

Corrigé du devoir "mixte"

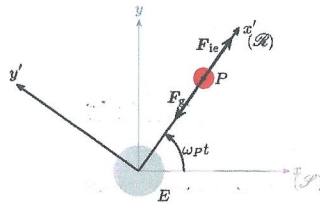
Mécanique / OEM / Thermodynamique

Problème I : Détection des exoplanètes (MINES MP 2016)

I.- Fascinantes exoplanètes

I.A. - Une loi fondamentale

Q1- Dans le référentiel \mathcal{S} , dit *stellocentrique*, dont l'origine est le centre de l'étoile E et dont les axes pointent vers des étoiles lointaines, la planète P décrit une orbite circulaire à vitesse uniforme sous l'effet de la force F_g d'attraction gravitationnelle, centripète. Dans le référentiel \mathcal{R} dont l'origine est aussi le centre de E mais dont un axe est en permanence dirigé vers P , la planète est fixe mais, outre F_g , elle subit la force d'inertie d'entraînement F_{ie} , centrifuge.



L'équilibre est dû à l'exacte compensation de la force gravitationnelle par la force centrifuge qui s'écrit

$$-\frac{\mathcal{G}M_E M_P}{r_P^2} + M_P \omega_P^2 r_P = 0 \quad \text{où} \quad \omega_P = \frac{2\pi}{T_P}$$

On en tire la 3^e loi de KEPLER

$$\frac{r_P^3}{T_P^2} = \frac{\mathcal{G}M_E}{4\pi^2} \quad (1)$$

I.B. - Principales caractéristiques de la planète

Q2- Pour une orbite de rayon $r = 5,1 \times 10^6$ m et de période $T = 7200$ s, la formule (1) donne

$$M_P = \frac{4\pi^2 r^3}{\mathcal{G}T^2} = 1,5 \times 10^{24} \text{ kg.}$$

La masse M_P de la planète est donc égale au quart de la masse terrestre M_T . Si les structures internes étaient identiques ou comparables, la répartition de masse dans la planète serait obtenue simplement à partir de celle de la Terre par une homothétie de rapport R_P/R_T , de sorte que la masse de la planète devrait vérifier

$$\frac{M_P}{M_T} = \left(\frac{R_P}{R_T}\right)^3 \approx 0,5$$

1/8

ce qui n'est pas le cas.

On peut calculer la densité moyenne d du système manteau-croûte de la Terre en écrivant

$$M_T = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{R_T}{2}\right)^3 d_{\text{cœur}} \rho_0 + \frac{4\pi}{3} \left(R_T^3 - \left(\frac{R_T}{2}\right)^3\right) d \rho_0$$

où $d_{\text{cœur}} = 10$ et $\rho_0 = 1000 \text{ kg/m}^3$. On en tire

$$\frac{3M_T}{4\pi\rho_0} = \frac{R_T^3}{8} d_{\text{cœur}} + \frac{7R_T^3}{8} d \quad \text{soit} \quad d = \frac{6M_T}{7\pi\rho_0 R_T^3} - \frac{d_{\text{cœur}}}{7} \approx 5.$$

Pour la planète de même structure, on aurait

$$d' = \frac{6M_P}{7\pi\rho_0 R_P^3} - \frac{d_{\text{cœur}}}{7} \approx 2;$$

elle serait donc constituée essentiellement de métaux très légers si son noyau est ferreux comme celui de la Terre.

