

Proposition de corrigé

Polytechnique - ENS 2017

PSI

1 Mise en situation

Question 1 Énergie hydraulique, énergie marémotrice, énergie géothermique, biomasse...

2 Détermination de la puissance hydraulique

Question 2 : $\pi = i.c.R.T$ avec :

- $i = 2$ d'après l'énoncé
- $c = \frac{c_{\text{massique}}}{M_{\text{NaCl}}} = \frac{30 \text{ g L}^{-1}}{60 \text{ g mol}^{-1}} = 0,5 \text{ mol L}^{-1}$
- $T = 300\text{K}$

Finalement :

$$\pi_S \simeq 2,49 \times 10^3 \text{ kPa} = 24,9 \text{ bar}$$

$$\Delta\pi = \pi_S - \pi_D = \pi_S$$

Question 3 : $W = J\Delta P = A(\Delta\pi - \Delta P)\Delta P$. Une rapide étude de fonction montre que :

$$W \text{ maximal si } \Delta P = \Delta\pi/2$$

$$P_S = P_D + \Delta P = 0 + \Delta P = \Delta\pi/2 \simeq 12,5 \text{ bar}$$

Question 4 :

$$W_{\text{max}} = A \frac{(\Delta\pi)^2}{4} \simeq 2,2 \text{ W m}^{-2}$$

Question 5 :

$$\Delta Q_S = JS = AS \frac{\Delta\pi}{2} \simeq 3,5 \text{ L s}^{-1}$$

avec $S = 2000 \text{ m}^2$.

Question 6 :

$$P_{\text{max}} = 0,8W_{\text{max}}S \simeq 3,4 \text{ kW}$$

Cette faible valeur semble cohérente avec :

<http://news.nationalgeographic.com/news/energy/2013/01/130107-osmotic-energy-norway/>

3 Détermination de la puissance mécanique

Question 7 : *Remarque : je considère dans la suite que les vitesses indicées "auget" sont données dans le référentiel de l'auget (ce qui n'est pas clair il me semble avec la figure 7). Par ailleurs, Q_{fluide} est-il défini dans le référentiel de l'auget ou de la buse ? Je noterai dans la suite Q le débit volumique dans le référentiel de l'auget.*

On effectue un bilan de quantité de mouvement (dans le référentiel lié à l'auget, et non le "repère de l'auget"...) entre t et $t + dt$ sur le système fermé contenant le fluide suggéré en figure 8 ainsi que l'auget. Sur ce système, la résultante des forces de pression est supposée nulle (pression uniforme sur une surface fermée), et on néglige l'action de la pesanteur.

Considérant de plus le régime stationnaire dans ce référentiel, la quantité de mouvement dans le volume de contrôle est une constante. Finalement :

$$\frac{\left(\frac{\rho Q dt}{2} \vec{V}'_{auget} + \frac{\rho Q dt}{2} \vec{V}''_{auget}\right) - (\rho Q dt \vec{V}_{auget})}{dt} = \vec{F}_{ext}$$

Soit finalement :

$$\vec{F}_{ext} = \rho Q \left(\frac{\vec{V}'_{auget} + \vec{V}''_{auget}}{2} - \vec{V}_{auget} \right)$$

Question 8 :

$$\begin{aligned} \cdot \vec{V}'_{auget} \cdot \vec{X} &= \vec{V}''_{auget} \cdot \vec{X} = -V_{auget} \cos(\alpha) & \vec{V}_{auget} \cdot \vec{X} &= V_{auget} \\ \cdot \vec{V}'_{auget} \cdot \vec{Y} &= -\vec{V}''_{auget} \cdot \vec{Y} = V_{auget} \sin(\alpha) & \vec{V}_{auget} \cdot \vec{Y} &= 0 \end{aligned}$$

D'où le résultat attendu :

$$\vec{F}_{fluide} = \vec{F}_{ext} = \rho Q V_{auget} (1 - \cos(\alpha)) \vec{X}$$

Question 9 : Changement de référentiel : $V_{auget} = V_{buse} - V_{roue} = V_{buse} - R_{pelton} \Omega_{roue}$ Alors :

$$P = \vec{F}_{fluide} \cdot \vec{V}_{roue} = \rho Q (R_{pelton} \Omega_{roue}) (V_{buse} - R_{pelton} \Omega_{roue}) (1 - \cos(\alpha))$$

Cette puissance est maximale pour $\cos(\alpha) = -1$, ie $\alpha = \pi$ (l'eau fait "demi-tour").

Question 10 : En ce cas :

$$P = 2\rho Q (V_{buse} - R_{pelton} \Omega_{roue}) (R_{pelton} \Omega_{roue})$$

Soit avec $Q = S(V_{buse} - R_{pelton} \Omega_{roue})$:

$$P = 2\rho S (V_{buse} - R_{pelton} \Omega_{roue})^2 (R_{pelton} \Omega_{roue})$$

Une étude de fonction montre que cette puissance est maximale pour $R_{pelton} \Omega_{roue} = V_{buse}/3$ et donc :

$$P_{max} = \frac{16}{27} \left(\frac{1}{2} \rho S v_{buse}^3 \right)$$

Soit un rendement maximal de 16/27.

Question 11 : Le couple maximal ne correspond pas à la puissance maximale. Dans le cas de la puissance maximale, on a alors $P_{max} = C_{méca}\Omega_{roue} = C_{méca}\frac{V_{buse}}{3R_{Pelton}}$. Donc :

$$C_{méca} = \frac{8}{9}\rho S R_{pelton} V_{buse}^2$$

Remarque : si on considère un grand nombre d'augets, tout se passe comme si $Q = Q_{fluide}$. Alors :

$$P_{max} = \frac{1}{2}\rho S V_{buse}^3$$

pour $R_{pelton}\Omega_{roue} = V_{buse}/2$. Soit un rendement de 1. On a alors $C_{méca} = \rho S R_{pelton} V_{buse}^2$. Était-ce attendu ?

