

Solution proposée par JR Seigne MP\*, Clemenceau Nantes  
et P Bertin PTSI, Livet Nantes

## L'effet piézoélectrique et deux de ses applications

### 1 Comportement d'un milieu piézoélectrique

#### 1.1 Modélisation du comportement électromécanique d'un élément piézoélectrique

##### Modèle de la maille cristalline

1. Les ressorts représentent les liaisons ioniques entre les entités présentes dans la maille cristalline. On a affaire à une force de rappel linéaire avec la déformation de la maille cristalline au voisinage de sa position d'équilibre. Pour rester dans le domaine de la linéarité, il faut que :  $|x_B| \ll a$ .

2. À l'équilibre, la force  $\vec{f}$  compense les deux forces de rappel des ressorts. On a donc  $\vec{f} = [K_2(x_B - x_P) + K_1(x_B - x_N)]\vec{e}_x$ . On écrit maintenant l'équilibre des deux charges  $+q$  et  $-q$ . Elles subissent toutes les deux la force due au champ électrique  $\vec{E}$  ainsi que les deux forces exercées par les deux ressorts qui les entourent. À l'équilibre, la somme de ces trois forces est nulle. On obtient les deux équations suivantes qui sont sur  $\vec{e}_x$  :  $-K_1x_P + qE + K_2(x_B - x_P) = 0$  et  $-K_2x_N - qE + K_1(x_B - x_N) = 0$ . Cela nous permet d'isoler les abscisses des deux charges :  $x_P = \frac{qE}{K_1+K_2} + \frac{K_2}{K_1+K_2}x_B$  et  $x_N = \frac{-qE}{K_1+K_2} + \frac{K_1}{K_1+K_2}x_B$ . En utilisant ces deux expressions dans celle de la force  $\vec{f}$ , on arrive après réorganisation à  $\vec{f} = \left[ -\frac{K_2-K_1}{K_1+K_2}qE + \frac{2K_1K_2}{K_1+K_2}x_B \right] \vec{e}_x$ . On peut voir dans cette expression de la force une contribution non nécessairement prévisible du champ électrique dans sa forme. Cette contribution est nulle lorsque  $K_2 = K_1$ , cela correspond au cas où le champ électrique n'entraînerait pas de différentiation du barycentre des charges positives et des charges négatives. On peut aussi voir dans la contribution du terme en  $x_B$  les lois d'association des ressorts. En effet,  $K_1$  et  $K_2$  en série correspondent à un ressort équivalent de raideur  $\frac{1}{K_{eq}} = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2}$ . Enfin, on a deux ressorts  $K_{eq}$  en parallèle, générant cette fois un ressort de raideur équivalente à la somme des raideurs et donc  $2K_{eq} = \frac{2K_1K_2}{K_1+K_2}$ .

3. Le moment dipolaire est  $\vec{p} = \vec{e}_x q(x_P - x_N)$ . À l'aide des expressions établies à la question précédente, on peut donner l'expression du moment dipolaire :  $\vec{p} = \vec{e}_x \left[ \frac{2q^2E}{K_1+K_2} + \frac{K_2-K_1}{K_1+K_2}qx_B \right]$ . Dans la lecture de cette expression, on peut voir que l'effet du champ électrique est toujours le même. Par contre, on retrouve un terme en  $K_2 - K_1$ . Il n'y aura pas de contribution de  $x_B$  lorsque la déformation laisse la maille avec sa symétrie de départ. Par contre si une dissymétrie naît, on aura création d'un moment dipolaire et cela est traduit par une raideur différente des ressorts dans le modèle proposé.

4. L'élément piézoélectrique est composé de  $N_1$  blocs du type de celui que nous avons étudié. À l'équilibre, le bloc  $N_1$  (le dernier) subit la force extérieure  $\vec{F}$ . Il subit donc de la part du bloc  $N_1 - 1$ , une force  $-F\vec{e}_x$  pour que la somme soit nulle. Par le principe des actions réciproques, la force exercée par le bloc  $N_1$  sur le bloc  $N_1 - 1$  est donc  $\vec{F}$ . On comprend ainsi que tous les blocs vont être soumis à la force  $\vec{F}$ . Si l'on veut se convaincre de la validité du résultat établi à la question 2., on peut étudier un enchaînement de deux blocs. On montre que la force qui s'exerce sur le bloc  $N_1$  fait toujours apparaître un terme de la forme  $\frac{2K_1K_2}{K_1+K_2}(x_{N_1} - x_{N_1-1})$  avec en plus le terme lié au champ électrique qui est inchangé. Comme tous les blocs sont identiques, tous auront la même contribution à la déformation totale. Si  $\Delta$  est la déformation totale, on aura  $x_{N_1} - x_{N_1-1} = \frac{\Delta}{N_1}$ . Comme on doit évaluer la force pour la totalité de l'élément piézoélectrique, il

faut penser à multiplier la force évaluée dans la direction  $Ox$  par  $N_2 \times N_3$ . L'expression de la force exercée par l'extérieur est donc  $\vec{F} = \vec{e}_x N_2 N_3 \left[ -\frac{K_2 - K_1}{K_1 + K_2} qE + \frac{2K_1 K_2}{K_1 + K_2} \frac{\Delta_r}{N_1} \right]$ .

