

Barème en vert , remarques complémentaires en rouge.

EXERCICE 1

Polynôme de Laguerre et méthode de quadrature de Gauss

Dans tout l'exercice, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie I - Produit Scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$

I.1 - Généralités

Pour tout couple $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, on note :

$$(P \mid Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt.$$

Q.1 Montrer que l'application $(\cdot \mid \cdot) : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}$ est un produit scalaire.

I.2 - Calcul d'un produit scalaire

Q.2 Montrer que $(X^k \mid 1) = k!$ pour tout entier $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Partie II - Construction d'une base orthogonale

On considère l'application α définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \alpha(P) = XP'' + (1 - X)P'.$$

II.1 - Propriétés de l'application α

Q.3 Montrer que α est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Q.4 Écrire la matrice de α dans la base $(1, X, \dots, X^n)$.

Q.5 En déduire que α est diagonalisable et que $\text{Sp}(\alpha) = \{-k, k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$.

II.2 - Vecteurs propres de l'application α

On fixe un entier $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Q.6 Quelle est la dimension de $\ker(\alpha + k \text{Id}_{\mathbb{R}_n[X]})$?

Q.7 En déduire qu'il existe un unique polynôme $P_k \in \mathbb{R}_n[X]$,

de coefficient dominant égal à 1, vérifiant $\alpha(P_k) = -kP_k$.

Q.8 Justifier que P_k est de degré k .

Q.9 Déterminer P_0 et P_1 . Vérifier que $P_2 = X^2 - 4X + 2$.

II.3 - Orthogonalité de la famille $(P_0, \dots, P_n)$

On fixe un couple $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$.

Q.10 Montrer que $(\alpha(P) \mid Q) = - \int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t}dt$.

Q.11 En déduire que $(\alpha(P) \mid Q) = (P \mid \alpha(Q))$.

Q.12 Montrer que $(P_0, \dots, P_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

On pourra utiliser **Q7** et **Q11**.

Partie III - Méthode de quadrature de Gauss

On admet que le polynôme P_n admet n racines réelles **distinctes** que l'on note $x_1, \dots, x_n$.

On souhaite montrer qu'il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \quad \int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}dt = \sum_{i=1}^n \lambda_i P(x_i). \quad (*)$$

Q.13 Montrer qu'un n -uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ vérifie $(*)$ si et seulement si :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0! \\ 1! \\ \vdots \\ (n-1)! \end{pmatrix}.$$

Q.14 En déduire qu'il existe un unique n -uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $(*)$

Q.15 Déterminer un polynôme $P \in \mathbb{R}_{2n}[X]$ tel que :

$$\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}dt \neq \sum_{i=0}^n \lambda_i P(x_i).$$

EXERCICE 2

Une isométrie

Soient E un plan vectoriel, $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ une base de E et $\theta \in]0, \pi[$ fixé.

On considère l'endomorphisme f de E de matrice C dans la base $\mathcal{B}$: $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2\cos(\theta) \end{pmatrix}$.

On définit alors sur E une forme bilinéaire symétrique Φ par les relations :

$$\Phi(\vec{i}, \vec{j}) = \Phi(\vec{j}, \vec{i}) = \cos(\theta) \text{ et } \Phi(\vec{i}, \vec{i}) = \Phi(\vec{j}, \vec{j}) = 1.$$

On rappelle qu'une forme bilinéaire sur E est une application de E^2 dans $\mathbb{R}$, linéaire par rapport à chacune des variables.

(1) Soient $X = x_1\vec{i} + x_2\vec{j}$ et $Y = y_1\vec{i} + y_2\vec{j}$ deux vecteurs de E .

Exprimer $\Phi(X, Y)$ en fonction des réels x_1, x_2, y_1, y_2 et θ .

(2) Montrer que Φ est un produit scalaire sur E .

(3) Prouver que f est une isométrie pour le produit scalaire Φ .

(4) Déterminer un vecteur $\vec{k} \in E$ tel que $(\vec{i}, \vec{k})$ soit une base pour Φ et que $\Phi(\vec{j}, \vec{k}) > 0$.

(5) Expliciter la matrice de f dans la base $(\vec{i}, \vec{k})$. Préciser la nature de f .

