p_{n-2}$.

Q12. En déduire que pour tout $t \in [-1,1]$, on a : $\left(1-pt-pqt^2\right) G_Z(t) = q^2t^2$.

Pour $t \in \mathbb{R}$, on note $Q(t) = 1-pt-pqt^2$, $\Delta = p^2+4pq$, $a = \dfrac{\sqrt{\Delta}-p}{2pq}$ et $b = \dfrac{-\sqrt{\Delta}-p}{2pq}$.

Q13. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $Q(t) = -pq(t-a)(t-b)$.

Q14. Montrer que $1 < |a| < |b|$.

Pour tout réel t tel que $|t| < |a|$, on définit $f(t) = \dfrac{q^2t^2}{1-pt-pqt^2}$.

Q15. Montrer à l'aide de la question **Q8** que f est développable en série entière au voisinage de 0, que sa série entière associée est G_Z et que $R_Z = |a|$.

Q16. Montrer que Z admet une espérance et une variance, puis que $\mathbf{E}(Z) = q^{-1}+q^{-2}$.

Q17. Vérifier, à l'aide des questions **Q3** et **Q16**, que $\mathbf{E}(Z) \geqslant \mathbf{E}(Y)+1$, où Y est la variable aléatoire définie en partie **I**.

Q18. Pouvait-on prévoir le résultat précédent ?

Partie IV – Algèbre linéaire

On considère les matrices $I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} p & 0 & p & 0 \\ q & q & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Soit $t \in \mathbb{R}$.

On note χ_A le polynôme caractéristique de A, si bien que $\chi_A(t)$ est le déterminant de $tI_4 - A$.

Q19. Montrer que 0 est valeur propre de A et donner un vecteur propre de A associé à la valeur propre 0.

Q20. Trouver les réels α, β et γ tels que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\chi_A(t) = t^4 - t^3 + \alpha t^2 + \beta t + \gamma$.

On dit que la matrice colonne $S = \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix}$ est solution de (E_t) lorsque $S = tAS + L$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note $\psi_A(t)$ le déterminant de la matrice $I_4 - tA$.

Q21. Vérifier que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\psi_A(t) = -p^2qt^3 + pqt^2 - t + 1$.

Q22. En déduire que, pour t au voisinage de 0, l'équation (E_t) possède une unique solution S.

Pour tout $k \in [\![1,4]\!]$, on note U_k la k-ième colonne de $I_4 - tA$. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{C})$ et on suppose que la matrice colonne $S = \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix}$ est solution de (E_t).

Q23. Vérifier que $L = S_0U_1 + S_1U_2 + S_2U_3 + S_3U_4$.

Q24. En déduire que $\det_{\mathcal{B}}(U_1, U_2, U_3, L) = S_3 \cdot \psi_A(t)$.

Q25. Montrer que, pour t au voisinage de 0, on a l'égalité :

$$S_3 = \frac{pq^2t^3}{-p^2qt^3 + pqt^2 - t + 1}.$$

On se propose de déterminer certaines propriétés des valeurs propres de A.

On note λ une valeur propre complexe non nulle de A.

Q26. Montrer qu'il existe trois complexes non tous nuls x_1, x_2 et x_3 tels que :

$$(\mathcal{H}) \qquad \begin{cases} px_1 + qx_2 = \lambda x_1 \\ qx_2 + px_3 = \lambda x_2 \\ px_1 = \lambda x_3 \end{cases}.$$

On considère désormais 3 complexes non tous nuls x_1, x_2 et x_3 qui vérifient le système $(\mathcal{H})$.

On note alors $M = \max(|x_1|, |x_2|, |x_3|)$.

Q27. Justifier que l'on est toujours dans l'un des trois cas suivants :

i) $M = |x_3|$;
ii) $M = |x_2|$ avec $M > |x_3|$;
iii) $M = |x_1|$ avec $M > |x_2|$ et $M > |x_3|$.

Q28. En déduire que $|\lambda| < 1$.

Q29. Montrer l'existence de nombres complexes μ, a, b et c tels que :

$$\mu \neq 0, \qquad 1 < |a| \leqslant |b| \leqslant |c| \qquad \text{et} \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \psi_A(t) = \mu(t-a)(t-b)(t-c)t.$$

Partie V – Étude d'un dernier cas

Dans cette partie, on suppose que :

– l'automate passe du niveau 0 au niveau 1 en générant la lettre C ;

– l'automate passe du niveau 1 au niveau 2 en générant la lettre P ;

– l'automate passe du niveau 2 au niveau 3 en générant la lettre C ;

– si l'automate est au niveau 0 ou 2 et qu'il génère la lettre P, alors il retombe au niveau 0 ;

– si l'automate est au niveau 1 et qu'il génère la lettre C, alors il reste au niveau 1.