5. La surface offerte par l'élément piézoélectrique est  $S_{tot} = N_2 N_3 4a^2$  et la longueur  $L = N_1 2a$ . La contrainte est  $\sigma = \frac{F}{N_2 N_3 4a^2}$ . En utilisant les deux expressions précédentes, on aboutit à la contrainte :

$$\sigma = -\frac{K_2 - K_1}{K_1 + K_2} \frac{qE}{4a^2} + \frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2} \frac{\Delta_r}{a}$$

### Passage à la limite continue

6. Dans cette étude de l'élément piézoélectrique, on a deux forces en présence, celle liée à l'élasticité de la maille cristalline de raideur que l'on peut proposer à  $\frac{2K_1 K_2}{K_1 + K_2}$  et celle liée au champ électrique  $qE$ . On peut proposer une longueur caractéristique du problème en écrivant que  $2K_{eq} L_u^* = qE$ . On retient donc :

$L_u^* = \frac{qE(K_1 + K_2)}{2K_1 K_2}$ .  $dx$  est la longueur pertinente à l'échelle mésoscopique, on doit nécessairement avoir  $dx \gg 2a$  pour percevoir un milieu continu et non pas discret. La longueur  $L_u^*$  sera nécessairement grande devant  $dx$ , sinon on aurait une évolution notable des fonctions sur  $dx$  empêchant de les supposer constantes sur cet élément, ce qui est la base du modèle infinitésimal continu. En conclusion, on a  $2a \ll dx \ll L_u^*$ .

7. La polarisation est  $P = \frac{p}{8a^3}$  puisque le volume de la maille étudiée est  $(2a)^3$ . On arrive à  $P = \frac{q^2}{4a^3(K_1 + K_2)} E + \frac{K_2 - K_1}{4a^2(K_1 + K_2)} q \frac{x_B}{2a}$  correspond à la déformation relative  $\frac{\partial u}{\partial x}$ . La forme proposée correspond à celle de l'énoncé

si l'on pose  $\alpha = \frac{q^2}{4a^3(K_1 + K_2)}$  et  $\beta = \frac{K_2 - K_1}{K_1 + K_2} \frac{q}{4a^2}$ . On s'intéresse à la contrainte et on doit constater que  $\Delta_r$  correspond à  $\frac{\partial u}{\partial x}$ . On peut tout de suite conclure que  $A = \frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2} \frac{1}{a}$ . Pour le dernier terme, on voit immédiatement que  $B = \beta$  comme l'énoncé nous invite à le constater.

## 1.2 Étude électrostatique

8. L'équation de MAXWELL-GAUSS dit que  $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho_P}{\epsilon_0}$  puisque la seule contribution est  $\rho_P$  puisqu'il n'y a pas de charges étrangères, l'élément piézoélectrique étant neutre. Comme tout se passe sur la direction  $Ox$ , on en déduit que  $\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{\rho_P}{\epsilon_0} = -\frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial P}{\partial x}$  puisque  $\rho_P = -\text{div}(P \vec{e}_x) = -\frac{\partial P}{\partial x}$ . Or, avec la relation vue à la question précédente, on a  $\frac{\partial P}{\partial x} = \alpha \frac{\partial E}{\partial x} + \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ . On obtient alors  $(1 + \frac{\alpha}{\epsilon_0}) \frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\beta}{\epsilon_0} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ . En posant  $\epsilon = \epsilon_0 + \alpha$ , on arrive à  $\epsilon \frac{\partial E}{\partial x} = -\beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ . On intègre cette équation différentielle qui présente des dérivées partielles à  $t$  fixé. On obtient donc  $\epsilon E = -\beta \frac{\partial u}{\partial x} + f_Q(t)$ .

9. Pour déterminer la fonction du temps issue de l'intégration précédente, il faut appliquer les conditions aux limites. C'est en  $x = L$  que les choses se jouent. Le conducteur constituant l'électrode est parfait, à l'intérieur de celui-ci le champ électrique est nul. À sa surface du côté de l'élément piézoélectrique et donc en  $x = L$ , il existe une charge surfacique libre ou étrangère au piézo  $\frac{Q(t)}{S}$ . La relation de passage avec un milieu polarisé porte sur le vecteur déplacement électrique<sup>1</sup>  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon \vec{E} + \beta \frac{\partial u}{\partial x} \vec{e}_x$ . Par conséquent, la relation de passage est  $\epsilon \vec{E}_{\text{piézo}} + \beta \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_L \vec{e}_x - \epsilon_0 \vec{E}_{\text{cond}} = -\frac{Q(t)}{S} \vec{e}_x$ . Comme  $\vec{E}_{\text{cond}} = \vec{0}$ , on trouve que  $\epsilon E(L, t) + \beta \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_L = -\frac{Q(t)}{S}$ . Cela nous donne le champ électrique en  $x = L$  qui vérifie  $\epsilon E(L, t) = -\beta \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_L - \frac{Q(t)}{S}$ . Si l'on applique maintenant la relation démontrée à la question précédente à la position  $x = L$ , on obtient  $\epsilon E(L, t) = -\beta \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_L + f_Q(t)$ . En identifiant les deux expressions, on trouve que  $-\frac{Q(t)}{S} = f_Q(t)$ . On peut donc conclure sur l'expression proposée par l'énoncé :  $\epsilon E = -\beta \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{Q(t)}{S}$ .

10. On se place dans l'approximation des régimes quasi-permanents, on peut donc conserver  $\text{rot } \vec{E} = \vec{0}$  et donc  $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V = -\frac{\partial V}{\partial x} \vec{e}_x$ . On réécrit la relation précédente à l'aide du potentiel et on obtient  $\epsilon \frac{\partial V}{\partial x} = \beta \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{Q(t)}{S}$ . Cette équation différentielle est exprimée à  $t$  fixé. On peut donc intégrer en  $x$  en étant attentif au fait que la constante habituelle d'intégration sera une fonction du temps comme cela s'est déjà produit