(6) Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Pour quelles valeurs de $\theta \in]0, \pi[$ a-t-on $f^m = \text{id}_E$?

EXERCICE 3

Une histoire de trace

Question de cours : Soit E un espace euclidien.

Redonner sans démonstration la dimension de $F^\perp$.

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni du produit scalaire $\langle P | Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$

On note $\mathcal{B}_n = (1, X, \dots, X^n)$ la base canonique de E .

Soit u l'application qui à $P \in E$ associe $u(P)$ défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, u(P)(x) = \int_0^1 (x+t)^n P(t)dt$$

1. Montrer que $u \in \text{GL}(E)$.

2.1 Prouver que $\forall (p, q) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$, on a $\langle u(X^p) | X^q \rangle = \sum_{k=0}^n \frac{\binom{n}{k}}{(k+q+1)(n+p+1-k)}$.

2.2 En déduire que u est un endomorphisme symétrique.

3. Pourquoi existe-t-il une base orthonormale $(P_j)_{0 \leq j \leq n}$ de vecteurs propres de u associés aux valeurs propres $(\lambda_j)_{0 \leq j \leq n}$?

Montrer que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x+y)^n = \sum_{j=0}^n \lambda_j P_j(x) P_j(y)$.

Pour y réel, on pourra décomposer le polynôme $Q_y = (X+y)^n$ dans la base $(P_j)_{0 \leq j \leq n}$.

4. Déterminer alors $\text{tr}(u)$ (trace de l'endomorphisme u).

5.1 Pour tout y réel, montrer que l'on a : $u(Q_y)(y) = \frac{1}{2n+1} [(y+1)^{2n+1} - y^{2n+1}]$.

5.2 Déterminer $\text{tr}(u^2)$. On pourra calculer $\int_0^1 u(Q_y)(y) dy$.

Éléments de correction

EXERCICE I

Polynômes de Laguerre et méthode de quadrature de Gauss

Partie I - Produit scalaire dans $\mathbb{R}_n[X]$

I.1 - Généralités

Q1. Soit $(P, Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$ et f la fonction $t \mapsto P(t)Q(t)\exp(-t)$.

Par produit, f est continue sur $[0; +\infty[$.

PQ est un polynôme que l'on peut écrire sous la forme $\sum_{k=0}^d a_k X^k$.

On a alors, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $t^2 f(t) = \sum_{k=0}^d a_k t^{2+k} e^{-t}$.

Pour tout k , $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{2+k} e^{-t} = 0$ donc, par somme, $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 f(t) = 0$ et $f(t) = o(1/t^2)$.

$2 > 1$ donc $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1; +\infty[$. f l'est donc aussi.

On en conclut que f est intégrable sur $[0; +\infty[$ et donc l'intégrale $(P|Q)$ est convergente.

2 pts.

Soit $\varphi : (P, Q) \mapsto (P|Q)$.

- La question précédente prouve que φ est définie sur $(\mathbb{R}_n[X])^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
- Pour $(P_1, P_2, Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$, par linéarité d'intégrales généralisées convergentes, $\varphi(P_1 + \lambda P_2, Q) = \varphi(P_1, Q) + \lambda \varphi(P_2, Q)$: φ est linéaire à gauche.
- Par commutativité du produit dans $\mathbb{R}$, pour tout $(P, Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$, $\varphi(P, Q) = \varphi(Q, P)$: φ est symétrique ; étant linéaire à gauche, elle est bilinéaire et symétrique.
- Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. $\varphi(P, P) = \int_0^{+\infty} P(t)^2 e^{-t} dt$.
 Pour tout $t \in [0; +\infty[$, $P(t)^2 e^{-t} \geq 0$ donc, par positivité de l'intégrale, $\varphi(P, P) \geq 0$: φ est positive.
 On suppose $\varphi(P, P) = 0$; alors $\int_0^{+\infty} P(t)^2 e^{-t} dt = 0$.
 Comme $t \mapsto P(t)^2 e^{-t}$ est continue et positive, d'après le théorème de nullité de l'intégrale, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $P(t)^2 e^{-t} = 0$ et $P(t) = 0$. Le polynôme P a une infinité de racines, donc est nul. Par conséquent φ est définie.