4 Étude de la génératrice de production d'énergie

Remarque : il me semble y avoir confusion entre fem et fcm dans le sujet (figure 10). Je respecte dans la suite les expressions fournies par l'énoncé.

Question 12 : Considérant que $\sin(-x) = -\sin(x)$ et $\cos(-x) = \cos(x)$, on a bien $R^t(\theta_e) = R(-\theta_e)$.

Avec $\sin(x + \pi/2) = \cos(x)$ et $\cos(x + \pi/2) = -\sin(x)$, on a bien $\frac{dR(\theta_e)}{dt} = \omega.R(\theta_e + \pi/2)$.

Question 13 : On calcule $\varphi_{dq} = P(\theta_e)\varphi_{abc}$.

En utilisant les identités $\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$ et $\sin(a) + \sin(b) = 2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$, on obtient sur la première ligne :

$$\begin{aligned} & \Phi_m \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\cos^2(\theta_e) + \cos^2(\theta_e - 2\pi/3) + \cos^2(\theta_e + 2\pi/3) \right) \\ &= \Phi_m \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\frac{3 + \sin(2\theta_e) + \sin(2\theta_e - 4\pi/3) + \sin(2\theta_e + 4\pi/3)}{2} \right) \\ &= \Phi_m \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\frac{3 + \sin(2\theta_e) + 2 \sin(2\theta_e) \cos(-8\pi/3)}{2} \right) \\ &= \Phi_m \sqrt{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

En utilisant aussi $2 \sin(a) \cos(a) = \sin(2a)$, on obtient pour la deuxième ligne :

$$\begin{aligned} & - \Phi_m \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\sin(\theta_e) \cos(\theta_e) + \sin(\theta_e - 2\pi/3) \cos(\theta_e - 2\pi/3) + \sin(\theta_e + 2\pi/3) \cos(\theta_e + 2\pi/3) \right) \\ &= - \Phi_m \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\frac{\sin(2\theta_e) + \sin(2\theta_e - 4\pi/3) + \sin(2\theta_e + 4\pi/3)}{2} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi, on a bien $\varphi_{dq} = P(\theta_e)\varphi_{abc} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{3}{2}}\Phi_m \\ 0 \end{pmatrix}$.

Question 14 : En multipliant à gauche par la matrice $P(\theta_e)$ l'équation aux tensions de l'alternateur synchrone, et on notant que $i_{abc} = CR(\theta_e)i_{dq}$ et que $\varphi_{abc} = CR(\theta_e)\varphi_{dq}$ on obtient :

$$v_{dq} = -RI_{dq}i_{dq} - P(\theta_e)L_{abc}C \left(\frac{dR(\theta_e)}{dt}i_{dq} + R(\theta_e)\frac{di_{dq}}{dt} \right) - P(\theta_e)C \left(\frac{dR(\theta_e)}{dt}\varphi_{dq} + R(\theta_e)\frac{d\varphi_{dq}}{dt} \right)$$

On utilise alors les calculs des questions 12 et 13 ainsi que les indications de l'énoncé pour obtenir :

$$\begin{aligned} v_{dq} &= - \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} i_{dq} - R^t(\theta_e)C^t L_{abc}C \left(\omega R(\theta_e + \pi/2)i_{dq} + R(\theta_e)\frac{di_{dq}}{dt} \right) - P(\theta_e)C\omega R(\theta_e + \pi/2)\varphi_{dq} \\ &= - \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} i_{dq} - \begin{pmatrix} L-M & 0 \\ 0 & L-M \end{pmatrix} \left(\omega R(\pi/2)i_{dq} + \frac{di_{dq}}{dt} \right) - \omega R(\pi/2)\varphi_{dq} \\ &= - \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} i_{dq} - \begin{pmatrix} L-M & 0 \\ 0 & L-M \end{pmatrix} \frac{di_{dq}}{dt} - \begin{pmatrix} 0 & -(L-M)\omega \\ (L-M)\omega & 0 \end{pmatrix} i_{dq} - \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \varphi_{dq} \end{aligned}$$

Question 15 : Après développement :

$$\delta W_{elec} = \left(-(Ri_d^2 + Ri_q^2) - \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}(L-M)(i_d^2 + i_q^2) \right) + 0 + \omega \sqrt{\frac{3}{2}}\Phi_m i_q \right) dt$$

On interprète :

- $Ri_d^2 + Ri_q^2$ est la puissance joule
- $\frac{1}{2}(L-M)(i_d^2 + i_q^2)$ est l'énergie magnétique
- $\omega \sqrt{\frac{3}{2}}\Phi_m i_q$ est la puissance fournie par les fem.

Question 16 : Les formes d'énergie emmagasinées dans l'alternateur sont :

- $U_{cinétique}$ l'énergie cinétique
- $U_{magnétique}$ l'énergie magnétique

Il échange de l'énergie avec l'extérieur sous forme :

- électrique ; il fournit à l'extérieur, durant dt : δW_{elec}
- mécanique ; il reçoit de l'extérieur, durant dt : $\delta W_{méca}$
- de chaleur ; il fournit à l'extérieur, durant dt : δQ_{joule} (toute la chaleur produite par effet joule est évacuée)

On a donc le résultat attendu, avec les signes correspondants :

$$dU_{cinétique} + dU_{magnétique} = \delta W_{méca} - \delta W_{elec} - \delta Q_{joule}$$

Question 17 : $U_{cinétique} = \frac{1}{2}J_{eq}\Omega^2$ donc :

$$dU_{cinétique} = J\Omega d\Omega$$

Question 18 : $\delta Q_{joule} = (Ri_d^2 + Ri_q^2)dt = Ri_{dq}^t i_{dq} dt$

Question 19 : $\delta W_{méca} = C_{méca} \Omega dt$. On a donc le principe fondamental de la dynamique (TMC sur l'axe), en supposant $C_m > 0$ non algébrique (ce que confirme la question 22) :

$$J \frac{d\Omega}{dt} = C_{méca} - C_m$$

En multipliant par Ωdt , on obtient :

$$\delta W_{méca} = dU_{cinétique} + C_m \Omega dt$$

Question 20 : Ce terme a été calculé à la question 15 : il est nul.