1. Cette notion est hors-programme, on peut regretter qu'elle soit introduite subrepticement...

avant. On a donc  $\varepsilon V(x, t) = \beta u(x, t) + \frac{Q(t)}{S}x + g(t)$ . On peut appliquer cette loi en  $x = L$  et on obtient  $\varepsilon V(L, t) = \beta u(L, t) + \frac{Q(t)}{S}L + g(t)$ . Le conducteur parfait est équipotentiel et par continuité du potentiel en  $x = L$ , on a  $\psi = V(L, t) - V(0, t)$ . On arrive dans un premier temps à  $\varepsilon\psi = \beta(u(L, t) - u(0, t)) + \frac{Q(t)}{S}L$ . Or, la surface du piézo en  $x = 0$  est immobile, on a obligatoirement  $u(0, t) = 0$ . On peut donc simplifier la relation précédente pour écrire  $\varepsilon\psi = \beta u(L, t) + \frac{Q(t)}{S}L$ . On arrange cette expression en introduisant la capacité  $C_e = \frac{\varepsilon S}{L}$  pour pouvoir conclure sur :  $\psi(t) = \frac{\beta}{\varepsilon}u(L, t) + \frac{Q(t)}{C_e}$ .

11. Nous savons que  $\sigma = A \frac{\partial u}{\partial x} - BE$  avec  $B = \beta$ . Avec l'expression du champ électrique que nous venons de démontrer, on arrive à  $\sigma = A \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\beta^2}{\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\beta}{\varepsilon} Q(t)$ . On peut donc poser  $A' = A + \frac{\beta^2}{\varepsilon}$  et  $B' = \frac{\beta}{\varepsilon}$ .

### 1.3 Étude mécanique

12. On étudie un morceau de l'élément piézoélectrique de longueur  $dx$  situé à l'abscisse  $x$  dans le référentiel matérialisé par  $Ox$  supposé galiléen. Sa masse est  $dm = \rho 4a^2 dx$ . Il subit une force  $F(x + dx, t)$  exercée par la partie du piézo située à sa droite et une force  $-F(x, t)$  exercée par la partie du piézo située à sa gauche. La relation de la Dynamique donne  $\rho 4a^2 dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F(x + dx, t) - F(x, t)$ . La force est reliée à la contrainte par  $F(x, t) = \sigma(x, t) 4a^2$ . On peut donc en déduire que  $\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}$ . Or,  $\frac{\partial \sigma}{\partial x} = A' \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  puisque le second terme de la contrainte n'est qu'une fonction du temps. On obtient alors facilement l'équation de propagation de D'ALEMBERT :  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\rho}{A'} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ . Cela nous conduit à exprimer la célérité des ondes de déformation comme étant :  $c = \sqrt{\frac{A'}{\rho}}$ .

13. La relation de dispersion est  $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$  ce qui autorise deux possibilités pour le vecteur d'onde à savoir  $k_{\pm} = \pm \frac{\omega}{c}$  pour une propagation dans le sens  $x$  croissant pour  $k_+ = \frac{\omega}{c}$  et à  $x$  décroissant pour l'autre.

14. Si on retient la solution onde plane progressive sinusoïdale comme pertinente pour l'étude de l'élément piézoélectrique, à savoir une forme  $u(x, t) = \tilde{u} \exp j(\omega t - kx)$ , on ne pourra jamais remplir la condition que doit vérifier la déformation en  $x = 0$  à savoir  $u(0, t) = 0 \forall t$ . La forme  $u(x, t) = \tilde{u} \exp j\omega t \sin kx$  vérifie parfaitement cette condition. D'ailleurs, si on considère la superposition de deux ondes planes progressives sinusoïdales se propageant en sens contraire  $u_+(x, t) = \tilde{u}_+ \exp j(\omega t - kx)$  et  $u_-(x, t) = \tilde{u}_- \exp j(\omega t + kx)$ , la superposition en  $x = 0$  entraîne  $u = (\tilde{u}_+ + \tilde{u}_-) \exp j\omega t$ . Comme  $u(0, t) = 0 \forall t$ , on obtient  $\tilde{u}_+ + \tilde{u}_- = 0$ . L'amplitude des ondes sont opposées, cela amène donc la forme en  $\sin kx$ .

#### Étude du régime libre sans charge mécanique

15. Si la pulsation était complexe de la forme  $\omega = \omega_r \pm j \frac{1}{\tau_i}$ , on aurait une exponentielle réel du temps qui apparaîtrait dans la solution de la forme  $\exp \pm \frac{t}{\tau_i}$ . Si on retient la solution qui s'amortit avec le temps, l'onde de déformation s'amortirait en quelques  $\tau_i$ . Cela ne peut pas se produire dans le milieu étudié puisqu'il n'y a eu aucune prise en compte de force dissipative. Quant à la solution qui divergerait avec le temps, elle pourrait se produire dans un milieu actif dans lequel on injecterait en permanence de l'énergie pour obtenir une onde d'amplitude croissante comme cela se passe dans un laser avec le phénomène de pompage optique. Ici, il n'y a rien de ce genre. On ne peut pas avoir de pulsation complexe. On continuera le problème avec  $\omega$  réelle et positive.

16. On étudie le régime dit libre pour lequel  $Q(t) = 0$  et  $F = 0$ . Il n'y a donc pas de contrainte à l'extrémité du milieu en  $x = L$ . On en déduit que  $\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_L = 0$ . Avec la forme de solution proposée, on doit donc vérifier  $k \tilde{u} \exp j\omega t \cos kL = 0$ . On en déduit que  $k_q L = (2q - 1) \frac{\pi}{2}$ . On peut exprimer les différents vecteurs d'onde des modes propres et les pulsations correspondantes puisque  $\omega = kc$ . On a :  $k_q = (q - \frac{1}{2}) \frac{\pi}{L}$  et  $\omega_q = (q - \frac{1}{2}) \frac{\pi c}{L}$ .

17. On a  $f_1(x) = \sin \frac{\pi}{2L}x$  et  $f_2 = \sin \frac{3\pi}{2L}x$ . Ces fonctions sont représentées sur le schéma de la figure 1.