– **Conclusion** : φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

1+2 pts

I.2 - Calcul d'un produit scalaire

Q2. On pose, pour $t \in \mathbb{R}^+$, $u(t) = t^k$, $v(t) = -e^{-t}$. u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$, pour $t \geq 0$, $u'(t) = kt^{k-1}$, $v'(t) = e^{-t}$. De plus, par croissance comparée, $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t) = 0$ donc, par intégration par parties, $\int_0^{+\infty} u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} u'(t)v(t)dt$ c'est-à-dire,

$$\int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt = k \int_0^{+\infty} t^{k-1} e^{-t} dt$$

Pour $k \in \mathbb{N}$, $(X^k|1) = \int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt$.

Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(k)$: " $(X^k|1) = k!$ ".

Pour $k = 0$, $(X^k|1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^{+\infty} = 1 = 0! : \mathcal{P}(0)$ est vraie.

Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathcal{P}(k)$ vraie.

D'après la question précédente, $(X^{k+1}|1) = (k+1)(X^k|1)$ donc,

d'après l'hypothèse de récurrence, $(X^{k+1}|1) = (k+1)k! = (k+1)! : \mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

Conclusion : par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire, $(X^k|1) = k!$.

2 pts

Attention à la validation de l'ipp...

Partie II - Construction d'une base orthogonale

Propriétés de l'application α

Q3. Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\deg P \leq n$ donc $\deg P' \leq n-1$, $\deg P'' \leq n-2$;

ainsi $\alpha(P)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à n .

De plus, par linéarité de la dérivation, α est linéaire donc α est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

1+0.5 pts

Q4. $\alpha(1) = 0$, $\alpha(X) = 1 - X$ et, pour $k \geq 2$,

$$\alpha(X^k) = k(k-1)X^{k-1} + kX^{k-1} - kX^k = -kX^k + k^2X^{k-1}.$$

On en aura besoin en Q8

La matrice de α dans la base $(1, X, \dots, X^n)$ est donc 1+1 pts

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 4 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & -2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & n^2 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -n \end{pmatrix}$$

Q5. Cette matrice est triangulaire supérieure donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux à savoir $0, -1, -2, \dots, -n$.

α possède donc $n+1$ vp distinctes et $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension $n+1$

donc α est diagonalisable.

0.5+1 pts

Finalement, α est diagonalisable et $\text{Sp}(\alpha) = \{-k; k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$.

Q6. D'après la question précédente, le polynôme caractéristique de α est scindé à racines simples donc les sous espaces propres de α sont de dimension 1 : $\dim(\ker \alpha + k \text{id}_{\mathbb{R}_n[X]}) = 1$.

1 pt

Q7. Soit Q_k un vecteur (non nul) engendrant $\ker(\alpha + k \text{id}_{\mathbb{R}_n[X]})$ et c_k son coeff dominant.

c_k est non nul et $P_k = \frac{1}{c_k}Q_k$ est un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$, de coefficient dominant égal à 1 vérifiant $\alpha(P_k) = -kP_k$.

Si R_k est un polynôme vérifiant ces propriétés, en particulier, $R_k \in \ker(\alpha + k \text{id}_{\mathbb{R}_n[X]})$

donc il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $R_k = aQ_k$.

Le coefficient dominant de R_k est 1 donc $a = \frac{1}{c_k}$ et $R_k = P_k$.

Par conséquent, il existe un unique polynôme $P_k \in \mathbb{R}_n[X]$,

de coefficient dominant égal à 1 et vérifiant $\alpha(P_k) = -kP_k$.

1 pt

Q8. Soit d le degré de P_k

Si k est non nul, on peut identifier les coefficients de degré k pour obtenir $d = k$.

Pour $k = 0$: $\alpha(1) = 0$ et 1 est un polynôme de coefficient dominant 1 tel que

$\alpha(1) = -0 \times 1$ donc, par unicité, $P_0 = 1$, de degré 0.

1 pt

explications au tableau

Q9. On vient de voir que $P_0 = 1$.

Soit $P = X + a$ un polynôme de degré 1 et de coefficient dominant 1.

$\alpha(P) = 1 - X$ donc $\alpha(P) = -P$ si et seulement si $a = -1$. Ainsi $P_1 = X - 1$.