Q3- Pour une répartition sphérique de masse où la masse volumique $\rho(r)$ ne dépend que de la distance au centre, le champ gravitationnel est radial, $\mathbf{g} = -g(r)\mathbf{u}_r$, et le théorème de GAUSS appliqué à une sphère S_r de rayon r s'écrit

$$\oiint_{S_r} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{S} = -4\pi r^2 g(r) = -4\pi \mathcal{G} M_{\text{int}}(r)$$

où $M_{\text{int}}(r)$ est la masse intérieure à S_r . On peut réécrire ce résultat sous la forme

$$\mathbf{g} = -\frac{\mathcal{G} M_{\text{int}}(r)}{r^2} \mathbf{u}_r.$$

À la surface de la planète, on obtient

$$g_0 = \frac{\mathcal{G} M_P}{R_P^2} \approx 4 \text{ m/s}^2.$$

Q4- Le champ de pesanteur est la conjugaison du champ gravitationnel et des forces d'inertie dues à la rotation de la planète (et éventuellement des effets de sa non-sphéricité). La force d'inertie est nulle aux pôles géographiques et elle est centrifuge de module $\Omega_P^2 R_P$ à l'équateur, où $\Omega_P = 2\pi/T_P$.

Numériquement, $g_{\text{pôle}} - g_{\text{équateur}} = 4 \times 10^{-2} \text{ m/s}^2$ soit une variation d'environ 1%.

Les expériences d'exploitation vidéo sont en général précises à quelques % près donc peu susceptibles de permettre la discrimination entre ces valeurs. Les autres dispositifs sont multiples (gravimètre à chute libre, gravimètre à ressort, etc.)

Q5- L'énergie potentielle de gravitation d'un corps de masse m est $U(r) = -\frac{\mathcal{G}M_P m}{r}$; si la vitesse v au niveau de la surface de la planète permet au corps d'atteindre l'infini à vitesse nulle, on doit avoir

$$\frac{1}{2} m v^2 + U(R_P) = 0 \quad \text{soit} \quad v = \sqrt{\frac{2\mathcal{G}M_P}{R_P}} = 6,4 \text{ km/s.}$$

Q6- Un gaz vérifiant $v_{z,\text{moy}} \approx v_l$ ne pourra pas être retenu dans l'atmosphère de la planète; en supposant une équirépartition de l'énergie cinétique selon les trois axes x, y et z (isotropie), on aura

$$\langle v_z^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle v^2 \rangle \quad \text{soit} \quad v_{z,\text{moy}} \approx \frac{\sigma_v}{\sqrt{3}} \approx \frac{1,25}{\sqrt{3}} v_{\text{pp}} \approx 0,7 v_{\text{pp}}.$$

2/8

Un gaz sera donc maintenu dans l'atmosphère de la planète si $v_{pp} \ll 1,4v_1 \approx 8,8 \text{ km/s}$. Si on impose donc $v_{pp} > 900 \text{ m/s}$, on voit que la planète peut retenir une atmosphère à base de diazote (28 g/mol) ou de dioxygène (32 g/mol).

□7- En appliquant le théorème d'équirépartition de l'énergie, on peut affirmer que la somme des énergies cinétiques de translation des molécules de dioxygène vérifie, pour une mole,

$$\frac{N_A}{2} m \bar{v}^2 = \frac{1}{2} M \bar{v}^2 = \frac{3}{2} RT \quad \text{soit} \quad \bar{v} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = 475 \text{ m/s.}$$

La vitesse la plus probable est alors 380 m/s, en accord avec le pic de la distribution correspondante.

I.C. - Détection d'une exoplanète depuis la Terre

□8- La distance entre le Soleil et 51-Pégase est $L = 4 \times 10^{17} \text{ m}$; à cette distance, la distance Soleil-Jupiter est vue sous un angle $\alpha = a_J/L = 2 \times 10^{-6} \text{ rad}$. Il est alors possible de séparer les deux corps pour des longueurs d'ondes telles que

$$\alpha > \frac{1,2\lambda}{d} \quad \text{soit} \quad \lambda < 3 \mu\text{m.}$$

Ainsi, un tel télescope pourra-t-il séparer le Soleil et Jupiter dans le domaine visible.