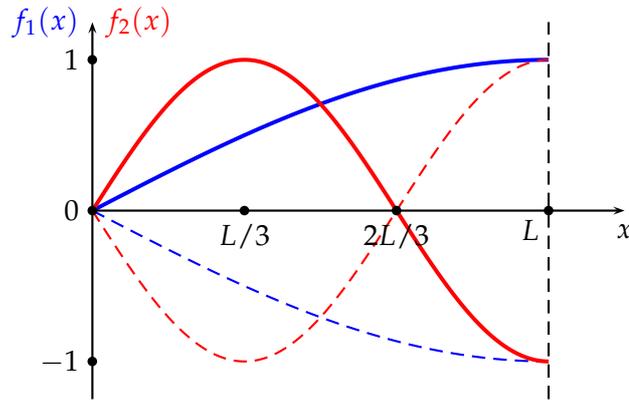


FIGURE 1 – Représentation des deux premiers modes propres de déformation de l'élément piézoélectrique

### Étude du régime libre avec charge mécanique inertielle

18. Le fait d'imposer une condition aux limites différente - condition qui ne dissipe pas d'énergie - ne change pas le modèle idéal de l'élément piézoélectrique et n'amène pas plus de dissipation d'énergie qu'avant. On a donc toujours  $\omega$  réelle.

19. Si l'objet n'était pas considéré comme ponctuel, on aurait sans doute une difficulté supplémentaire pour exprimer la condition à l'interface entre les deux objets car  $M_0$  pourrait faire jouer sa propre élasticité. Il faut que l'objet soit petit par rapport à une longueur pertinente de l'onde de déformation, c'est bien sûr par rapport à la longueur d'onde  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$  que la comparaison doit être faite. On a  $L_0 \ll \lambda$  ce qui revient à écrire que  $kL_0 \ll 1$ . Cette condition s'applique au mode de rang le plus élevé considéré puisque ce sera celui possédant la plus petite longueur d'onde. La condition à l'interface porte sur la relation de la Dynamique appliquée à  $M_0$ , toujours dans le même référentiel galiléen. La force exercée par l'élément piézoélectrique sur  $M_0$  est une force de rappel de la forme  $-\sigma(L, t)S$ . On a donc  $M_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_L = -\sigma(L, t)S$ .

20. On sait que  $\sigma(L, t) = A' \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_L$ . On utilise  $A' = c^2 \rho$  pour obtenir  $\sigma(L, t) = c^2 \rho k \exp j\omega t \tilde{u} \cos kL$ . Comme  $M_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_L = -M_0 \omega^2 \tilde{u} \exp j\omega t \sin kL$ , on peut écrire l'équation  $M_0 \omega^2 \sin kL = c^2 \rho k S \cos kL$ . En utilisant la relation de dispersion  $\omega^2 = k^2 c^2$ , on arrive à  $M_0 k \sin kL = \rho S \cos kL$ . Si on multiplie par  $L$  des deux côtés, on arrive à l'équation  $\frac{M_0}{\rho S L} \theta = \cot \theta$ . Ce qui revient à poser  $\mu = \frac{M_0}{\rho S L}$ .  $\mu$  compare les masses respectives de l'objet situé à l'extrémité de l'élément piézoélectrique avec sa propre masse.

21. On a  $\mu = 3$ . Les modes sont donnés par les solutions de  $3\theta = \cot \theta$  que l'on peut encore écrire  $y = 3\pi \left(\frac{\theta}{\pi}\right) = \cot \theta$ . Lorsque  $\theta = \pi$ , on a  $y = 3\pi x \simeq 10x$  avec  $x = \theta/\pi$ . On voit très clairement qu'une intersection pour  $q = 2$  correspond à une valeur de  $\theta \simeq \pi^+$ . On peut en déduire que pour le mode  $q > 1$  - puisqu'il y a une intersection pour  $\theta < \pi^-$ , on a  $k_q L = \pi(q - 1)$ . Cette réponse est tout à fait acceptable car l'intersection s'effectue très près de l'asymptote verticale de la fonction cotangente. À partir de  $k_q = \frac{2\pi f_q}{c}$ , on peut exprimer les fréquences des modes propres :  $f_{q>1} = \frac{c}{2L}(q - 1)$ . Pour  $q = 2$ , on obtient  $f_2 = \frac{c}{2L}$ . On a  $L = 2 \times 10^{-4}$  m. Pour le calcul de la célérité, on prend  $A' = 10^9$  Pa et  $\rho = 2 \times 10^3$ . Cela permet de calculer la vitesse de propagation des ondes à  $c = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 10^3$  m · s<sup>-1</sup>. On arrive à :  $f_2 = 1,8$  MHz.

22. Si  $\mu \ll 1$ , la droite  $y = \mu\theta$  est très peu éloignée de l'axe des abscisses. Les intersections avec la courbe de la cotangente sont très voisines de  $(q - \frac{1}{2})\pi = \theta$  au moins pour un bon nombre de modes (les premiers) significatifs. On retrouve les modes propres de l'étude du cas de l'extrémité libre. Cette constatation était attendue car si l'inertie de l'objet en bout de ligne est très faible devant l'inertie de l'élément piézoélectrique, c'est comme s'il n'y avait rien au bout. Pour  $\mu \gg 1$ , on est dans une situation complètement opposée. L'inertie est tellement grande que tout se passe comme si l'extrémité du piézo était immobile. C'est une situation de corde de MELDE et les modes propres correspondent à  $kL = n\pi$ . La droite  $y = \mu\theta$  est tellement proche de la verticale que les intersections sont sur les asymptotes verticales de la fonction cotangente. On peut remarquer que nous avons obtenu les mêmes conclusions pour  $\mu = 3$  à partir du mode  $q = 2$ . Cela nous

montre que la condition  $\mu \gg 1$  est très vite réalisée puisque 3 convient dès le second mode propre. C'est pour le premier mode que le coefficient  $\mu > 1$  va intervenir.