L'expérience s'arrête dès que l'automate a atteint le niveau 3,

c'est-à-dire dès que l'automate aura généré la séquence CPC.

Q30. Reproduire, sur votre copie, la figure 3 suivante en la complétant pour résumer l'expérience de cette partie **V**.

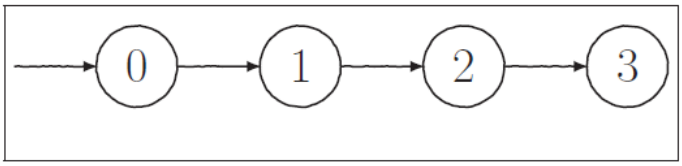


Figure 3

Pour $i \in [\![0,3]\!]$, on note $E_{n,i}$ l'événement « après avoir généré la n-ième lettre, l'automate sr trouve au niveau i» et $E_{0,i}$ l'événement «l'automate se trouve initialement au niveau i».

On pose $p_{n,i} = \mathbf{P}(E_{n,i})$ et pour tout $t \in]-1,1[$, on définit $S_i(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,i} t^n$.

On note T l'instant où, pour la première fois, l'automate atteint le niveau 3. On admet que T est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ telle que $T(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$.

On note G_T la série génératrice de T et R_T son rayon de convergence.

Q31. Déterminer $p_{0,0}$, $p_{0,1}$, $p_{0,2}$ et $p_{0,3}$.

Q32. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\left\{ \begin{array}{lcllll} p_{n,0} & = & p \cdot p_{n-1,0} & + & p \cdot p_{n-1,2} \\ p_{n,1} & = & q \cdot p_{n-1,0} & + & q \cdot p_{n-1,1} \\ p_{n,2} & = & p \cdot p_{n-1,1} & & \\ p_{n,3} & = & q \cdot p_{n-1,2} & & \end{array} \right.$.

Soit $t \in]-1,1[$. On note $S(t)$ la matrice colonne suivante : $S(t) = \begin{pmatrix} S_0(t) \\ S_1(t) \\ S_2(t) \\ S_3(t) \end{pmatrix}$.

Q33. Montrer que la matrice colonne $S(t)$ est solution de l'équation (E_t) définie en partie **IV**.

Q34. Montrer que $\forall t \in]-R_T, R_T[\,, \quad G_T(t) = \dfrac{pq^2t^3}{-p^2qt^3 + pqt^2 - t + 1}$.

Q35. Montrer que T admet une espérance et une variance.

Q36. Donner l'expression de $\mathbf{E}(T)$ en fonction de q seulement.

Q37. Proposer une méthode permettant de déterminer le temps d'attente moyen de la première réalisation par l'automate de la séquence CCPPC ; on précisera notamment le schéma des six niveaux correspondants et la matrice analogue à A que l'on peut faire intervenir dans ce cas.

Éléments de correction

Après lecture des copies, je donnerai de manière manuscrite les éléments de langage mal présentés.

Partie I – Étude d'un cas simple

Q1. Y est le rang du premier succès dans une suite d'expériences de Bernoulli **indépendantes** : cette variable aléatoire suit donc la loi géométrique de paramètre q (la probabilité de générer C). Ainsi, attention le paramètre est q 1+1

$$\boxed{Y \hookrightarrow \mathcal{G}(q) \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(Y=n) = p^{n-1}q \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.}$$

Q2. La série génératrice de Y est donc $\sum_{n\geqslant 1} \frac{q}{p}(pt)^n$, série géométrique de raison pt, donc de rayon de convergence $R_Y = 1/p$. Et, pour $|t| < 1/p$, la somme de cette série vaut

$$G_Y(t) = \frac{q}{p} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (pt)^n = \frac{q}{p} \cdot \frac{pt}{1-pt}.$$

En conclusion, puisque $p \in]0,1[$, 0.5+1.5

$$\boxed{R_Y = \frac{1}{p} > 1 \quad \text{et} \quad G_Y(t) = \frac{qt}{1-pt} \text{ pour tout } t \in \left]-\frac{1}{p}, \frac{1}{p}\right[.}$$

Q3. En tant que somme de série entière, G_Y est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R_Y, R_Y[$, les dérivées se calculant en dérivant terme à terme. Comme $R_Y > 1$, G_Y est deux fois dérivable en 1. Il en résulte que Y admet une espérance et une variance, avec 1(rayon pour convergence)

La justification de la convergence pour espérance et variance est fondamentale !

La classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ ne le prouve pas !

$$\mathbf{E}(Y) = G_Y'(1) \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(Y) = G_Y''(1) + G_Y'(1) - \left[G_Y'(1)\right]^2.$$

1.5 formules

Or pour tout $t \in]-1/p, 1/p[$,

$$G_Y'(t) = \frac{q}{(1-pt)^2} \quad \text{et} \quad G_Y''(t) = \frac{2pq}{(1-pt)^3}$$

et, comme $2p + q - 1 = p$, je retrouve les formules connues du cours 1.5 résultats

$$\boxed{\mathbf{E}(Y) = \frac{1}{q} \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(Y) = \frac{p}{q^2}.}$$

Partie II – Séries entières

Q4. Pour z fixé dans $\mathbb{C}$, $\sum u_n(a)z^n$ est une série géométrique de raison z/a, donc convergente si et seulement si $|z|<|a|$; ainsi,0.5

$$\boxed{\sum u_n(a)z^n \text{ est une série entière de rayon de convergence } |a|.}$$

Q5. Pour $|z|<|a|$, j'obtiens : 0.5

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(a)z^n = -\frac{1}{a}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(z/a)^n = -\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{1-z/a}$$

soit

$$\boxed{\text{Pour } |z|<|a|,\ \sum_{n=0}^{\infty} u_n(a)z^n = \frac{1}{z-a}.}$$

Q6. Soit $n\in\mathbb{N}$; par définition de v_n et par la formule donnant la somme de termes consécutifs d'une suite génométrique de raison différente de 1 ($a\neq b$ puisque $|a|<|b|$) :

$$v_n = \sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{1}{a^{k+1}}\right)\left(-\frac{1}{b^{n-k+1}}\right) = \frac{1}{ab^{n+1}}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{b}{a}\right)^k = \frac{1}{ab^{n+1}}\cdot\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{n+1}-1}{\frac{b}{a}-1}$$

d'où en distribuant 1.5

Arnaques interdites résulats dans énoncé...

$$\boxed{v_n = \frac{1}{b-a}\cdot\left(\frac{1}{a^{n+1}}-\frac{1}{b^{n+1}}\right).}$$

Q7. Comme $|1/b|<|1/a|$ par hypothèse, il en résulte que $v_n\sim\dfrac{1}{b-a}\cdot\dfrac{1}{a^{n+1}}$ 1 équivalent et donc que le rayon de convergence de $\sum v_n z^n$ est le même que celui de $\sum\dfrac{z^n}{a^n}$, soit $|a|$ 0.5 . Alors, pour $|z|<|a|$, les deux séries $\sum u_n(a)z^n$ et $\sum u_n(b)z^n$ sont absolument convergentes et le produit de Cauchy montre alors, grâce à **Q5**, que 1.5

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} v_n z^n = \frac{1}{(z-a)(z-b)}.}$$

Q8. D'après le résultat précédent et la définition de f, j'ai, pour $|t|<|a|$, $f(t)=\lambda t^2\cdot\sum_{n=0}^{\infty} v_n t^n$ et, pour t non nul, cette série est de même nature que $\sum_{n=0}^{\infty} v_n t^n$ (puisque les termes généraux sont les mêmes à un coefficient multiplicatif non nul près !). Donc 1

Multiplication de dse dont une de rayon inifini (polynôme)

$$\boxed{f \text{ est développable en série entière en 0 avec pour rayon de convergence } R_f = |a|.}$$

Q9. Je note que $g(t) = f(t) \cdot \dfrac{1}{t-c}$, bien défini pour $|t| < |a|$ puisque $|a| \leqslant |c|$ et à nouveau développable en série entière dans le disque ouvert de rayon $|a|$ grâce à un produit de Cauchy. Par conséquent, 1.5

g est développable en série entière en 0, avec pour rayon de convergence $R_g \geqslant |a|$.

Partie III – Étude d'un cas intermédiaire

Q10. Bien entendu, $p_1 = 0$. Ensuite, $p_2 = \mathbf{P}(C_1 \cap C_2) = \mathbf{P}(C_1)\mathbf{P}(C_2)$ (par indépendance) donc $p_2 = q^2$. Enfin, la seule possibilité pour avoir $Z = 3$ est que les trois premières lettres soient PCC donc, toujours par indépendance : $p_3 = \mathbf{P}(P_1 \cap C_2 \cap C_3) = \mathbf{P}(P_1)\mathbf{P}(C_2)\mathbf{P}(C_3) = pq^2$. En conclusion 1.5

$p_1 = 0$, $p_2 = q^2$ et $p_3 = pq^2$.

Notons que p_0 est nul également, puisque Z est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$!

Q11. Fixons $n \geqslant 3$. Je note que $(P_1, C_1 \cap P_2, C_1 \cap C_2)$ est un système complet d'événements : ils sont incompatibles 2 à 2 car P_1, C_1 d'une part et P_2, C_2 d'autre part sont incompatibles ; de plus leur union est bien l'univers tout entier puisque $(C_1 \cap P_2) \cup (C_1 \cap C_2) = C_1 = \overline{P_1}$.