Question 21 : On se ramène à deux circuits équivalents non couplés de courants i_d et i_q , et d'inductances $(L - M)$ soit donc :

$$dU_{magnétique} = (L - M)i_d di_d + (L - M)i_q di_q = d\left(\frac{1}{2}(L - M)(i_d^2 + i_q^2)\right) = d\left(\frac{1}{2}(L - M)i_{dq}^t i_{dq}\right)$$

Je ne sais pas comment le justifier, si il faut le justifier...

Question 22 : On part de la question 16 :

$$dU_{cinétique} + dU_{magnétique} = \delta W_{méca} - (\delta W_{élec} + \delta Q_{joule})$$

Alors :

- $dU_{magnétique} = d\left(\frac{1}{2}(L - M)(i_d^2 + i_q^2)\right)$ avec la question 21
- $\delta W_{méca} = dU_{cinétique} + C_m \Omega dt$ avec la question 19
- $\delta W_{élec} = -(Ri_d^2 + Ri_q^2)dt - d\left(\frac{1}{2}(L - M)(i_d^2 + i_q^2)\right) + \Omega \sqrt{\frac{3}{2}} \Phi_m i_q dt$ avec la question 15
- $\delta Q_{joule} = (Ri_d^2 + Ri_q^2)dt$ avec la question 18

Soit donc après simplification :

$$C_m = \sqrt{\frac{3}{2}} \Phi_m i_q$$

Question 23 : On trouve :

$K_{dd} = -\frac{R+R_c}{L-M}$	$K_{dq} = 1$	$K_{d\omega} = 0$	0
$K_{qd} = -1$	$K_{qq} = -\frac{R+R_c}{L-M}$	$K_{q\omega} = \frac{\sqrt{3/2}\Phi_m}{L-M}$	0
$K_{\omega d} = 0$	$K_{\omega q} = -\frac{\sqrt{3/2}\Phi_m}{J_{eq}}$	$K_{\omega\omega} = 0$	$H_{d\tau} = \frac{1}{J_{eq}}$

Question 24 : Probablement une coquille dans l'énoncé au dessus de la question 24 : je considère que nous souhaitons résoudre entre 0 et \mathbf{T} avec Te période d'échantillonnage. Plus Te est petite, meilleure est l'approximation de la dérivée. De même, la diminution de Te améliore le rejet du bruit.

Question 25 : On peut proposer :

```

1 import numpy as np
2
3 def Intensite():
4     t=np.arange(0,T+Te,Te)
5     iq=[I0]
6     for k in range(len(t)-1):
7         newiq=iq[-1]+Te*(Kqq*iq[-1]+Kqw*w0)
8         iq.append(newiq)
9     return t,iq

```

Question 26 : La notion de stabilité d'une méthode numérique n'est pas au programme. Je ne comprends pas ce qui est attendu ici.

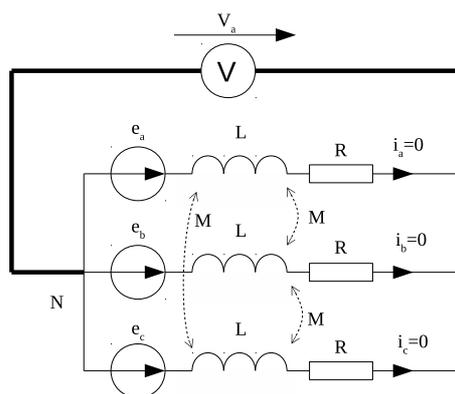
Question 27 : On poursuit ce qui a été commencé dans la question 25.

```

1
2 def Vitesse():
3     w=[w0]
4     for k in range(len(t)-1):
5         neww=w[k]+Te*(Qwq*iq[k]+Kww*w[k]+HdT*Cmeca)
6         w.append(neww)
7     return w

```

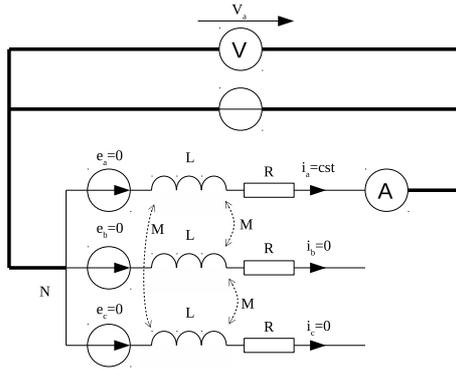
Question 28 : On laisse les phases en circuit ouvert et :



Alors $v_a = e_a = -\Phi_m \Omega_{22} \sin(\theta_e)$ soit donc $V_{22} = \Phi_m \Omega_{22}$. On en déduit :

$$\Phi_m = \frac{V_{22}}{\Omega_{22}} = 1,05 \text{ Wb}$$

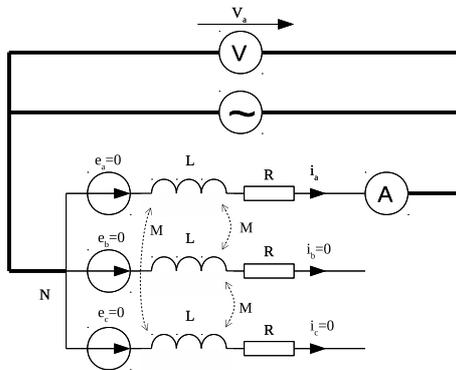
Question 29 :