#### 1.4 Adaptation de la modélisation à un cadre pratique

23. D'après la proposition d'équivalence énergétique, on a  $E_c^* = \frac{1}{2}m^* \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_L^2$ . Comme on travaille sur le mode  $q = 1$ , on a  $k_1 = \frac{\pi}{2L}$ . L'expression de l'énergie cinétique est alors  $E_c^* = \frac{1}{2}m^* \omega_1^2 u_1^2 \sin^2 \omega_1 t \sin^2 k_1 L = \frac{1}{2}m^* \omega_1^2 u_1^2 \sin^2 \omega_1 t$ . On calcule d'une seconde façon l'énergie cinétique en partant de celle d'un morceau de l'élément piézoélectrique de longueur  $dx$  situé en  $x$ . Sa masse est  $dm = \frac{m}{L} dx$ . Son énergie cinétique est donc  $dE_c = \frac{1}{2} \frac{m}{L} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx$ . Il faut intégrer cette relation de  $x = 0$  à  $x = L$ . On a  $E_c = \frac{1}{2} \frac{m}{L} \omega_1^2 u_1^2 \sin^2 \omega_1 t \int_0^L \sin^2 \frac{\pi x}{2L} dx$ . Or,  $\int_0^L \sin^2 \frac{\pi x}{2L} dx = \frac{1}{2} \int_0^L (1 - \cos \frac{\pi x}{L}) dx = \frac{L}{2}$  en utilisant les règles de trigonométrie  $\cos 2y = \cos^2 y - \sin^2 y = 1 - 2 \sin^2 y$ . Si on écrit l'équivalence  $E_c = E_c^*$ , on aboutit à  $\boxed{m^* = \frac{m}{2}}$ . Il n'y a rien d'étonnant à ce que la masse équivalente soit plus petite que la masse totale de l'élément piézoélectrique, en effet  $E_c^*$  est évaluée au seul endroit où la vitesse est maximale dans le mode propre  $q = 1$ . Il y aura des points qui auront une vitesse plus faible, voire nulle en  $x = 0$  et donc des éléments de masse qui contribueront moins à l'énergie cinétique que ceux de l'extrémité. On pouvait sans doute prévoir que le coefficient entre les masses serait  $\frac{1}{2}$  car le calcul revient à déterminer la valeur moyenne de  $\sin^2 \frac{\pi x}{2L}$  sur l'intervalle  $[0, L]$ . En observant la courbe donnant  $\sin^2 k_1 x$ , on voit la parfaite symétrie par rapport à  $L/2$ . On se reportera à la figure 2.

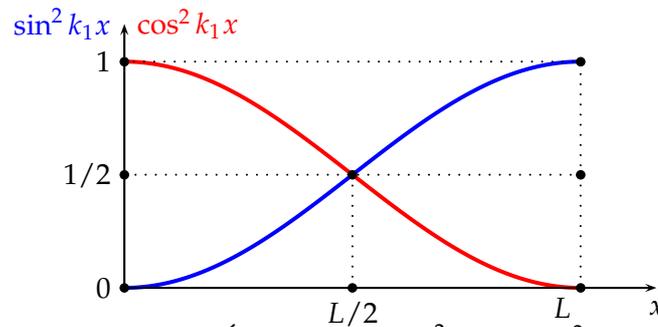


FIGURE 2 – Évolution de  $\sin^2 k_1 x$  et  $\cos^2 k_1 x$

24. L'énergie potentielle est  $E_p^* = \frac{1}{2}K^* \Delta^2$  avec  $\Delta = u(L, t) = u_1 \cos \omega_1 t$  car  $\sin k_1 L = 1$ . On peut alors écrire que  $E_p^* = \frac{1}{2}K^* u_1^2 \cos^2 \omega_1 t$ . Pour le second calcul de l'énergie potentielle de déformation élastique, il faut aussi intégrer toutes les contributions pour les petits morceaux du composant piézoélectrique. La difficulté réside dans l'expression de l'énergie potentielle associée à un morceau de longueur  $dx$  situé à l'abscisse  $x$ . La contrainte locale est  $\sigma(x, t) = A' \frac{\partial u}{\partial x}$ , ce qui fait que la force de rappel associée sera  $F(x, t) = -A' S \frac{\partial u}{\partial x}$ . On se contentera d'une analogie avec un ressort. Pour un ressort habituel, la force de rappel est  $F = -kx$  si  $x$  est l'élongation par rapport à l'équilibre et l'énergie potentielle associée  $\frac{1}{2}kx^2$ . Dans notre cas, la déformation locale relative est analogue à l'élongation du ressort. L'énergie potentielle pour le morceau de longueur  $dx$  sera donnée par  $dE_p = \frac{1}{2} A' S \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx$ . On a donc  $E_p = \frac{1}{2} A' S u_1^2 k_1^2 \cos^2 \omega_1 t \int_0^L \cos^2 \frac{\pi x}{2L} dx$ . Comme dans le cas précédent, l'intégrale vaut  $\frac{1}{2}L$  qui ne peut pas être différente de la précédente. L'énergie potentielle est alors  $E_p = \frac{1}{2} A' S u_1^2 \frac{\pi^2}{8L} \cos^2 \omega_1 t$ . En égalant les deux expressions de l'énergie potentielle, on arrive à :  $\boxed{K^* = \frac{A' S \pi^2}{8L}}$ . Si on était en statique, la force  $F$  serait donnée par  $F = A' S \frac{\Delta}{L} = K^0 \Delta$ . La constante de raideur statique est  $K^0 = \frac{A' S}{L}$ , elle ne diffère de  $K^*$  que par le coefficient  $\frac{\pi^2}{8}$  qui n'est guère différent de 1, c'est logique que les deux raideurs soient proches car le premier mode propre est le plus proche de la situation statique entre tous les modes.