La formule des probabilités totales me donne alors :

Question fondamentale, résultats dans énoncé...

$$p_n = \mathbf{P}(Z = n) = \mathbf{P}(P_1)\mathbf{P}_{P_1}(Z = n) + \mathbf{P}(C_1 \cap P_2)\mathbf{P}_{C_1 \cap P_2}(Z = n) + \mathbf{P}(C_1 \cap C_2)\mathbf{P}_{C_1 \cap C_2}(Z = n)$$

Si la première lettre est P, alors l'automate est dans l'état zéro, donc la probabilité pour que $n-1$ lettres plus tard il soit dans l'état 2 vaut $\mathbf{P}(Z = n-1)$ (processus sans mémoire) ; autrement dit 4

$$\mathbf{P}_{P_1}(Z = n) = \mathbf{P}(Z = n-1) = p_{n-1}.$$

De même, $\mathbf{P}_{C_1 \cap P_2}(Z = n) = \mathbf{P}(Z = n-2)$ (si après 2 lettres on est dans l'état 0, la probabilité de se retrouver dans l'état 2 après les $n-2$ lettres suivantes est $\mathbf{P}(Z = n-2) = p_{n-2}$). Enfin, si les deux premières lettres sont CC, alors $Z = 2$ donc $Z \neq n$ (puisque $n \geqslant 3$!) : $\mathbf{P}_{C_1 \cap C_2}(Z = n) = 0$.

De plus, $\mathbf{P}(P_1) = p$ et, par indépendance, $\mathbf{P}(C_1 \cap P_2) = \mathbf{P}(C_1)\mathbf{P}(P_2) = pq$. Ainsi :

Pour tout $n \geqslant 3$, $p_n = p\,p_{n-1} + pq\,p_{n-2}$.

Q12. Fixons $t \in [-1, 1]$. Pour tout $n \geqslant 3$, je multiplie la relation précédente par t^n et je somme membre à membre les égalités obtenues, pour n allant de 3 à l'infini (toutes les séries considérées sont absolument convergentes puisque $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$), ce qui donne (en faisant attention aux premiers termes et compte tenu de $p_0 = p_1 = 0$!)

Où était le résultat ?

$$G_Z(t) - p_2 t^2 = p\,tG_Z(t) + pq\,t^2 G_Z(t).$$

Ainsi 2

$$\boxed{\text{Pour tout } t \in [-1,1],\ \left(1 - pt - pqt^2\right) G_Z(t) = q^2 t^2.}$$

Q13. Comme $-pq \neq 0$, le polynôme $Q = 1 - pX - pqX^2$ est de degré 2 et Δ est son discriminant ; comme $\Delta > 0$(être clair), a et b sont les deux racines distinctes de Q ; on peut donc le factoriser sous la forme indiquée : $Q = -pq(X-a)(X-b)$. Ainsi : 1.5

Le nerf de la guerre ici est $\Delta > 0$

$$\boxed{\text{Pour tout } t \in \mathbb{R},\ Q(t) = -pq(t-a)(t-b).}$$

Q14. Comme $-pq < 0$, l'application Q vérifie $Q(t) \underset{t\to\pm\infty}{\longrightarrow} -\infty$, de plus 4

$$Q(-1) = 1 + p - pq = 1 + p^2 > 0 \quad \text{et} \quad Q(1) = 1 - p - pq = q^2 > 0.$$

Comme Q est continue et que $a > b$ par définition, le théorème des valeurs intermédiaires nous assure que $b < -1$ et $a > 1$. Comme enfin $|a| - |b| = a + b < 0$, j'ai bien, (tableau de variations , clair est le bienvenu)

Question pas si simple, résultats dans énoncé, le reste au tableau en cours...

$$\boxed{1 < |a| < |b|.}$$

Q15. D'après les questions précédentes, en posant $\lambda = -q/p$, j'ai $f(t) = \dfrac{\lambda t^2}{(t-a)\,(t-b)}$ et la question **Q8** s'applique (puisque $|a| < |b|$ d'après **Q14**) : f est développable en série entière, avec pour rayon de convergence $|a|$. Or d'après **Q12**, G_Z coïncide avec f sur $[-1,1]$ donc, par unicité des coefficients d'une série entière, ceux de G_Z sont les mêmes que ceux du développement de f ! Comme le rayon de convergence est entièrement déterminé par la suite des coefficients, le rayon de convergence de G_Z est aussi égal à $|a|$ et4

$$\boxed{f \text{ est développable en série entière au voisinage de 0, la série entière associée est } G_Z \text{ et } R_Z = |a|.}$$

Q16. Comme $R_Z > 1$ 0.5 (cf. **Q15** et **Q14**), G_Z est deux fois dérivable en 1 et donc

$$\boxed{Z \text{ admet une espérance et une variance.}}$$

De plus nous savons que 1.5

$$\mathbf{E}(Z) = G'_Z(1) = \frac{2q^4 - q^2(-p-2pq)}{q^4} = \frac{2q^2 + (1-q)(1+2q)}{q^2}$$

ce qui donne bien

$$\boxed{\mathbf{E}(Z) = \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2}.}$$