Le principal obstacle à l'observation directe est l'absence de luminosité propre des exoplanètes. Une planète éloignée (comme Jupiter) de son étoile aura une luminosité si faible qu'elle sera invisible à un observateur distant de plusieurs années-lumière; une planète plus brillante car proche de son étoile (comme Vénus, mais qui reste tout de même 700 000 fois moins lumineuse que le Soleil) sera, elle, noyée dans la luminosité de son étoile.

□9- La vitesse radiale de E par rapport à la Terre est

$$v_r = v_G - v \sin \theta.$$

Elle est toujours positive puisque $v_G > v$. On en tire

$$|\Delta f|_{\max} = \frac{f(v_G + v)}{c} \quad \text{et} \quad |\Delta f|_{\min} = \frac{f(v_G - v)}{c}$$

d'où

$$\delta f = \frac{fv}{c}$$

□10- En fait

$$f_{\text{mesurée}} = f_{\text{émise}} \left(1 - \frac{v_r}{c}\right) = f_{\text{émise}} - f_{\text{émise}} \frac{v_G}{c} + \frac{f_{\text{émise}} v}{c} \cos \theta$$

où $\theta = \theta_0 + \omega t$ avec $\omega = 2\pi/T$. Ainsi la fréquence mesurée varie-t-elle sinusoidalement autour d'une valeur moyenne avec la même période que le mouvement orbital du système planétaire observé. Le suivi de la mesure de $f(t)$ permet donc de remonter à la valeur de la période T .

Pour que la mesure soit « possible », il faut que la vitesse de rotation (liée à l'amplitude des variations de f) de l'étoile soit assez grande, ce qui explique que les premières exoplanètes détectées sont des planètes très massives (pour que G soit assez éloigné de E) et très proches de leur étoile (pour que la période soit assez faible).

Le périmètre $2\pi GE$ est parcouru sur une durée T , donc

$$v = \frac{2\pi GE}{T} \quad \text{ou encore} \quad GE = \frac{cT\delta f}{2\pi f}$$

□11- Puisque $M_E GE = M_P GP$ (G est le centre de masse), on a $(M_E + M_P)GE = M_P(GP + GE) = M_P PE$ et, avec (1), $4\pi^2 PE^3 = \mathcal{G}(M_P + M_E)T^2$. Lorsque $M_E \gg M_P$, ces deux relations deviennent

$$PE = \sqrt[3]{\frac{\mathcal{G}M_E T^2}{4\pi^2}} \quad \text{et} \quad M_P = M_E \frac{GE}{PE}$$

□12- Par (1), la période orbitale de Jupiter est

$$T_J = 2\pi \sqrt{\frac{a_J^3}{\mathcal{G}M_S}}$$

de sorte que sa vitesse orbitale vaut

$$v_J = \frac{2\pi a_J}{T_J} = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_S}{a_J}} = 13 \text{ km/s.}$$

Le décalage relatif en fréquence à mesurer sera

$$\frac{\delta f}{f} = \frac{v_J}{c} = 4,4 \times 10^{-5}.$$

À titre d'information, le décalage relatif en fréquence mesuré pour 51-Pegasi était d'environ $7,5 \times 10^{-5}$.

Problème II: Pompe à chaleur géothermique (CCP 2014)

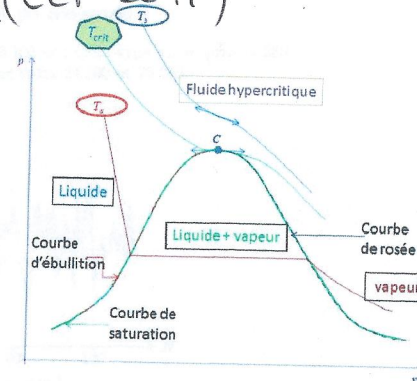
IV.1. diagramme de Clapeyron (voire figure)

IV.2. a) $l_v(T) = h_v(T) - h_l(T)$.

b) $c_p = \frac{\gamma R}{M(\gamma - 1)}$.

c) pour un GP, $dh = c_p dT \Rightarrow h(T) = \frac{\gamma R}{M(\gamma - 1)} T + cst$.

