

Correction de l'épreuve de modélisation CCINP PSI (2019)

Vous pouvez envoyer vos remarques à Fabien PAUCHET (fab.pauchet@wanadoo.fr) et Gaudeline WAGNER (gaudeline.wagner@ac-lille.fr)

Partie I - Quel rapport entre masse et autonomie ?

Q1.

- Loin de l'hélice, l'air est supposé être au repos (absence de vent), d'où le choix d'une vitesse nulle à l'entrée du tube de courant. Par ailleurs, ceci est confirmé par un tube de courant de grande section « loin » au-dessus de l'hélice.
- L'énoncé précise déjà que l'écoulement est incompressible et homogène, pour annuler la puissance des actions internes il faut en plus supposer l'écoulement parfait.
- Le choix des ordres de grandeurs est délicat... Je choisis : $v_s = 10 \text{ m.s}^{-1}$ et $z_s - z_e = 1 \text{ m}$
D'où $\Delta e_c \approx \frac{1}{2} v_s^2 \approx 50 \text{ J.kg}^{-1}$ et $\Delta e_p = g(z_s - z_e) \approx 9,8 \text{ J.kg}^{-1}$ ainsi $\frac{\Delta e_p}{\Delta e_c} \approx 0,2$
Ceci est limite pour réaliser l'approximation demandée...

Q2.

Système ouvert : la portion de tube de courant représenté sur la figure 3

La relation 1 donne directement : $P_m = \frac{1}{2} D_m v_s^2$

Les actions extérieures appliquées au système sont :

\vec{F} force exercée par l'hélice sur l'air

$\vec{F}_p = \vec{0}$ résultante des forces de pression qui est nulle car la pression est uniforme sur la frontière du système

Poids négligé

Alors la relation 2 donne : $D_m v_s = F$

Or par définition de la puissance d'une force, on a : $P_m = F.v_h$

D'où les relations précédentes donnent : $\frac{1}{2} D_m v_s^2 = D_m v_s v_h \Leftrightarrow v_h = \frac{v_s}{2}$

Q3.

Par définition du débit massique, on a : $D_m = \rho S v_h = \frac{1}{2} \rho S v_s$ d'où $F = \frac{1}{2} \rho S v_s^2 \Leftrightarrow v_s = \sqrt{\frac{2F}{\rho S}}$

Ainsi $P_m = \frac{1}{2} D_m v_s^2 = \frac{1}{4} \rho S v_s^3 = \frac{1}{4} \rho S \left(\frac{2F}{\rho S}\right)^{3/2} \Leftrightarrow P_m = \frac{1}{\sqrt{2\rho S}} F^{3/2}$

D'après le principe des actions réciproques, on a : $\vec{\Pi} = -\vec{F} = -F\vec{z} = -(\sqrt{2\rho S} P_m)^{2/3} \vec{z}$

Q4.

Système : {drone + cordon}

Bilan des forces :

• $-\vec{F}_c$ avec $M_{G_{z_0}}(-\vec{F}_c) = (\vec{GM} \wedge (-\vec{F}_c)).\vec{z}_0 = -F_c.GM.\cos\alpha$

• $\vec{\Pi}$ avec $M_{G_{z_0}}(\vec{\Pi}) = (\vec{GM} \wedge \vec{\Pi}).\vec{z}_0 = \Pi.GM$

• Poids du drone de moment nul par rapport à (G_{z_0}) et on néglige le poids du cordon.

• Réaction de la tige de moment nulle également si on suppose la liaison pivot parfaite.

Sachant que le drone est immobile, le théorème du moment cinétique donne : $\vec{\Pi} = F_c \cos\alpha$

Q5.

D'après Q4, dans le cas où $\alpha \ll 1$, alors on a : $\Pi = F_c \left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right)$

Si on considère $\Pi_{\text{mesurée}} = F_c$ alors on commet l'erreur relative suivante : $\varepsilon = \left| \frac{\Pi_{\text{mesurée}} - \Pi}{\Pi_{\text{mesurée}}} \right| = \frac{\alpha^2}{2}$

Dans le cas où $\alpha < 5^\circ = 9.10^{-2} \text{ rad}$ alors $\varepsilon < 0,4 \%$ \Rightarrow le protocole expérimental est donc validé.

Q6.

D'après la figure 5, l'ensemble des points de mesure se positionne sur une droite moyenne dont l'équation est la suivante :

$$\ln P_e = q \ln \Pi + \beta \Leftrightarrow P_e = e^\beta \Pi^q = k \Pi^q \quad \text{en posant } k = e^\beta$$

Graphiquement on détermine : $q = 1,3$ et $\beta = 2,3 \Leftrightarrow k = 10 \text{ uSI}$

A la question Q3, on a trouvé $q = 1,5$, l'écart est principalement dû au fait que le rendement des moteurs ne valant pas 100 %, on a : $P_m \neq P_e$. Par ailleurs, à cause de la proximité avec le sol (ou la table sur laquelle est posée la maquette), le tube de courant n'a pas la forme de celui représenté en figure 3.