25. Pour un système  $(m^*, K^*)$ , la pulsation propre est fournie par la relation traditionnelle  $\omega^{*2} = \frac{K^*}{m^*}$ . On utilise les expressions établies dans les questions précédentes pour arriver à  $\omega^{*2} = \frac{A' S \pi^2}{4L m}$ . Comme la masse de l'élément piézoélectrique est  $m = \rho S L$ , on obtient  $\omega^{*2} = \frac{A' \pi^2}{\rho 4L^2} = c^2 k_1^2$ . La relation de dispersion montre que :  $\boxed{\omega^* = \omega_1}$ .

26. Le mobile de  $M$  subit la force  $F_0$  et la force de rappel liée à l'élasticité de l'élément piézoélectrique  $-F_L$ . Dans le référentiel galiléen attaché à l'axe  $Ox$ , on peut écrire  $M \frac{d^2 \Delta}{dt^2} = F_0 - F_L = F_0 - K^* \Delta - \frac{B}{\epsilon} Q$ . On utilise alors la relation entre la différence de potentiel  $\psi$  et la charge pour éliminer cette dernière grâce à  $Q = C_e \psi - \frac{B}{\epsilon} \Delta C_e$ . La poursuite du calcul mène à  $M \frac{d^2 \Delta}{dt^2} = F_0 - (K^* - C_e \frac{B^2}{\epsilon^2}) \Delta - \frac{B}{\epsilon} C_e \psi$ . On a  $K_e = C_e \frac{B^2}{\epsilon^2}$  et  $\gamma = \frac{B}{\epsilon} C_e$ . On aboutit à la forme recherchée :  $M \frac{d^2 \Delta}{dt^2} = F_0 - K^{**} \Delta - \gamma \psi$ . On passe en amplitude complexe pour le régime sinusoïdal forcé :  $M(j\omega)^2 \tilde{\Delta} = \tilde{F}_0 - K^{**} \tilde{\Delta} - \gamma \tilde{\psi}$ . On réorganise la formule pour aller dans le sens voulu par l'énoncé. On arrive, en jouant avec les facteurs  $(j\omega)$  à  $\tilde{F}_0 = [M(j\omega) + \frac{K^{**}}{j\omega}](j\omega) \tilde{\Delta} + \gamma \tilde{\psi}$ . On utilise l'impédance mécanique pour conclure :  $\tilde{F}_0 = Z_{\text{méca}}(j\omega) \tilde{\Delta} + \gamma \tilde{\psi}$ .

27. L'intensité est la dérivée par rapport au temps de la charge  $Q(t)$ . On passe directement en amplitude complexe, on a donc  $\tilde{i} = (j\omega) \tilde{Q}$ . Or,  $\tilde{Q} = C_e \tilde{\psi} - \frac{B}{\epsilon} \tilde{\Delta} = C_e \tilde{\psi} - \frac{\gamma}{C_e} \tilde{\Delta}$ , cela permet de déterminer la relation attendue :  $\tilde{i} = C_e(j\omega) \tilde{\psi} - \frac{\gamma}{C_e}(j\omega) \tilde{\Delta}$ .

28. En effectuant l'équivalent d'une loi des mailles en sortie, on a immédiatement  $F_e = \gamma \tilde{\psi}$ . Le rapport de transformation est alors  $\gamma$ . En effectuant une loi des nœuds en entrée, on peut écrire que  $C_e(j\omega) \tilde{\psi} = \tilde{i} + J$ . Cela conduit à :  $J = \frac{\gamma}{C_e}(j\omega) \tilde{\Delta}$ . En regardant l'expression de l'impédance mécanique, on peut proposer une bobine pour modéliser le terme  $(j\omega)M$  en série avec un condensateur pour le terme  $\frac{K^{**}}{j\omega}$ . Le transformateur est parfait car il n'y a pas de termes équivalents à une résistance électrique. Sur le plan électromécanique, il n'y a pas de forces dissipatives, uniquement des forces de rappel de type ressort et une force électrostatique qui dérivent, toutes, d'une énergie potentielle.

29. Il n'y a pas de force ( $F_0 = 0$ ), alors  $(j\omega) \tilde{\Delta} = -\frac{\gamma}{Z_{\text{méca}}} \tilde{\psi}$ . On remplace dans l'expression de l'amplitude complexe de l'intensité pour arriver à  $\tilde{i} = (C_e(j\omega) + \frac{\gamma^2}{C_e} \frac{1}{M(j\omega) + \frac{K^{**}}{j\omega}}) \tilde{\psi}$ . On peut écrire cette expression sous la forme  $\tilde{i} = \frac{1}{Z_Q} \tilde{\psi}$ . L'expression de l'inverse de l'impédance est plus facile à interpréter que l'impédance elle-même :  $\frac{1}{Z_Q} = jC_e \omega + \frac{1}{j \frac{MC_e}{\gamma^2} \omega + \frac{K^{**} C_e}{\gamma^2(j\omega)}}$ . On voit que l'on a deux dipôles en parallèles : un condensateur de capacité  $C_e$  avec une dipôle d'impédance  $j \frac{MC_e}{\gamma^2} \omega + \frac{K^{**} C_e}{\gamma^2(j\omega)}$ . On a une série entre une bobine d'inductance  $\frac{MC_e}{\gamma^2}$  et un condensateur de capacité  $\frac{\gamma^2}{K^{**} C_e}$ .