Q17. J'ai d'après **Q3** et **Q16**

$$\mathbf{E}(Z) - \mathbf{E}(Y) = \frac{1}{q^2} \geqslant 1 \quad \text{car} \quad q^2 \leqslant 1.$$

Autrement dit 1

$$\boxed{\mathbf{E}(Z) \geqslant \mathbf{E}(Y) + 1.}$$

Q18. La première occurrence de CC est évidemment **strictement** précédée par la première occurrence de C, donc on a toujours $Z \geqslant Y + 1$. Par croissance de l'espérance, on en déduit : $\mathbf{E}(Z) \geqslant \mathbf{E}(Y) + 1$. 1

Le résultat était prévisible !

Partie IV – Algèbre linéaire

Q19. La 4e colonne de A est nulle, ce qui signifie que 1

Le vecteur nul ne sera JAMAIS un vecteur propre !!

$0 \in SpA$ et le 4e vecteur de la base canonique est un vecteur propre associé.

Q20. Fixons $t \in \mathbb{R}$. Je développe deux fois par rapport à la dernière colonne ou Sarrus : 2

$$\chi_A(t) = t\begin{vmatrix} t-p & 0 & -p \\ -q & t-q & 0 \\ 0 & -p & t \end{vmatrix} = t\left(-p\begin{vmatrix} -q & t-q \\ 0 & -p \end{vmatrix} + t\begin{vmatrix} t-p & 0 \\ -q & t-q \end{vmatrix}\right) = t\left(-p^2q + t\,(t-p)\,(t-q)\,\right)$$

or $p + q = 1$ d'où

$$\boxed{\chi_A(t) = t^4 - t^3 + pqt^2 - p^2qt.}$$

Q21. Pour $t \in \mathbb{R}^*$, comme $(-1)^4 = 1$ j'ai (vu en cours)1.5

Vu en cours !

$$\psi_A(t) = \det\left(t\left(\frac{1}{t}I_4 - A\right)\right) = t^4\chi_A\left(\frac{1}{t}\right),$$

soit, en vérifiant que l'égalité est encore vraie pour $t = 0$,

égalité polynomiale en une infinité de points...

Si tu ouvres les yeux, ça redonne les résultats de Q.20

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \quad \psi_A(t) = -p^2qt^3 + pqt^2 - t + 1.}$$

Q22. Comme $\psi_A(0) = 1$ et que ψ_A est continue, il existe un voisinage de 0 sur lequel ψ_A ne s'annule pas. Pour t dans un tel voisinage, $I_4 - tA$ est donc inversible, or l'équation (E_t) s'écrit $(I_4 - tA)\,S = L$; elle admet donc une unique solution dès que $I_4 - tA$ est inversible. En conclusion 3

$$\boxed{\text{Pour } t \text{ au voisinage de 0, } (E_t) \text{ admet une unique solution } S.}$$

Q23. Par hypothèse, $(I_4 - tA)\,S = L$; or la définition du produit matriciel fait que $(I_4 - tA)\,S$ n'est autre que la combinaison linéaire $S_0U_1 + S_1U_2 + S_2U_3 + S_3U_4$ des vecteurs colonnes de la matrice carrée $I_4 - tA$. Ainsi 1.5

$$\boxed{L = S_0U_1 + S_1U_2 + S_2U_3 + S_3U_4.}$$

Q24. La multilinéarité du déterminant dans la base $\mathcal{B}$, accompagnée du fait qu'un déterminant est nul dès que la famille comporte deux vecteurs identiques, permet d'écrire, compte tenu du résultat précédent,1

$$\det_{\mathcal{B}}(U_1, U_2, U_3, L) = S_3 \det_{\mathcal{B}}(U_1, U_2, U_3, U_4).$$

Or ce dernier déterminant n'est autre que celui de $I_4 - tA$! Finalement, 1

$$\boxed{\det_{\mathcal{B}}(U_1, U_2, U_3, L) = S_3 \cdot \psi_A(t).}$$

Q25. Comme nous l'avons vu à la question **Q22**, $\psi_A(t)$ est non nul pour t au voisinage de zéro et alors

$$S_3 = \frac{\det_{\mathcal{B}}(U_1, U_2, U_3, L)}{\psi_A(t)}.$$

Le lecteur avisé aura reconnu l'une des formules de Cramer...