De même, on pose $P = X^2 + bX + c$. $P' = 2X + b$, $P'' = 2$ et

$\alpha(P) = 2X + (1 - X)(2X + b) = -2X^2 + (4 - b)X + b$ donc $\alpha(P) = -2P$ si et seulement si

$4 - b = -2b$ et $b = -2c$ d'où $b = -4$ et $c = 2$.

Par conséquent, $P_2 = X^2 - 4X + 2$.

0.5 pts

II.3 - Orthogonalité de la famille $(P_0, \dots, P_n)$

Q10. Par définition, $(\alpha(P)|Q) = \int_0^{+\infty} (tP''(t) + (1-t)P'(t))Q(t)e^{-t}dt$.

on pose $u(t) = tP'(t)e^{-t}$. u et Q sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$,

$u'(t) = e^{-t}(tP''(t) + P'(t) - tP'(t))$; par croissance comparée,

$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)Q(t) = 0$ ce qui valide l'intégration par partie,

$$(\alpha(P)|Q) = - \int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t}dt.$$

2 pts

Tableau !!

Q11. En partant de $(P|\alpha(Q))$ et en échangeant les rôles de P et Q , on obtient $(\alpha(P)|Q) = (P|\alpha(Q))$.

0.5 pts

Q12. Soit k et l deux entiers distincts de $\mathbb{R}_n[X]$.

D'après Q11, $(\alpha(P_k)|P_l) = (P_k|\alpha(P_l))$ et, d'après Q7, $-k(P_k|P_l) = -l(P_k|P_l)$;

or $k \neq l$ donc $(P_k|P_l) = 0$

2.5 pts

hyper classique...

Conclusion : $(P_0, \dots, P_n)$ est une famille orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$; elle ne comporte pas le vecteur nul donc elle est libre et elle contient $n + 1$ vecteurs donc c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Partie III - Méthode de quadrature de Gauss

Q13. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$.

Sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, on considère les applications $\varphi : P \mapsto \int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}dt$ et $\psi : P \mapsto \sum_{i=1}^n \lambda_i P(x_i)$.

φ et ψ sont des applications linéaires sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ donc elles sont égales si et seulement si elles coïncident sur tous les vecteurs de la base $(1, X, \dots, X^{n-1})$.

Pour $i \leq n - 1$, $\varphi(X^i) = \int_0^{+\infty} t^i e^{-t} dt = i!$ et $\psi(X^i) = \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j^i$.

Pour tout $i \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$, $\varphi(X^i) = \psi(X^i)$ équivaut donc au système :

3.5 pts

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0! \\ 1! \\ \vdots \\ (n-1)! \end{pmatrix}$$

Q14. La matrice $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$ est la matrice de Vandermonde associée

aux réels $x_1, x_2, \dots, x_n$ qui sont deux à deux distincts donc le déterminant de V est non nul.

V est donc inversible et le système précédent admet une unique solution : il existe un unique n -uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ vérifiant la relation $(*)$ pour tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

1.5 pts

Q15. Soit $P = \prod_{i=1}^n (X - x_i)^2$.

$P \in \mathbb{R}_{2n}[X]$ et, pour tout i , $P(x_i) = 0$ donc $\psi(P) = 0$.

Par contre, $t \mapsto P(t)e^{-t}$ est continue positive et non identiquement nulle sur $[0; +\infty[$ donc $\varphi(P) > 0$.

Par conséquent, 2 pts

$$\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t} dt \neq \sum_{i=1}^n \lambda_i P(x_i)$$

EXERCICE 2

Une isométrie

1. On a, en utilisant successivement la linéarité par rapport à chaque variable :

$$\Phi(X, Y) = x_1 y_1 \Phi(\vec{i}, \vec{i}) + x_1 y_2 \Phi(\vec{i}, \vec{j}) + x_2 y_1 \Phi(\vec{j}, \vec{i}) + x_2 y_2 \Phi(\vec{j}, \vec{j}).$$

Grâce aux données de l'énoncé, on obtient donc : 2 pts

$$\Phi(X, Y) = x_1 y_1 + (x_1 y_2 + x_2 y_1) \cos(\theta) + x_2 y_2.$$

2. Au vu de la formule explicite obtenue dans la première question, le fait que ce soit une forme bilinéaire est évident, notamment du fait de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition. Pour la symétrie, on note que le produit étant commutatif dans $\mathbb{R}$, si $X = x_1 \vec{i} + x_2 \vec{j}$ et $Y = y_1 \vec{i} + y_2 \vec{j}$ alors :

$$\Phi(Y, X) = y_1 x_1 + (y_1 x_2 + y_2 x_1) \cos(\theta) + y_2 x_2 = \Phi(X, Y).$$