Alors $v_a = -Ri_a$ soit donc $V_{23} = RI_{23}$. On en déduit :

$$R = \frac{V_{23}}{I_{23}} = 20 \Omega$$

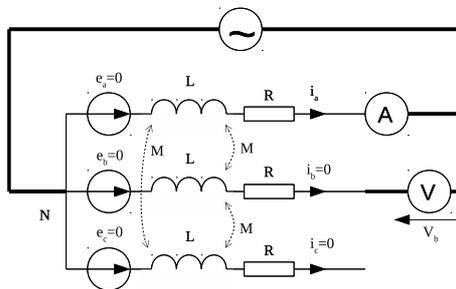
Question 30 :



Alors $v_a = -Ri_a - L \frac{di_a}{dt}$ soit donc $V_{24} = \sqrt{(R^2 + L^2\omega^2)}I_{24}$ avec $\omega = 2\pi f$ et $f = 50$ Hz. On en déduit :

$$L = \frac{1}{2\pi f} \sqrt{\frac{V_{24}^2}{I_{24}^2} - R^2} = 0,76 \text{ H}$$

Question 31 :



Alors $v_b = -M \frac{di_a}{dt}$ soit donc $V_{25} = \omega |M| I_{25}$ avec $\omega = 2\pi f$ et $f = 50$ Hz. On en déduit :

$$|M| = \frac{V_{25}}{2\pi f I_{25}} = 0,32 \text{ H}$$

Correction sujet X-ENS Modélisation 2017

E. REGULATION DE L'ALTERNATEUR

Q32. La chaîne de retour signifie-t-elle que le système est asservi ? Justifier.

Le système n'est pas asservi car il n'y a pas de capteur de vitesse dans la chaîne de retour permettant de connaître à chaque instant la vitesse de rotation du rotor.

Q33. Justifier pourquoi $H_v(p)$ peut être assimilée au gain pur k_v .

La fonction de transfert du variateur qui pilote la machine s'écrit sous la forme : $H_v(p) = \frac{K_v}{1 + \tau_v p}$

La constante de temps de l'appareil est de $50 \mu s = 0,05 \text{ ms}$ et son gain est de 20.

Les constantes de temps électrique et mécanique du moteur sont respectivement $\tau_e = 0,02 \text{ s}$ et $\tau_m = 0,2 \text{ s}$ donc $\tau_v \ll \tau_e$ et $\tau_v \ll \tau_m$ alors on peut négliger le régime transitoire du variateur et assimiler sa FT à un gain pur.

Q34. Donner un exemple de capteur analogique permettant d'obtenir directement une image de la fréquence de rotation de l'arbre de la machine.

Une génératrice tachymétrique est un capteur analogique de vitesse de rotation. La tension en régime permanent délivrée par ce capteur est l'image de la fréquence de rotation de l'arbre sur lequel est monté le capteur.

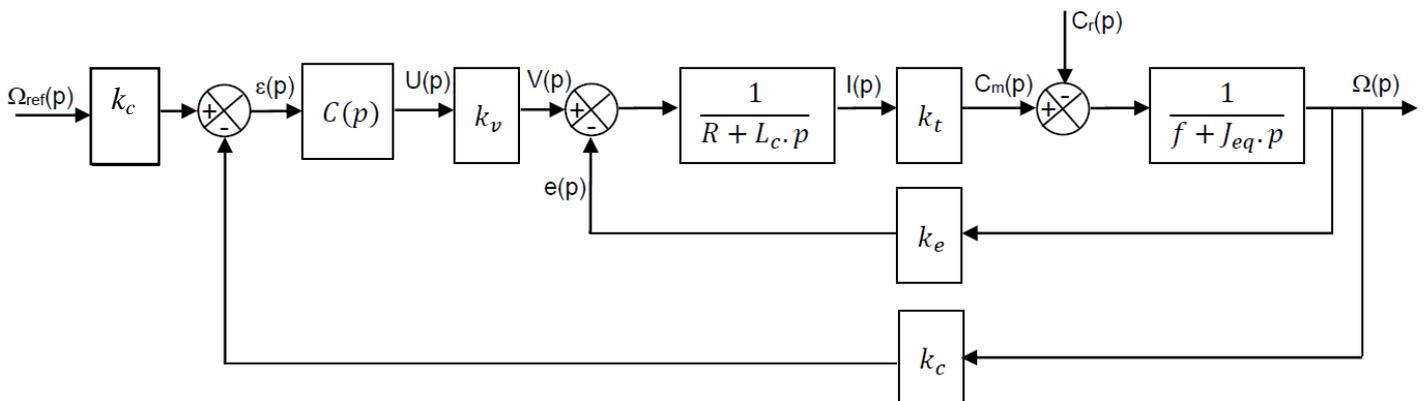
Q35. Déterminer k_a pour obtenir un écart nul avec un système précis.

La FT de l'adaptateur est définie pour qu'en régime permanent, l'écart $\varepsilon(p) = K_a \Omega_{ref}(p) - K_c \Omega(p)$ soit nul lorsque que $\omega(\infty) = \omega_{ref}$.

Donc il faut $\boxed{K_a = K_c}$.

Q36. Exprimer $\Omega(p)$ sous la forme : $\Omega(p) = H_1(p) \cdot \Omega_{ref}(p) + H_2(p) \cdot C_r(p)$. Donner les expressions de $H_1(p)$ et $H_2(p)$.