Il ne reste plus qu'à calculer le numérateur ;

pour cela je développe par rapport à la dernière colonne :

$$\det_{\mathcal{B}}(U_1, U_2, U_3, L) = \begin{vmatrix} 1-pt & 0 & -pt & 1 \\ -qt & 1-qt & 0 & 0 \\ 0 & -pt & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -qt & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -qt & 1-qt & 0 \\ 0 & -pt & 1 \\ 0 & 0 & -qt \end{vmatrix} = pq^2t^3$$

puisque cette dernière matrice est triangulaire ! D'où, compte tenu de **Q21**,3

$$\boxed{S_3 = \frac{pq^2t^3}{-p^2qt^3 + pqt^2 - t + 1}.}$$

Q26. En regardant bien, je vois que le système $(\mathcal{H})$ considéré correspond à la recherche d'un vecteur propre de la matrice A^T. Or par hypothèse λ est valeur propre de A, donc de A^T, puisque A et A^T ont le même polynôme caractéristique.

Je dispose donc d'un vecteur non nul

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ tel que $A^T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \lambda. \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire tel que 4

$$\begin{cases} px_1 + qx_2 = \lambda x_1 \\ qx_2 + px_3 = \lambda x_2 \\ px_1 + qx_4 = \lambda x_3 \\ 0 = \lambda x_4 \end{cases}.$$

$\boxed{x_1,\ x_2,\ x_3 \text{ sont non tous nuls et vérifient } (\mathcal{H}).}$

Q27. x_1, x_2, x_3 étant trois complexes ainsi fixés, on a posé $M = \max(|x_1|, |x_2|, |x_3|)$. Comme x_1, x_2, x_3 sont non tous nuls, j'ai $M > 0$. J'opère une disjonction des cas :
Comme $\lambda \neq 0$ par hypothèse, la quatrième ligne montre que nécessairement $x_4 = 0$ et il en résulte que

- si $M = |x_3|$, alors nous sommes dans le cas **i)**
- sinon $|x_3| < M$ et de nouveau deux cas se présentent :
  - si $M = |x_2|$, alors nous sommes dans le cas **ii)**
  - sinon $|x_2| < M$ et comme $|x_3| < M$ nécessairement $M = |x_1|$, alors nous sommes dans le cas **iii)**.

En conclusion, 2

$\boxed{\text{Nous sommes dans l'un des trois cas } \textbf{i)}, \textbf{ii)}, \textbf{iii)}.}$

Q28. Il suffit de prouver le résultat dans les trois cas précédents !

- Dans le cas **i)** : $|x_3| = M > 0$, donc la troisième ligne de $(\mathcal{H})$ donne, en divisant par x_3 et en prenant les modules, puisque $|x_1| \leqslant M$ par définition,
$$|\lambda| = p\,\frac{|x_1|}{M} \leqslant p < 1.$$
- Dans le cas **ii)** : $|x_2| = M > 0$, donc la deuxième ligne de $(\mathcal{H})$ donne, en divisant par x_2 et grâce à l'inégalité triangulaire,
$$|\lambda| \leqslant q + p\,\frac{|x_3|}{M} < q + p \quad \text{car} \quad p > 0 \quad \text{et} \quad \frac{|x_3|}{M} < 1.$$
Or $p + q = 1$, j'ai donc ici aussi $|\lambda| < 1$.
- Dans le cas **iii)** : $|x_1| = M > 0$, donc la première ligne de $(\mathcal{H})$ donne, en divisant par x_1 et encore grâce à l'inégalité triangulaire,
$$|\lambda| \leqslant p + q\,\frac{|x_2|}{M} < p + q \quad \text{car} \quad q > 0 \quad \text{et} \quad \frac{|x_2|}{M} < 1.$$
Or $p + q = 1$, j'ai donc là aussi $|\lambda| < 1$.

Au final, dans tous les cas, 4

$\boxed{|\lambda| < 1.}$

Q29. Le polynôme χ_A est de degré 4 et admet 0 comme racine **simple**, puisque nous avons vu à la question **Q20** que $\chi_A(0) = 0$ et $\chi'_A(0) = -p^2q \neq 0$. D'après le théorème de d'Alembert, χ_A admet donc un système de racines de la forme $(0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ où λ_1, λ_2, λ_3 sont trois nombres complexes non nuls. Quitte à les réordonner, je peux supposer que

$$|\lambda_1| \leqslant |\lambda_2| \leqslant |\lambda_3|.$$

Or ces valeurs sont non nulles et de module strictement inférieur à 1 d'après **Q28**.

Comme χ_A est unitaire, je peux conclure que

$$\chi_A = X(X-\lambda_1)(X-\lambda_2)(X-\lambda_3) \quad \text{où} \quad 0 < |\lambda_1| \leqslant |\lambda_2| \leqslant |\lambda_3| < 1.$$