Il reste à vérifier que Φ est définie et positive. Or, si $X = x_1 \vec{i} + x_2 \vec{j}$, alors :

$$\begin{aligned} (*) \quad \Phi(X, X) &= x_1^2 + 2x_1 x_2 \cos(\theta) + x_2^2 = (x_1 + \cos(\theta)x_2)^2 + x_2^2 - \cos(\theta)^2 x_2^2 \\ &= (x_1 + \cos(\theta)x_2)^2 + (1 - \cos(\theta)^2)x_2^2. \end{aligned}$$

On a $1 - \cos(\theta)^2 \geq 0$ (mieux : par hypothèse $\theta \in]0, \pi[$, donc $1 - \cos(\theta)^2 > 0$), donc la somme ci-dessus ne contient que des termes positifs. On en déduit d'une part : $\Phi(X, X) \geq 0$.

D'autre part, une somme de réels positifs est nulle ssi chaque terme est nul, donc :

0.5+1.5+1.5 pts

Je vais encore refaire...

$$\Phi(X, X) = 0 \iff \begin{cases} x_1 + \cos(\theta)x_2 = 0 \\ \underbrace{(1 - \cos(\theta)^2)}_{>0} x_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 0, \end{cases}$$

donc $\Phi(X, X) = 0$ ssi X est nul : ceci achève de démontrer que Φ est définie positive.

En tant que forme bilinéaire symétrique définie positive, Φ est un produit scalaire sur E .

3. Comme f est linéaire, pour montrer que f est une isométrie il suffit de démontrer qu'elle préserve la norme euclidienne associée au produit scalaire Φ . C'est-à-dire :

$$\forall X \in E, \quad \Phi(f(X), f(X)) = \Phi(X, X).$$

On nous donne la matrice de f dans la base $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$, ce qui nous permet d'en déduire : $f(\vec{i}) = \vec{j}$, $f(\vec{j}) = -\vec{i} + 2\cos(\theta)\vec{j}$, et donc, pour tout $X = x_1\vec{i} + x_2\vec{j}$, on a :

$$f(X) = x_1f(\vec{i}) + x_2f(\vec{j}) = -x_2\vec{i} + (x_1 + 2\cos(\theta)x_2)\vec{j}.$$

Grâce à l'explicitation de Φ donnée dans la première question (ou plutôt grâce à (*) si l'on s'intéresse à $\Phi(X, X)$ et $\Phi(f(X), f(X))$), on en déduit :

$$\begin{aligned} \Phi(f(X), f(X)) &= (-x_2)^2 + 2(-x_2)(x_1 + 2\cos(\theta)x_2)\cos(\theta) + (x_1 + 2\cos(\theta)x_2)^2 \\ &= x_2^2 - 2x_1x_2\cos(\theta) - 4x_2^2\cos(\theta)^2 + x_1^2 + 4x_1x_2\cos(\theta) + 4\cos(\theta)^2x_2^2 \\ &= x_1^2 + 2x_1x_2\cos(\theta) + x_2^2 = \Phi(X, X), \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

5 pts

4. Appliquons l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

Notons que $\Phi(\vec{i}, \vec{i}) = 1$, donc $\vec{i}$ est déjà unitaire pour ce produit scalaire. Posons :

$$\vec{u} = \vec{j} - \Phi(\vec{i}, \vec{j})\vec{i}, \quad \text{et :} \quad \vec{k} = \frac{1}{\sqrt{\Phi(\vec{u}, \vec{u})}}\vec{u}.$$