## 2 Application de l'effet piézoélectrique à la transformation de tension

### 2.1 Détermination des éléments du schéma équivalent

30.  $\omega_s$  correspond au maximum de  $|Y_1|$ . On voit que cela correspond à  $f_s = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 1,9$  MHz. En cherchant à écrire l'admittance  $Y_1 = \Re(Y_1) + j\Im(Y_1)$ , on arrive à l'expression  $\Re(Y_1) = \frac{1}{R} \frac{1}{1 + \frac{1}{R^2}(L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}$  et aussi à  $\Im(Y_1) = C_1\omega - \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}$ . La partie réelle de  $Y_1$  est maximale lorsque  $\omega = \omega_s$ . On peut voir sur le diagramme donnant la partie imaginaire en fonction de la partie réelle que cela correspond à  $\Re(Y_1) = 0,155$  S =  $\frac{1}{R}$ . On en déduit la valeur de la résistance  $R = 6,5 \Omega$ . Toujours à cette pulsation, la partie imaginaire de  $Y_1$  est  $C_1\omega_s = C_1 2\pi f_s = 0,003$  S. On connaît toutes les valeurs numériques, on peut en déduire  $C_1 = 2,5 \times 10^{-10}$  F. On peut repérer la fréquence  $f_p = 2,03$  MHz. D'après les formules données des pulsations particulières, on peut constater que  $\omega_s^2 = \frac{1}{LC}$  et  $\omega_p^2 = (1 + \frac{C}{C_1}) \frac{1}{LC} = (1 + \frac{C}{C_1}) \omega_s^2$ . La capacité  $C$  est donc donnée par  $C = C_1(\frac{f_p^2}{f_s^2} - 1)$ . On peut déterminer la valeur de la capacité  $C$  :  $C = 3,5 \times 10^{-11}$  F. Il ne reste plus qu'à trouver  $L$  grâce à  $L = \frac{1}{C 4\pi^2 f_s^2}$ . On trouve :  $L = 2,0 \times 10^{-4}$  H.

### 2.2 Analyse du comportement du transformateur en charge

31. On a  $U_1 = \frac{U_2}{m}$  et  $J_1 = J_2 m$ . On peut exprimer l'impédance  $Z'_2 = \frac{U_1}{J_1} = \frac{U_2}{J_2} \frac{1}{m^2} = \frac{Z_2}{m^2}$ . Or,  $Y_2 = \frac{1}{R} + jC\omega$  et  $Y'_2 = \frac{1}{R'_L} + jC'\omega$ . Comme  $Y'_2 = m^2 Y_2$ , on arrive à  $R'_L = \frac{R}{m^2}$  et  $C' = m^2 C$ .

32. On a un circuit série formé par les deux résistances  $R$  et  $R_s$ , la bobine de coefficient  $L$  et un condensateur équivalent de capacité  $C_{eq} = \frac{CC_s}{C+C_s}$ . La résonance d'intensité sera obtenue à la pulsation  $\omega_r$  telle que  $\omega_r^2 = \frac{C+C_s}{LCC_s}$ . Lorsque l'on se trouve à la pulsation de résonance, on a finalement un circuit uniquement constitué de l'association en série de  $R$  et de  $R_s$ . L'intensité efficace qui traverse les deux résistances est  $I_2^{eff} = \frac{|V_1|}{\sqrt{2}} \frac{1}{R+R_s}$ .

La puissance dissipée dans la résistance  $R_s$  est  $P_2 = R_s I_2^{eff2}$ . La puissance est :  $P_2 = \frac{|V_1|^2}{2} \frac{R_s}{(R+R_s)^2}$ .

33. Il y a un maximum de puissance lorsque  $\frac{dP_2}{dR_s} = 0$ . Après calculs, on arrive à  $\frac{dP_2}{dR_s} = \frac{|V_1|^2}{2} \frac{R-R_s}{(R+R_s)^3}$ . En se plaçant à  $R = R_s$ , on réalise un transfert maximal de puissance, on est dans la situation d'adaptation d'impédance.

34. Si on a  $C_2 \gg C$  alors, avec la condition  $C_s > m^2 C_2$  puisque le facteur lié à  $\omega$  est plus grand que 1, on peut dire que  $C_s \gg C$ . La pulsation de résonance sera donc  $\omega_r \simeq \frac{1}{\sqrt{LC}}$ . On peut donc utiliser les résultats précédents, on a  $R_s = R = \frac{R_L}{m^2}$ . On a donc la condition  $R_L = m^2 R \gg R$ . On peut transmettre une puissance importante à une résistance de charge élevée par rapport à la résistance  $R$  du primaire du transformateur.

### 2.3 Alimentation d'une lampe fluorescente à cathode froide par un transformateur piézoélectrique

35. Le point  $P_0$  est défini par la fréquence maximale. Comme toutes les courbes pour les différentes résistances sont voisines, on peut situer ce point vers une tension efficace de 200 V :  $P_0(70 \text{ kHz}; 200 \text{ V})$ .

36. Pour réaliser l'amorçage, il faut atteindre une tension efficace de 950 V. Sur le graphique donnant la tension efficace en fonction de l'intensité efficace, on voit qu'à l'amorçage l'intensité efficace est  $I_2^{eff} = 1,2 \text{ mA}$ . Enfin sur le graphique permettant de relier intensité et résistance, on voit que cela se produit pour  $R_L \simeq 750 \text{ k}\Omega$ . Le point  $P_1$  se situe donc à l'ordonnée 950 V et sur la courbe la plus à droite. On trouve que la fréquence  $f_1 = 60 \text{ kHz}$ . Le point  $P_1$  est défini par :  $P_1(60 \text{ kHz}; 950 \text{ V})$ .