Soit alors $t \in \mathbb{R}^*$; j'ai d'après **Q21**

$$\psi_A(t) = t^4 \chi_A\left(\frac{1}{t}\right) = (1-\lambda_1 t)(1-\lambda_2 t)(1-\lambda_3 t)$$

d'où, comme λ_1, λ_2, λ_3 sont non nuls,

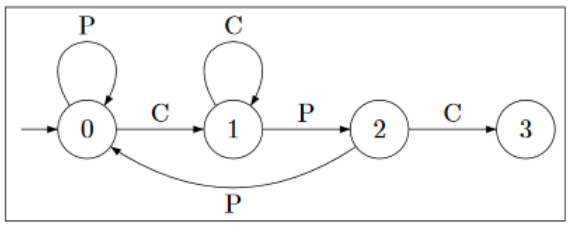
$$\psi_A(t) = -\lambda_1\lambda_2\lambda_3\left(t-\frac{1}{\lambda_1}\right)\left(t-\frac{1}{\lambda_2}\right)\left(t-\frac{1}{\lambda_3}\right).$$

Ainsi, en posant $\mu = -\lambda_1\lambda_2\lambda_3$, $a = \dfrac{1}{\lambda_3}$, $b = \dfrac{1}{\lambda_2}$, $c = \dfrac{1}{\lambda_1}$, j'ai bien 4

$$\boxed{\mu \neq 0, \quad 1 < |a| \leqslant |b| \leqslant |c| \quad \text{et} \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \psi_A(t) = \mu(t-a)(t-b)(t-c).}$$

Partie V – Étude d'un dernier cas

Q30. Voici le schéma complété selon l'algorithme décrit dans l'énoncé :1.5



L'idée générale est d'éviter de repartir à 0 lorsque la ou les dernières lettres engendrées forment un *préfixe* de la chaîne attendue (ici CPC). Dans ce cas, c'est uniquement lorsqu'on obtient CC : on peut alors rester au niveau 1 puisqu'on vient d'obtenir un C. Voir la dernière question...

Q31. Il est clair par définition que (avec la notation définie plus loin dans l'énoncé et avec

L introduit au **IV**) 1.5

$$\boxed{S(0) = \begin{pmatrix} p_{0,0} \\ p_{0,1} \\ p_{0,2} \\ p_{0,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = L.}$$

Q32. Je fixe n dans $\mathbb{N}^*$ et je considère le système complet d'événements $\left(E_{n-1,0}, E_{n-1,1}, E_{n-1,2}, E_{n-1,3}\right)$.

La formule des probabilités totales donne

$$p_{n,0} = p_{n-1,0} \cdot \mathbf{P}\left(E_{n,0} | E_{n-1,0}\right) + p_{n-1,1} \cdot \mathbf{P}\left(E_{n,0} | E_{n-1,1}\right) + p_{n-1,2} \cdot \mathbf{P}\left(E_{n,0} | E_{n-1,2}\right) + p_{n-1,3} \cdot \mathbf{P}\left(E_{n,0} | E_{n-1,3}\right)$$

soit, compte tenu des règles de transition,3

qui est bien la première relation demandée. Les trois autres s'obtiennent de même.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \text{ on a : } \begin{cases} p_{n,0} &= p \cdot p_{n-1,0} &+ p \cdot p_{n-1,2} \\ p_{n,1} &= q \cdot p_{n-1,0} &+ q \cdot p_{n-1,1} \\ p_{n,2} &= p \cdot p_{n-1,1} & \\ p_{n,3} &= q \cdot p_{n-1,2} & \end{cases}.}$$

$$p_{n,0} = p_{n-1,0} \cdot p + p_{n-1,1} \cdot 0 + p_{n-1,2} \cdot p + p_{n-1,3} \cdot 0$$

Q33. Fixons $t \in]-1, 1[$. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ je multiplie la première relation ci-dessus par t^n et je somme membre à membre les égalités obtenues, pour n allant de 1 à l'infini (toutes les séries sont absolument convergentes par comparaison à la série géométrique de raison $|t| < 1$, puisque toutes les probabilités sont au plus égales à 1). J'obtiens ainsi

$$S_0(t) - 1 = pt \cdot S_0(t) + pt \cdot S_2(t).$$

En procédant de même avec les trois autres relations, je trouve (là les coefficients constants sont nuls) :

$$\begin{cases} S_0(t) &= tp \cdot S_0(t) &+ tp \cdot S_2(t) &+ 1 \\ S_1(t) &= tq \cdot S_0(t) &+ tq \cdot S_1(t) & \\ S_2(t) &= tp \cdot S_1(t) & & \\ S_3(t) &= tq \cdot S_2(t) & & \end{cases}.$$

Je reconnais bien l'égalité matricielle 3

$$S(t) = tAS(t) + L.$$

En conclusion

$$\boxed{\text{Pour tout } t \text{ dans }]-1, 1[, \ S(t) \text{ est solution de l'équation } (E_t).}$$

Q34. L'énoncé a admis que T est une variable aléatoire ; alors par définition de l'expérience

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad p_{n,3} = \mathbf{P}(T = n)$$

puisque par construction l'accès au niveau 3 se produit au moment de l'obtention

de la séquence CPC pour la première fois.

Par conséquent, la série génératrice de T n'est autre que S_3.