L'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt assure alors que la famille $(\vec{i}, \vec{k})$ est orthonormée, et qu'on a $\Phi(\vec{j}, \vec{k}) > 0$. Explicitons $\vec{k}$; on a : $\Phi(\vec{i}, \vec{j}) = \cos(\theta)$, et donc :

$$\vec{u} = \vec{j} - \cos(\theta)\vec{i}.$$

Or :

$$\Phi(\vec{u}, \vec{u}) \stackrel{(*)}{=} (-\cos(\theta))^2 - 2\cos(\theta)\cos(\theta) + 1^2 = 1 - \cos(\theta)^2 = \sin(\theta)^2,$$

donc finalement : 5 pts

$$\vec{k} = \frac{1}{\sqrt{\sin(\theta)^2}} (\vec{j} - \cos(\theta)\vec{i}) = \frac{1}{\sin(\theta)} (\vec{j} - \cos(\theta)\vec{i}).$$

5. On sait déjà que f est une isométrie, et sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ permet de voir immédiatement que $\det(f) = \det(C) = 1$, donc f est une rotation planaire dont il reste à déterminer une mesure d'angle $\vartheta \in \mathbb{R}$ (faisons fi de l'orientation pour le moment) : or $2\cos(\vartheta) = \text{tr}(f)$ d'après la classification des isométries directes en dimension 2, donc $\cos(\vartheta) = \cos(\theta)$, et $\vartheta \equiv \pm\theta \pmod{2\pi}$. Sans aller plus loin, on s'attend donc déjà à ce que la matrice de f dans une base orthonormée (ce qu'est $(\vec{i}, \vec{k})$) soit de la forme : 4 pts

$$\begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \mp \sin(\theta) \\ \pm \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Or $f(\vec{i}) = \vec{j}$ d'après la donnée de la matrice C , et du fait que $\vec{k} = \frac{1}{\sin(\theta)} (\vec{j} - \cos(\theta)\vec{i})$ on en déduit : $\vec{j} = \cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{k}$. Par conséquent $f(\vec{i}) = \cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{k}$, ce qui signifie que la première colonne de $M_{(\vec{i}, \vec{k})}(f)$ est $\begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$. La discussion qui précède nous assure donc qu'on a :

$$M_{(\vec{i}, \vec{k})}(f) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

On en déduit que si E est orienté de sorte que la base $(\vec{i}, \vec{k})$ soit directe (ou $(\vec{i}, \vec{j})$: les deux bases ont même orientation), alors f est une rotation planaire de mesure d'angle θ .

Remarque. Il est aussi possible d'obtenir $M_{(\vec{i}, \vec{k})}(f)$ à partir de $M_{(\vec{i}, \vec{j})}(f) = C$ grâce à la formule du changement de base.

Comme f est une rotation planaire de mesure d'angle θ , on sait que f^m est une rotation de mesure d'angle $m\theta$. Par conséquent, $f^m = \text{Id}_E$ si et seulement si $m\theta \equiv 0 \pmod{2\pi}$, si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $m\theta = 2k\pi$. On en déduit : 2 pts

$$f^m = \text{Id}_E \iff \theta \in \frac{2\pi}{m}\mathbb{Z} = \left\{ \frac{2k\pi}{m} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

EXERCICE 3

Une histoire de trace

Question de cours : Dans un espace euclidien E , si F est un sous-espace vectoriel,

alors $F \oplus F^\perp = E$ donc $\dim(F^\perp) = \dim(E) - \dim(F)$.

0.5 pts

Q1 : Soit P et Q deux éléments de E .

On a $u(\lambda P + \mu Q)(x) = \int_0^1 (x+t)^n (\lambda P + \mu Q)(t) dt =$

$\lambda \int_0^1 (x+t)^n P(t) dt + \mu \int_0^1 (x+t)^n Q(t) dt = \lambda u(P)(x) + \mu u(Q)(x)$ et cette égalité est vraie

pour tout x donc $u(\lambda P + \mu Q) = \lambda u(P) + \mu u(Q)$ donc u est linéaire. 0.5 pts

De plus, si $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, alors 0.5 pts

$$u(P)(x) = \int_0^1 (x+t)^n P(t) dt = \int_0^1 \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i P(t) t^{n-i} dt = \sum_{i=0}^n \left(\binom{n}{i} \int_0^1 P(t) t^{n-i} dt \right) x^i$$

donc $u(P) \in E$. De plus, si $u(P) = 0$, alors $\forall i \in [[0, n]]$, $\int_0^1 P(t) t^{n-i} dt = 0 = (P | X^{n-i})$

donc $P \in \text{vect}(1, X, \dots, X^n)^\perp = E^\perp = \{0\}$ donc $\ker(u) = \{0\}$ et $u \in \mathcal{GL}(E)$