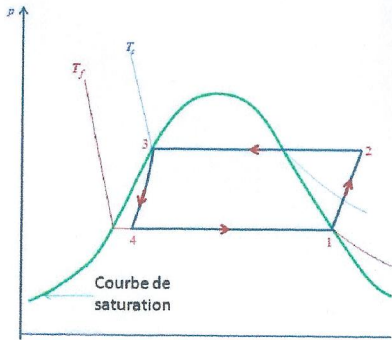
IV.3. a) $w > 0$, $q_c < 0$ et $q_f > 0$. $e = \frac{q_c}{w}$. $1 < e < e_c$ (1^{er} et 2^{ème} principe).



b) $e = \frac{q_c}{w} = \frac{q_c}{q_f + q_c} = \frac{1}{1 + (q_f/q_c)}$ et d'après le 2^{ème} principe : $\frac{q_f}{T_f} + \frac{q_c}{T_c} + s_c = 0$ ($iq s_c \geq 0$) $\Rightarrow \frac{q_f}{q_c} = \frac{T_f}{T_c}$

d'où : $e = \frac{1}{1 + \frac{T_f}{T_c} \frac{s_c}{q_c}} = \frac{1}{1 + \frac{T_f}{T_c} \frac{T_c - T_f}{T_c}} = e_c$. $e = e_c \Rightarrow s_c = 0$: c'est le cas d'un cycle totalement réversible

IV.4. a) cycle thermodynamique (voir figure)



b) $q_c = q_{2 \rightarrow 3}$, $q_f = q_{4 \rightarrow 1}$

c) au cours de 2 \rightarrow 3 : c'est l'air intérieur à la maison de température T_c qui joue le rôle de thermostat.

IV.5. a) sur le diagramme de Clapeyron, w est représenté par l'aire du cycle.

b) en augmentant T_f à T_c constante, l'aire du cycle, donc w , diminue sans que q_c change. L'efficacité e va donc augmenter.

c) pour une PAC sur aquifère, la température de l'eau glycolée est relativement élevée par rapport à celle de l'air ambiant d'hiver. Elle est donc plus efficace qu'une PAC air-air.

IV.6. a) 1 \rightarrow 2 est une compression isentropique de gaz parfait, donc d'après la loi de Laplace :

$T_1 p_1^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_2 p_2^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \Rightarrow T_2 = T_f \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}$. $T_1 = T_f \cdot p_1 = p_{sat}(T_f) = p_f \cdot p_2 = p_c$. AN : $T_2 \# 335K$

b) $q_c = h_v(T_c) - h_v(T_2) - l_v(T_c) = \frac{\gamma R}{M(\gamma-1)}(T_c - T_2) - l_v(T_c)$. AN : $q_c \# 158 kJ.kg^{-1}$

c) enthalpie massique de changement d'état : $l_v(T_c) = h_v(T_c) - h_l(T_c) \# 151 kJ.kg^{-1}$

Enthalpie massique de surchauffe : $\frac{\gamma R}{M(\gamma-1)}(T_2 - T_c) \# 6,52 kJ.kg^{-1}$ plus faible que l_v

C/C : q_c est due principalement au changement d'état du gaz.

IV.7. a) la détente de Joule Kelvin est isenthalpique. Au cours de 3 \rightarrow 4 h se conserve.

b) $h_4 = x h_v(T_f) + (1-x) h_l(T_f) = h_l(T_c) \Rightarrow x = \frac{h_l(T_c) - h_l(T_f)}{h_v(T_f) - h_l(T_f)}$. AN : $x \# 0,272$

IV.8. $q_f = h_v(T_f) - h_4 = (1-x)[h_v(T_f) - h_l(T_f)]$. soit : $q_f = (1-x) l_v(T_f)$. AN : $q_f \# 135 kJ.kg^{-1}$