Or nous avons montré à la partie **IV** que, pour t au voisinage de 0,

$$S_3(t) = \frac{pq^2t^3}{\psi_A(t)} = \frac{pq^2t^3}{\mu(t-a)(t-b)(t-c)} \quad \text{où} \quad 1 < |a| \leqslant |b| \leqslant |c|$$

et d'après **Q9** cette dernière fonction est développable en série entière avec un rayon de convergence au moins égal à $|a|$. Le même raisonnement qu'à la question **Q15** s'applique alors : l'égalité ci-dessus s'étend à l'intervalle $]-R_T, R_T[$ et donc 3

$$\boxed{\forall t \in]-R_T, R_T[\quad G_T(t) = \frac{pq^2t^3}{-p^2qt^3 + pqt^2 - t + 1}.}$$

Q35. Nous venons de voir que $R_T \geqslant |a| > 1$, donc G_T est deux fois dérivable en 1, d'où 1

$$\boxed{T \text{ admet une espérance et une variance.}}$$

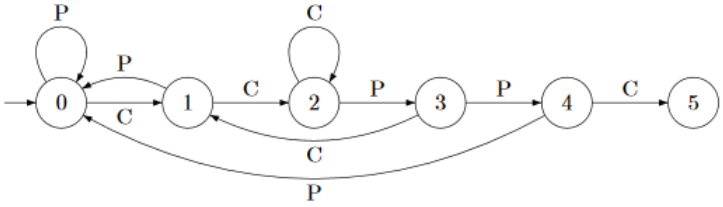
Q36. De plus $\mathbf{E}(T) = G'_T(1)$ qu'il faut calculer : 3

$$G'_T(1) = \frac{3pq^2\left(-p^2q + pq\right) - pq^2\left(-3p^2q + 2pq - 1\right)}{\left(-p^2q + pq\right)^2} = \frac{p^2q^3 + pq^2}{p^2q^4} = \frac{pq+1}{pq^2}$$

soit, en remplaçant p par $1-q$,

$$\boxed{\mathbf{E}(T) = \frac{1+q-q^2}{q^2(1-q)} = \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2(1-q)}.}$$

Q37. Reprenons l'idée évoquée à la question **Q30** : à chaque fois que la construction de la séquence CCPPC est interrompue par une "mauvaise lettre", je reviens en arrière à l'état correspondant au plus long préfixe déjà acquis. Ce qui donne ce schéma :1.5



Et la matrice associée se construit selon le principe utilisé à la question **Q32** : en numérotant lignes et colonnes de 0 à 5, $a_{i,j}$ est la probabilité de passer de l'état j à l'état i (cf. la formule des probabilités totales). Donc ici

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} p & p & 0 & 0 & p & 0 \\ q & 0 & 0 & q & 0 & 0 \\ 0 & q & q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q & 0 \end{pmatrix}.}$$

De même que dans l'étude précédente, la série génératrice S_5 de la variable aléatoire correspondant au temps d'attente de la séquence a pour somme la fonction rationnelle fournie par la formule de Cramer :

$$S_5(t) = \frac{1}{\psi_A(t)} \cdot \begin{vmatrix} 1-pt & -pt & 0 & 0 & -pt & 1 \\ -qt & 1 & 0 & -qt & 0 & 0 \\ 0 & -qt & 1-qt & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -pt & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -pt & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -qt & 0 \end{vmatrix}$$

où

$$\psi_A(t) = t^6 \chi_A\left(\frac{1}{t}\right).$$

L'espérance cherchée est alors $S_5'(1)$, sous réserve que S_5 soit bien dérivable en 1...

L'énoncé demandait de "proposer une méthode", la fin des calculs n'était pas demandée.

Cela dit, le déterminant ci-dessus se calcule tout aussi immédiatement qu'à la question **Q25**, en développant par rapport à la dernière colonne, ce qui amène le déterminant d'une matrice triangulaire !

Et le calcul de $\chi_A(x)$ se fait en un temps fini... Tous calculs fait,

$$S_5(t) = \frac{p^2q^3t^5}{-p^3q^2t^5 + p^2q^2t^4 - t + 1}$$

et je constate avec plaisir que S_5 est dérivable en 1,

puisque le dénominateur pour $t = 1$ vaut $p^2q^3 > 0$.

Un dernier calcul donne

$$S_5'(1) = \frac{1}{q} + \frac{1}{p^2q^3}.$$

<u>*Note culturelle*</u> : le point de vue adopté dans ce sujet est utilisé dans le célèbre algorithme KMP (pour Knuth-Morris-Pratt), publié en 1970 et dédié à la recherche d'une séquence donnée dans un "texte". Ce type de recherche est bien sûr implémenté dans les logiciels de traitement de texte, mais aussi pour l'étude des séquences d'ADN...

Commentaires sur le site et à l'oral après la correction de quelques copies.