(endomorphisme de dimension finie). 3 pts

$$\text{Q2.1 : On a } u(X^p) = \sum_{i=0}^n \left(\binom{n}{i} \int_0^1 t^{p+n-i} dt \right) X^i = \sum_{i=0}^n \frac{\binom{n}{i}}{p+n-i+1} X^i : (\mathcal{R}) \text{ donc}$$

2 pts

$$(u(X^p) | X^q) = \sum_{i=0}^n \frac{\binom{n}{i}}{p+n-i+1} (X^i | X^q) = \sum_{i=0}^n \frac{\binom{n}{i}}{(p+n-i+1)(q+i+1)}$$

$$\text{Q2.2 : D'après la question précédente, } (u(X^q) | X^p) = \sum_{i=0}^n \frac{\binom{n}{i}}{(q+n-i+1)(p+i+1)} =$$

$$\binom{n}{n-j} = \sum_{j=0}^n \frac{(q+j+1)(p+n-j+1)}{(p+i)} = (u(X^p) | X^q) \text{ car } \binom{n}{n-j} = \binom{n}{j}.$$

3 pts

Soit $\phi : E \times E \rightarrow 0$ définie par $\phi(P, Q) = (u(P) | Q) - (u(Q) | P)$ est bilinéaire et $\forall (i, j) \in [[0, n]]^2$, $\phi(X^i, X^j) = 0$ donc $\phi = 0$ et donc u est un endomorphisme symétrique.

1 pt(spectral)

Q3 : Application directe du thm spectral.

Soit $y \in \mathbb{R}$. On pose $Q_y = (X + y)^n$. On pose 2 pts

Attention on a une BON

$$Q_y = \sum_{j=0}^n (Q_y | P_j) P_j. \text{ Or } (Q_y | P_j) = \int_0^{+\infty} (t + y)^n P(t) dt = u(P_j)(y) = \lambda_j P_j(y) \text{ donc}$$

$$Q_y = \sum_{j=0}^n \lambda_j P_j(y) P_j \text{ donc } Q_y(x) = (x + y)^n = \sum_{j=0}^n \lambda_j P_j(y) P_j(x).$$

Q4 : D'après $(\mathcal{R})$, les coefficients diagonaux de la matrice de u dans la base canonique sont

$$\frac{\binom{n}{p}}{n+1}, 0 \leq p \leq n \text{ donc } \text{tr}(u) = \sum_{p=0}^n \frac{\binom{n}{p}}{n+1} = \frac{2^n}{n+1}.$$

2 pts

$$\begin{aligned} \text{Q5.1 : On a } u(Q_y)(y) &= \int_0^1 (y+t)^n Q_y(t) dt = \\ \int_0^1 (y+t)^{2n} dt &= \frac{1}{2n+1} [(y+t)^{2n+1}]_0^1 = \frac{1}{2n+1} ((y+1)^{2n+1} - y^{2n+1}). \end{aligned}$$

2 pts

$$\begin{aligned} \text{Q5.2 : On a } \int_0^1 u(Q_y)(y) dy &= \int_0^1 \frac{1}{2n+1} ((y+1)^{2n+1} - y^{2n+1}) dy = \\ \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} [(y+1)^{2n+2} - y^{2n+2}]_0^1 &= \\ \frac{2^{2n+2} - 1}{(2n+2)(2n+1)}. \end{aligned}$$

$$\text{Par ailleurs } u(Q_y) = u\left(\sum_{j=0}^n \lambda_j P_j(y) P_j\right) = \sum_{j=0}^n \lambda_j^2 P_j(y) P_j \text{ donc}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 u(Q_y)(y) dy &= \int_0^1 \sum_{j=0}^n \lambda_j^2 P_j(y) P_j(y) dy = \\ \sum_{j=0}^n \lambda_j^2 \int_0^1 P_j(y) P_j(y) dy &= \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \text{ car } \|P_j\| = 1. \end{aligned}$$

5 pts

Or $\text{tr}(u^2) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2$ (se placer dans une base de vecteurs propres) donc $\text{tr}(u^2) = \frac{2^{2n+2} - 1}{(2n+2)(2n+1)}$.