IV.9. $w = -q_f - q_c = h_2 - h_1 = \frac{\gamma R}{M(\gamma-1)}(T_2 - T_f)$. AN : $w \# 25,2 kJ.kg^{-1}$

IV.10. a) $e = \frac{q_c}{w} = 1 + \frac{q_f}{w} = 1 + \frac{(1-x)[h_v(T_f) - h_l(T_f)]}{\frac{\gamma R}{M(\gamma-1)}(T_2 - T_f)} = 1 + \frac{h_v(T_f) - h_l(T_c)}{\frac{\gamma R}{M(\gamma-1)}(T_2 - T_f)}$. AN : $e \# 6,36$

b) $e_c = \frac{T_c}{T_c - T_f}$. AN : $e_c \# 9,23$. $e < e_c$

Il y a irréversibilité lors de la détente du gaz. Elle est due aux frottements et à la diffusion du fluide.

Electromagnetisme : GSM 4G (CCP 2014)

©

Partie III : propagation dans l'air

III.1.1 $\text{div } \vec{B} = 0$ $\nabla \cdot \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$
 $\text{div } \vec{E} = 0$ $\nabla \cdot \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

III.1.2 $\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\Delta \vec{E} = \nabla \times \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$
 $\Delta \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$ $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$

III.1.3 a) $\vec{k} = k \vec{e}_z$ (propagation)
 $\vec{E}_m = E_m \vec{e}_x$ (polarisation)

III.1.3 b) $\text{grad} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z$
 $\vec{k} \cdot \text{grad} = k \frac{\partial}{\partial z}$

donc $\vec{E}(M,t) = E_m e^{j(kz - \omega t)} \vec{e}_x$

III.1.3 c) $\Delta \vec{E} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = -k^2 E_m e^{j(kz - \omega t)} \vec{e}_x = -k^2 \vec{E}(M,t)$
 $\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 E_m e^{j(kz - \omega t)} \vec{e}_x = -\omega^2 \vec{E}(M,t)$

III.1.3 d) relation de dispersion : $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$

III.1.4 pour une onde $\vec{E}(M,t) = \vec{k} \wedge \frac{1}{\omega} \frac{\partial \vec{B}(M,t)}{\partial t}$
 $\vec{B}(M,t) = \frac{1}{c} E_m e^{j(kz - \omega t)} \vec{e}_y$

III.1.5 si $E_m = E_m e^{j\varphi}$
 $\vec{E}(M,t) = E_m e^{j(kz - \omega t + \varphi)} \vec{e}_x$
 donc $\vec{E}(M,t) = E_m \cos(kz - \omega t + \varphi) \vec{e}_x$
 $\vec{B}(M,t) = \frac{E_m}{c} \cos(kz - \omega t + \varphi) \vec{e}_y$

III 2. Puissance et rayonnement

III 2.1 $R(z,t) = \frac{E \cdot B}{\mu_0}$ dimension: $W \cdot m^{-2}$

III 2.2 $\vec{A}(z,t) = \frac{E_{mi}}{\mu_0 c} \cos(kz - \omega t + \varphi) \vec{e}_y$

$\langle R \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_{mi}^2 \rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$

III 2.3 $4\pi d^2 \langle R \rangle = P_0 \cdot G$

donc $4\pi d^2 \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_{mi}^2 = P_0 \cdot G \rightarrow E_{mi} = \left(\frac{P_0 G}{2\pi d^2 \epsilon_0 c} \right)^{1/2}$

III 3. Exposition

III 3.1 $E_{m1} = \left(\frac{50 \cdot 63 \cdot 3 \cdot 10^9}{2 \cdot \pi \cdot (100)^2 \cdot 3 \cdot 10^8} \right)^{1/2} \approx 4,2 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$

c'est bon pour les 2 usages.