Le schéma bloc est le suivant :



A partir du schéma bloc, on obtient :

$$\Omega(p) = \frac{1}{(f + J_{eq}p)} \left(-C_r(p) + \frac{K_t}{(R + L_c p)} \left(-K_e \Omega(p) + K_c C(p) K_v (\Omega_{ref}(p) - \Omega(p)) \right) \right)$$

Ou

$$\Omega(p) = \frac{\frac{C(p)K_v K_t}{(R + L_c p)(f + J_{eq}p)}}{1 + \frac{K_t K_e}{(R + L_c p)(f + J_{eq}p)} + \frac{C(p)K_v K_t K_c}{(R + L_c p)(f + J_{eq}p)}} \left(K_c \Omega_{ref}(p) - C_r(p) \frac{(R + L_c p)}{C(p)K_v K_t} \right)$$

$$\text{Et } \Omega(p) = \frac{K_c C(p) K_v K_t}{(R + L_c p)(f + J_{eq}p) + K_t K_e + C(p)K_v K_t K_c} \Omega_{ref}(p) - \frac{(R + L_c p)}{(R + L_c p)(f + J_{eq}p) + K_t K_e + C(p)K_v K_t K_c} C_r(p)$$

Sachant que $\Omega(p) = H_1(p)\Omega_{ref}(p) + H_2(p)C_r(p)$, alors par identification on trouve :

$$H_1(p) = \frac{K_c C(p) K_v K_t}{(R + L_c p)(f + J_{eq}p) + K_t K_e + C(p)K_v K_t K_c}$$

$$H_2(p) = -\frac{(R + L_c p)}{(R + L_c p)(f + J_{eq}p) + K_t K_e + C(p)K_v K_t K_c}$$

Q37. Les critères de précision exigés par le cahier des charges sont-ils vérifiés ?

Critères de précision du CdCF :

Critère 1 : « Erreur statique nulle pour une entrée en échelon »

Critère 2 : « Rejet d'une perturbation en échelon »

$$\text{La FT du correcteur est : } C(p) = C_0 \left(1 + \frac{1}{T_i p} \right) = \frac{C_0}{T_i p} (T_i p + 1).$$

C'est un correcteur PI (Proportionnel -Intégral), il permet d'augmenter la classe de la FTBO de 1 donc le premier critère de précision « Erreur statique nulle pour une entrée en échelon » est vérifié.

De plus la position du correcteur PI est en amont de la perturbation donc le second critère de précision « Rejet d'une perturbation en échelon » est aussi vérifié.

Q38. Déterminer graphiquement les valeurs de C_0 et T_i en s'assurant que la marge de phase est respectée.

Pour des raisons de rapidité, on impose une pulsation de coupure du système corrigé en boucle ouverte de 40 rad/s donc on a : $\omega_{0dB} = 40 \text{ rad.s}^{-1}$.

Graphiquement on trouve :

$$G_{dBnc} = 20 \log |H_{BOnc}(j\omega_{0dB})| = 5dB \text{ soit } |H_{BOnc}(j\omega_{0dB})| = 10^{\frac{5}{20}} \approx 1,78$$

$$\text{et } \varphi(\omega_{0dB}) = \arg(H_{BOnc}(j\omega_{0dB})) = -125^\circ.$$

$$\text{La FTBO du système corrigé s'écrit : } H_{BO}(p) = \frac{C_0}{T_i p} (T_i p + 1) H_{BOnc}(p).$$

La marge de phase est définie par : $M\varphi = 180^\circ + \arg(H_{BO}(j\omega_{0dB}))$

$$\text{Donc } M\varphi = 180^\circ - 90^\circ + \arctan(T_i \omega_{0dB}) + \underbrace{\arg(H_{BOnc}(j\omega_{0dB}))}_{-125^\circ}$$

$$\text{Soit } T_i = \frac{\tan(M\varphi + 35^\circ)}{\omega_{0dB}}$$

Le CdCF donne $M\varphi = 45^\circ$ alors $T_i = \frac{\tan(M\varphi + 35^\circ)}{\omega_{0dB}} \approx 0,14 \text{ s}$.

On doit vérifier que : $G_{dB}(\omega_{0dB} = 40 \text{ rad.s}^{-1}) = 20 \log |H_{BO}(j\omega_{0dB})| = 0 \text{ dB}$ soit $|H_{BO}(j\omega_{0dB})| = 1$.

Alors $\frac{C_0}{T_i \omega_{0dB}} \sqrt{1 + (T_i \omega_{0dB})^2} |H_{BOnc}(j\omega_{0dB})| = 1$ et $C_0 = \frac{T_i \omega_{0dB}}{\sqrt{1 + (T_i \omega_{0dB})^2} |H_{BOnc}(j\omega_{0dB})|} \approx 0,55$.