37. Grâce aux informations de l'énoncé, on peut voir que la tension nominale est de 680 V et que l'intensité nominale est de 5 mA. On peut déterminer la valeur de la résistance  $R_L \simeq 140 \text{ k}\Omega$ . Il faut aller chercher le point sur la courbe qui a son maximum en premier. On trouve que la fréquence est  $f_2 = 56 \text{ kHz}$ . Le point  $P_2$  de fonctionnement nominal est défini par :  $P_2(56 \text{ kHz}; 680 \text{ V})$ . Depuis la situation du point  $P_1$ , il faut diminuer la fréquence.

### 3 Oscillateur électrique utilisant un élément piézoélectrique

38. La loi des mailles permet d'écrire que  $V_2 = G_0 V_1 - RI$ . L'intensité  $I$  est donnée par la loi des nœuds :  $I = \frac{V_2}{Z_3} + \frac{V_3}{Z_1}$ . En effet, il n'y a pas de charge en sortie du montage, ainsi l'intensité qui circule dans  $Z_2$  circule aussi dans  $Z_1$ . Entre  $V_2$  et  $V_3$ , il y a une relation de diviseur de tension :  $V_3 = \frac{Z_1}{Z_1+Z_2} V_2$ . On a donc  $V_2 = V_3(1 + \frac{Z_2}{Z_1})$ . En utilisant l'ensemble de ces relations, on peut aboutir à la formule proposée par l'énoncé  $\frac{G_0}{R} V_1 = Y V_3$  avec  $Y = (1 + \frac{Z_2}{Z_1})(\frac{1}{R} + \frac{1}{Z_3} + \frac{1}{Z_1+Z_2})$ .

39. Si on boucle le point C sur le point A, on provoque la circulation d'un courant qui n'a pas été pris en compte dans les calculs précédents. Pour que la démarche faite avant reste valide, il faut que ce courant soit faible devant le courant  $I$ . Ce sera le cas, si le courant est faible devant  $\frac{V_3}{Z_1}$ . On doit donc avoir  $\frac{V_3}{R_e} \ll \frac{V_3}{Z_1}$ . La condition est donc  $R_e \gg Z_1$ .

40. Comme le bouclage entraîne  $V_1 = V_3$ , la relation établie avant devient  $G_0 = YR$ . Dans un système linéaire, on obtient un polynôme de la variable  $p$ . Les racines du polynôme fixent le régime libre, en particulier la stabilité est obtenue lorsque les parties réelles des racines sont négatives.

41.  $G_0$  est un réel, il faut que  $RY$  soit réel. Par conséquent,  $Y$  doit être un réel. Il faut donc annuler sa partie imaginaire et identifier sa partie réelle à  $\frac{G_0}{R}$ . Comme toutes les impédances sont imaginaires pures, le rapport  $\frac{Z_2}{Z_1} = \frac{S_2}{S_1}$  est réel. En développant le calcul de l'expression de  $Y$ , on arrive à  $Y = (1 + \frac{S_2}{S_1}) \frac{1}{R} - j \frac{1}{S_1} (1 + \frac{S_1+S_2}{S_3})$ . On en déduit les deux conditions  $1 + \frac{S_2}{S_1} = G_0$  et  $1 + \frac{S_1+S_2}{S_3} = 0$ . Les deux relations voulues sont

donc  $1 + \frac{S_1 + S_2}{S_3} = 0$  et  $1 + \frac{S_2}{S_1} - G_0 = 0$ . La résistance  $R$  ne figure pas dans les expressions car la chute de tension en sortie de l'amplificateur est prise en compte dans la tension  $V_3$  qui est ramenée en entrée dans l'amplificateur. La tension amplifiée  $G_0 V_1$  prend en compte cette chute de tension.

42. Avec les constantes  $K_i$  posées par l'énoncé, on a aussitôt  $1 + K_2 - G_0 = 0$  et donc  $K_2 = G_0 - 1$ . La seconde relation peut encore s'écrire  $S_3 + S_1 + S_2 = 0$ . En divisant par  $S_1$ , on obtient  $K_3 + 1 + K_2 = 0$ . Mais avec la relation précédente  $1 + K_2 = G_0$  donc  $K_3 = -G_0$ .

43. On a  $S_1 = -\frac{1}{C_1 \omega}$  et  $K_3 = -G_0$  qui amène  $S_3 = \frac{G_0}{C_1 \omega}$ . Comme  $G_0 < 0$ , il est préférable de d'écrire l'impédance  $Z_3 = jS_3$  avec  $S_3 = -\frac{|G_0|}{C_1 \omega}$ . Cette forme nous permet d'identifier le dipôle comme étant un condensateur de capacité  $C_3 = \frac{C_1}{|G_0|}$ .

44. On a  $S_2(\omega) = (G_0 - 1)S_1 = \frac{1 - G_0}{C_1 \omega}$  avec  $1 - G_0 > 0$ . Sur le graphique, il faut rechercher les pulsations qui assurent  $S_2 > 0$ . Cela se produit clairement pour une pulsation  $\omega = \omega_p$ . Avec l'agrandissement proposé, on voit que  $S_2(\omega) > 0$  pour  $\omega \in [0, 999\omega_p; \omega_p]$ . On a donc  $\frac{\Delta\omega}{\omega_p} = 10^{-3}$ .

45. Pour obtenir une impédance imaginaire positive, on peut effectivement penser à une bobine avec  $Z_2 = jL_2\omega$ . La courbe  $S_2(\omega)$  serait affine avec la pulsation et toujours positive. Avec le quartz piézoélectrique, on a une courbe très piquée pour  $\omega_p$  avec  $\Delta\omega \ll \omega_p$ . Si l'on utilise une bobine, on aura clairement un problème d'encombrement qui posera de sérieux soucis pour miniaturiser l'oscillateur à quartz.