III 3.2 $E_{m2} = \left(\frac{50 \cdot 2 \cdot 36 \pi \cdot 10^9}{2 \cdot \pi \cdot 10^2 \cdot 3 \cdot 10^8} \right)^{1/2} = 6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$

Partie IV: Réflexion d'une onde par un mur de béton

IV 1. Expressions des champs

air | métal parfait

IV 1.1 $\vec{E}_i(z,t) = E_{mi} e^{j(kz - \omega t)} \vec{e}_x$
 $\vec{B}_i(z,t) = \frac{E_{mi}}{c} e^{j(kz - \omega t)} \vec{e}_y$

IV 1.2 $\vec{E}_r(z,t) = E_{mr} e^{-j(kz + \omega t)} \vec{e}_x$
 $\vec{B}_r(z,t) = -\frac{E_{mr}}{c} e^{-j(kz + \omega t)} \vec{e}_y$

IV 1.3 Dans un métal parfait $\vec{E} = \vec{0}$, $\vec{B} = \vec{0}$
 donc $\vec{E}_d(z,t) = \vec{0}$, $\vec{B}_d(z,t) = \vec{0}$

IV 1.4 La composante tangentielle du champ \vec{E} et ce à l'interface

IV 1.5 en $z=0$ on a $\vec{E}_i(0,t) + \vec{E}_r(0,t) = \vec{0}$
 $E_{mi} e^{j\omega t} + E_{mr} e^{-j\omega t} = 0$
 d'où $E_{mi} = -E_{mr}$ $r = -1$

IV 2. Champ total et ondes stationnaires

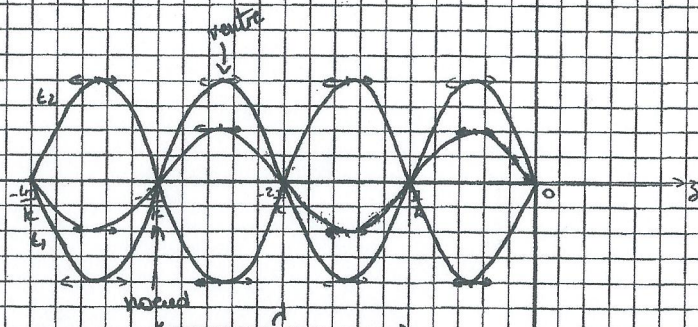
IV 2.1 $\vec{E}_{total} = \vec{E}_i + \vec{E}_r$
 $= E_{mi} \left(e^{j(kz - \omega t)} - e^{-j(kz + \omega t)} \right) \vec{e}_x$
 $= E_{mi} e^{-j\omega t} (e^{jkz} - e^{-jkz}) \vec{e}_x$
 $= 2j E_{mi} \sin(kz) e^{j\omega t} \vec{e}_x$

le champ réel est donc: $R_{e}(\vec{E}_{total})$

$\vec{E}_{total} = 2 E_{mi} \sin(kz) \sin(\omega t) \vec{e}_x$

IV 2.2 c'est une onde stationnaire, qui s'annule pour $z=0$

IV 2.3 + 4



IV 2.5 $d_{n\&e} = \frac{\lambda}{4}$ entre un nœud et un ventre consécutifs!

IV 3 $\vec{E}_i = E_{mi} e^{j(kz - \omega t)} \vec{e}_x$
 $\vec{E}_r = r e^{j\omega t} E_{mi} e^{-j(kz + \omega t)} \vec{e}_x = r e^{j(\omega t - 2kz)} \vec{e}_x$

d'où $\vec{E}_{total} = \left[1 + r e^{j(\omega t - 2kz)} \right] \vec{E}_i$

IV 4 $\|\vec{E}_{total}\| = |r(z)| \times E_{mi} = \sqrt{1 + r^2 + 2r \cos(\omega t - 2kz)} \times E_{mi}$
 $\|\vec{E}_{total}\|_{max} = E_{mi} (1+r)$
 $\|\vec{E}_{total}\|_{min} = E_{mi} (1-r)$

$\rho = \left(\frac{1+r}{1-r} \right)^2$