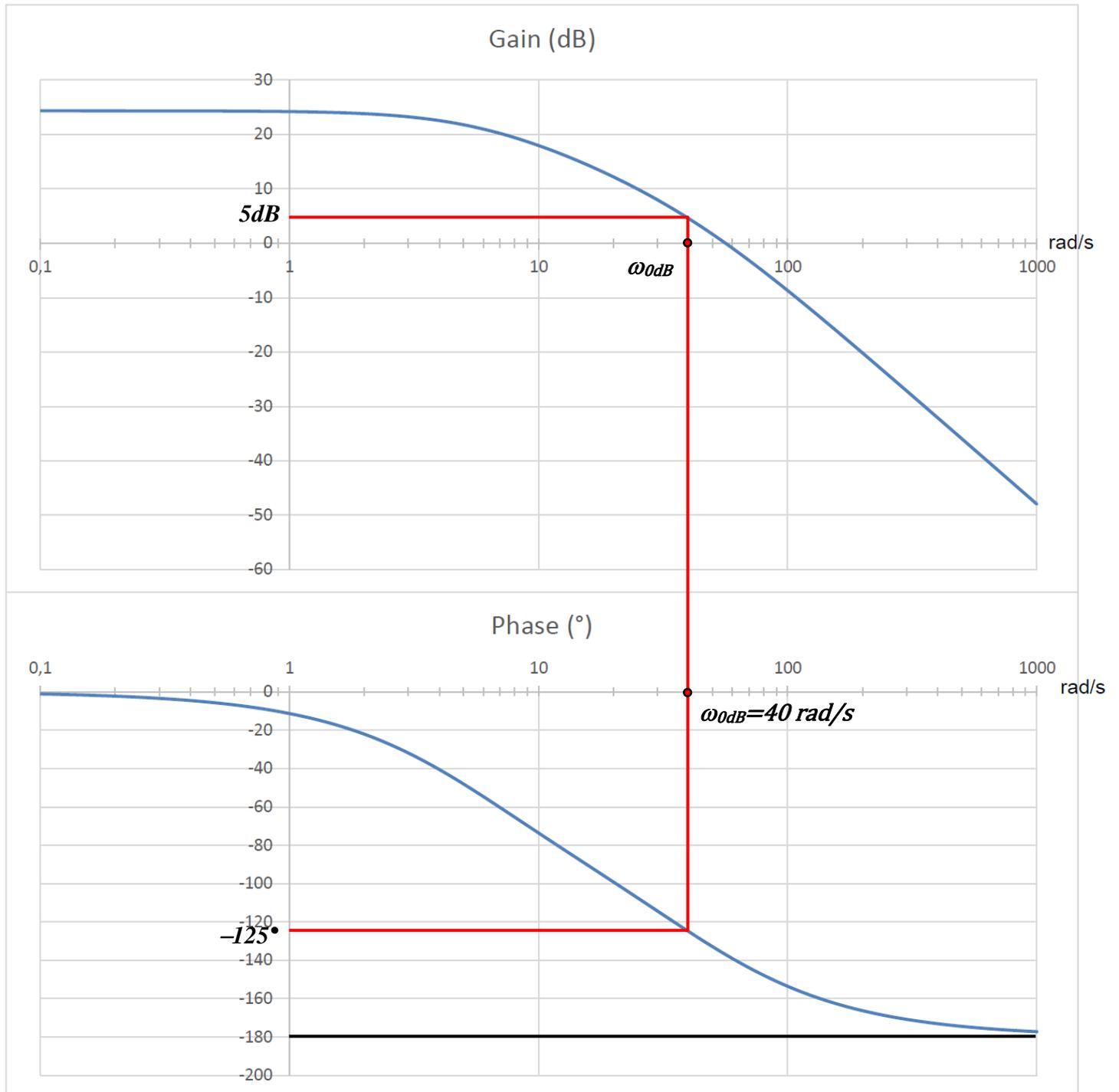
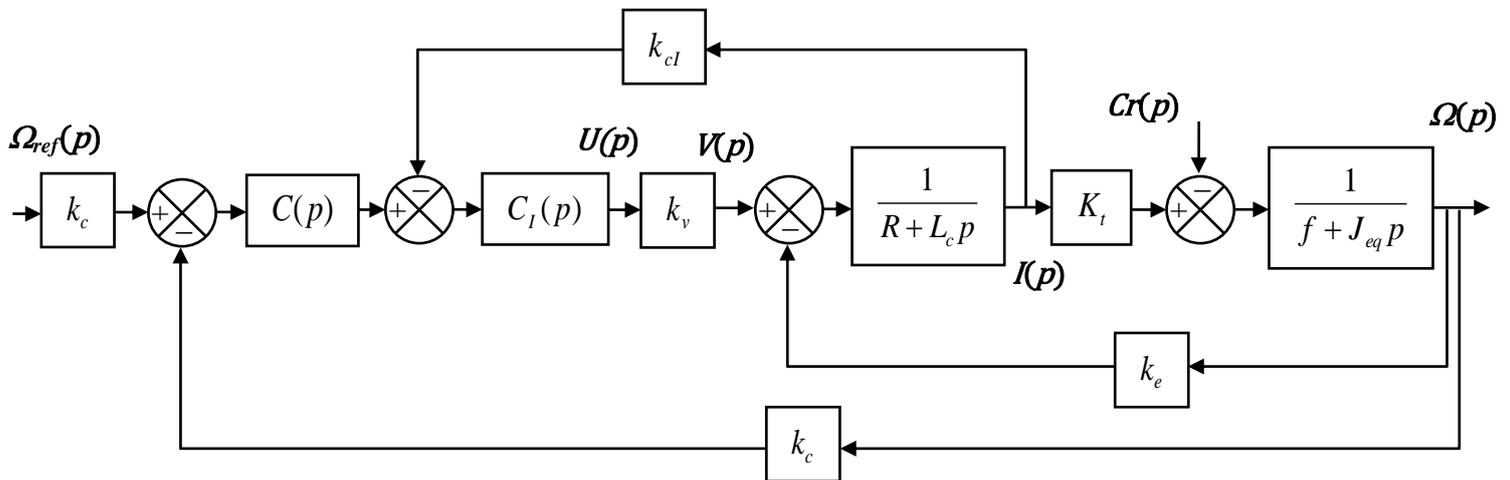


Figure 17 : Diagrammes de Bode de la FTBO non corrigée

Q39. Proposer un schéma-bloc de cet asservissement.



Pour la boucle de courant :

- ✓ la mesure du courant est effectuée à l'aide d'un capteur à effet Hall.
- ✓ on peut aussi placer un correcteur $C_I(p)$ dans la boucle de courant.

Q40. Préciser le critère de performance que doit remplir la boucle de courant par rapport à la boucle de vitesse pour que ce nouvel asservissement soit efficace.

Il faut que la boucle de courant ait un temps de réponse inférieur au temps de réponse de la boucle de vitesse.

Q41. Cette boucle aura-t-elle un impact sur le temps de réponse ? Justifier.

A partir de la courbe d'intensité de la figure 18, on constate que le pic de courant a lieu à l'instant $t_1 = 0,05$ s donc si le critère de performance de la question précédente est vérifié alors l'impact sur le temps de réponse du système sera négligeable (CdCF : $t_{5\%} = 3$ s).

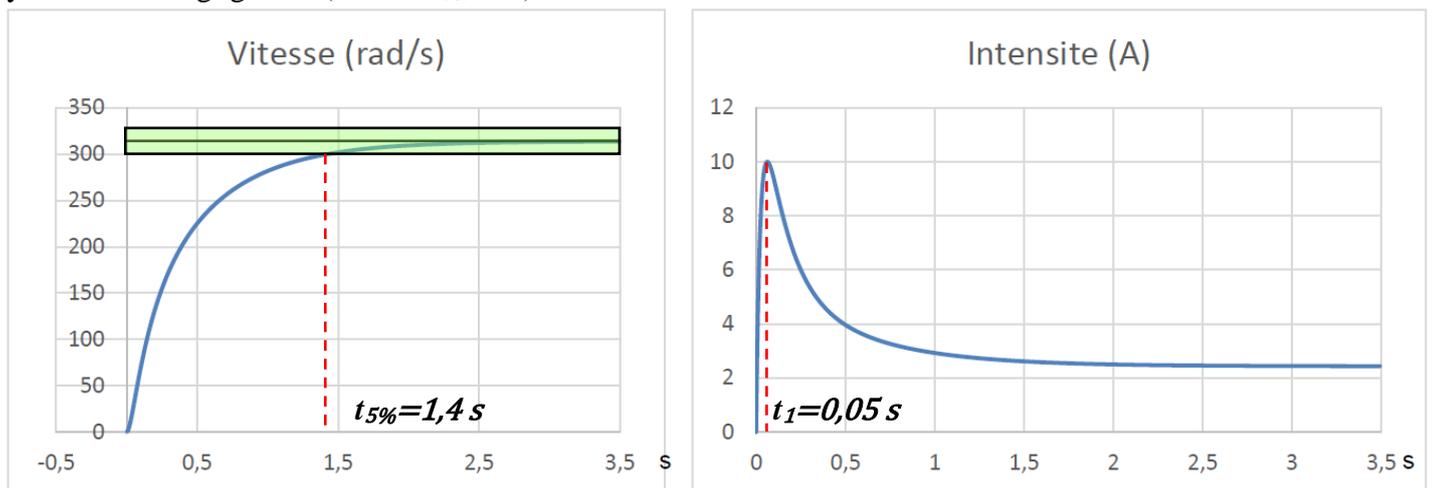


Figure 18 : Réponses temporelles de la vitesse et de l'intensité en FTBF

Q42. En Python ou Scilab, écrire une fonction *Saturation(u, Vmax)* prenant comme arguments d'entrée les flottants *u* et *Vmax* qui renvoie la tension *us* sous forme de flottant.

```

1 def Saturation(u, Vmax):
2     if -Vmax <= u <= Vmax:
3         us=u
4     elif u < - Vmax:
5         us=-Vmax
6     elif u > Vmax:
7         us=Vmax
8     return us

```

F. EQUILIBRAGE DE LA TURBINE

Q43. Déterminer l'accélération du point G appartenant à S par rapport à R_0 $\vec{\Gamma}(G \in S/R_0)$:

On a : $\vec{OG} = a \vec{X}_S$

Donc $\vec{V}(G, S/R_0) = \left(\frac{d\vec{OG}}{dt} \right)_{/R_0} = a \dot{\theta} \vec{Y}_S$

Et $\vec{\Gamma}(G, S/R_0) = \left(\frac{d\vec{V}(G, S/R_0)}{dt} \right)_{/R_0} = a \ddot{\theta} \vec{Y}_S - a \dot{\theta}^2 \vec{X}_S$

Or $\dot{\theta} = \text{constante}$ donc $\vec{\Gamma}(G, S/R_0) = -a \dot{\theta}^2 \vec{X}_S$

Q44. Déterminer le moment dynamique du point O appartenant à S par rapport à R_0 : $\vec{\delta}(G \in S/R_0)$.

La vitesse de rotation du solide (S) par rapport à R_0 est constante.

Le point O est un point fixe par rapport à R_0 donc :

✓ Le moment cinétique de S par rapport à R_0 en O s'écrit : $\vec{\sigma}(O, S/R_0) = I(O, S) \vec{\Omega}_{S/R_0}$

Soit $\vec{\sigma}(O, S/R_0) = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{(\vec{x}_S, \vec{y}_S, \vec{z}_0)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}_{(\vec{x}_S, \vec{y}_S, \vec{z}_0)} = \begin{pmatrix} -E \dot{\theta} \\ -D \dot{\theta} \\ C \dot{\theta} \end{pmatrix}_{(\vec{x}_S, \vec{y}_S, \vec{z}_0)}$

✓ Et le moment dynamique de S par rapport à R_0 en O s'écrit : $\vec{\delta}(O, S/R_0) = \left(\frac{d\vec{\sigma}(O, S/R_0)}{dt} \right)_{/R_0}$

Soit $\vec{\delta}(O, S/R_0) = \left(\frac{d(-E \dot{\theta} \vec{X}_S - D \dot{\theta} \vec{Y}_S + C \dot{\theta} \vec{Z}_0)}{dt} \right)_{/R_0} = -E \dot{\theta}^2 \vec{Y}_S + D \dot{\theta}^2 \vec{X}_S$

Q45. Déterminer $\left\{ T_{\text{bâti} \rightarrow S} \right\}_O = \begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_S, \vec{y}_S, \vec{z}_S)}$

On isole S

Bilan des actions mécaniques extérieures exercées sur S :

- Action du bâti sur S en O (liaison pivot d'axe $(O, \vec{Z}_S = \vec{Z}_0)$) : $\left\{ T_{\text{bâti} \rightarrow S} \right\}_O = \begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_S, \vec{y}_S, \vec{z}_S)}$
- Action de \bar{S} (le reste des actions mécaniques extérieures) sur S en O : $\left\{ T_{\bar{S} \rightarrow S} \right\}_O = \begin{Bmatrix} X_1 & L_1 \\ Y_1 & M_1 \\ Z_1 & N_1 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_S, \vec{y}_S, \vec{z}_S)}$

On applique le PFD à S en O : $\left\{ T_{\text{bâti} \rightarrow S} \right\}_O + \left\{ T_{\bar{S} \rightarrow S} \right\}_O = \begin{Bmatrix} m \vec{\Gamma}(G, S/R_0) \\ \vec{\delta}(O, S/R_0) \end{Bmatrix}_O$

Et on obtient le système d'équations suivant :

$(TRD) \bullet \vec{X}_S \begin{cases} X + X_1 = -m a \dot{\theta}^2 \\ Y + Y_1 = 0 \\ Z + Z_1 = 0 \end{cases} \quad (TMD \text{ en } O) \bullet \vec{X}_S \begin{cases} L + L_1 = D \dot{\theta}^2 \\ M + M_1 = -E \dot{\theta}^2 \\ N_1 = 0 \end{cases}$

Q46. En déduire les conditions, propres à la répartition des masses de la turbine, nécessaires à l'équilibrage.

La turbine est équilibrée si les composantes de $\{T_{\text{bati} \rightarrow S}\}$ sont indépendantes des effets dynamiques. Les conditions d'équilibrage sont donc :

- ✓ $a = 0$ (le centre d'inertie de S est sur l'axe de rotation)
- ✓ $E = D = 0$ (l'axe de rotation $(O, \vec{Z}_S = \vec{Z}_0)$ est un axe principal d'inertie).

Q47. Montrer que l'équilibrage à 1 masselotte n'est possible que si $D = 0$.

Le centre de masse de S' est défini par :

$$(m - m_1) \vec{OG}' = m \vec{OG} - m_1 \vec{OM}_1$$

$$(m - m_1) \vec{OG}' = m a \vec{X}_S - m_1 (x_1 \vec{X}_S + y_1 \vec{Y}_S + z_1 \vec{Z}_S)$$

Les produits d'inertie de S' s'écrivent :

$$D' = D - m_1 y_1 z_1$$

$$E' = E - m_1 x_1 z_1$$

Pour garantir l'équilibrage il faut que :

- ✓ $G' \in (O, \vec{Z}_S)$ donc $\vec{OG}' \cdot \vec{X}_S = 0$ et $\vec{OG}' \cdot \vec{Y}_S = 0$.

- ✓ $E' = D' = 0$.

On obtient alors le système suivant :

$$\begin{cases} m a - m_1 x_1 = 0 \\ -m_1 y_1 = 0 \\ D - m_1 y_1 z_1 = 0 \\ E - m_1 x_1 z_1 = 0 \end{cases} \quad \text{et on trouve : } \begin{cases} x_1 = \frac{m}{m_1} a \\ y_1 = 0 \\ D = 0 \\ E = m_1 x_1 z_1 \end{cases}$$

Donc $D = 0$ est bien une condition nécessaire pour que l'équilibrage soit possible.

Q48. Déterminer m_1, m_2, θ_1 et θ_2 pour que l'ensemble turbine + masselottes soit équilibré dynamiquement.

Le centre de masse de S' est défini par :

$$(m - m_1) \vec{OG}' = m \vec{OG} - m_1 \vec{OM}_1 - m_2 \vec{OM}_2 \quad (\text{avec } m_1 \text{ et } m_2 > 0)$$

$$(m - m_1 - m_2) \vec{OG}' = m a \vec{X}_S - m_1 (x_1 \vec{X}_S + y_1 \vec{Y}_S + z_1 \vec{Z}_S) - m_2 (x_2 \vec{X}_S + y_2 \vec{Y}_S + z_2 \vec{Z}_S)$$

Les produits d'inertie de S' s'écrivent :

$$D' = D - m_1 y_1 z_1 - m_2 y_2 z_2$$

$$E' = E - m_1 x_1 z_1 - m_2 x_2 z_2$$

Les conditions d'équilibrage donnent le système suivant :

$$\begin{cases} m a - m_1 x_1 - m_2 x_2 = 0 \\ -m_1 y_1 - m_2 y_2 = 0 \\ D - m_1 y_1 z_1 - m_2 y_2 z_2 = 0 \\ E - m_1 x_1 z_1 - m_2 x_2 z_2 = 0 \end{cases}$$

Les deux usinages (masselottes négatives) sont situés à des emplacements spécifiques sur la turbine, on a alors :

$x_1 = r \cos \theta_1, y_1 = r \sin \theta_1, x_2 = r \cos \theta_2, y_2 = r \sin \theta_2, z_1 = e$ et $z_2 = 0$.

Alors

$$\begin{cases} m a - m_1 r \cos \theta_1 - m_2 r \cos \theta_2 = 0 \\ -m_1 r \sin \theta_1 - m_2 r \sin \theta_2 = 0 \\ D - m_1 r \sin \theta_1 e = 0 \\ E - m_1 r \cos \theta_1 e = 0 \end{cases}$$

Après résolution on trouve :

$$\begin{cases} \theta_1 = \arctan\left(\frac{D}{E}\right) \\ m_1 = \frac{\sqrt{D^2 + E^2}}{r e} \\ m_2 = \frac{\sqrt{m^2 a^2 + m_1^2 r^2 - 2m m_1 a r \cos \theta_1}}{r} \\ \theta_2 = -\arcsin\left(\frac{D}{m_2 r e}\right) \end{cases}$$