Q7.

En vol stationnaire (drone immobile) le principe fondamental de la dynamique appliqué au drone et projeté sur la verticale ascendante conduit à :

$$4 \cdot \Pi - mg = 0 \Leftrightarrow \boxed{\Pi = \frac{mg}{4}} \quad \text{attention : il y a 4 hélices}$$

D'où l'expression de la puissance électrique consommée par un moteur : $P_e = k \left(\frac{mg}{4}\right)^q$

Puis la puissance consommée par l'ensemble des 4 moteurs : $\boxed{P_{stat} = 4P_e = 4k \left(\frac{mg}{4}\right)^q}$

Enfin l'énergie électrique consommée par le drone durant toute la durée d'utilisation de la batterie s'écrit :

$$W_{elec} = Ui\Delta t = UQ \quad \text{et} \quad W_{elec} = P_{stat} \Delta t$$

D'où l'autonomie de la batterie vaut : $\boxed{\Delta t = \frac{UQ}{P_{stat}}}$

AN : $P_{stat} = 49,5 \text{ W}$ et $\boxed{\Delta t = 36 \text{ min}}$

Remarque : Cette valeur d'autonomie est supérieure à celle donnée en introduction du sujet (p.2) cela est sûrement dû au fait que l'on est en régime stationnaire or les phases de décollage ou de déplacements ascendant / horizontal du drone consomment davantage d'énergie.

Partie II – Peut-on se passer de la nacelle motorisée ?

Q8.

Les vis étant rigides, les mouvements longitudinal et transversal ne sont pas permis ainsi que le mouvement de lacet. En effet si ces mouvements avaient lieu les vis devraient se déformer ce qui n'est pas possible.

Ainsi il y a 3 degrés de liberté entre le tube T et la structure étoilée, en effet les mouvements permis sont :

- Mouvement vertical (ou de pompage)
- Mouvement de galop (ou de tangage)
- Mouvement de roulis

Q9.

D'après la figure 11 et la référence du plot amortisseur choisi, on lit : $H = 42 \text{ mm}$ et $h = 25 \text{ mm}$ et la charge statique axiale maximale $F_{max} = 2,50 \text{ daN} = 25,0 \text{ N}$

D'où la course atteinte sous charge maximale vaut : $\boxed{H - h = 17 \text{ mm}}$

Et la constante de raideur d'un plot amortisseur : $\boxed{k = \frac{F_{max}}{H-h} = 1,5 \cdot 10^3 \text{ N/m}}$

Q10.

On a : $\boxed{K = 4k = 6,0 \text{ kN/m}}$ et $\boxed{C = 4c = 4,0 \text{ kg/s}}$

Q11.

Système : {tube T}

Bilan des forces :

- Poids : $\vec{P} = M\vec{g} = -Mg\vec{z}$
- Force de rappel du ressort : $\vec{F}_{elas} = -K(z_0 - l_0)\vec{z}$

Le PFD à l'équilibre projeté sur \vec{z} donne : $-K(z_0 - l_0) - Mg = 0 \Leftrightarrow \boxed{z_0 = l_0 - \frac{Mg}{K}}$

Q12.

Idem Q11 mais cette fois ci le tube T est en mouvement. Il faut donc tenir compte en plus :

- de la force d'excitation : $\vec{f}(t) = f(t)\vec{z}$
- de l'amortissement : $\vec{F}_{frott} = -C\dot{z}\vec{z}$

Le PFD projeté sur \vec{z} donne :

$$f(t) - K(z_0 + z(t) - l_0) - C\dot{z} - Mg = M\ddot{z}$$

En utilisant la relation à l'équilibre écrite en Q11 et en mettant en forme l'équation, on obtient l'équation demandée :

$$\boxed{M\ddot{z} + C\dot{z} + Kz(t) = f(t)}$$

Q13.

En réalisant la transformée de Laplace de l'équation précédente, on obtient :

$$MZ(p)p^2 + CZ(p)p + KZ(p) = F(p) \Leftrightarrow (Mp^2 + Cp + K)Z(p) = F(p)$$

D'où la fonction transfert demandée mise sous forme canonique :

$$T(p) = \frac{Z(p)}{F(p)} = \frac{1}{Mp^2 + Cp + K} \Leftrightarrow T(p) = \frac{\frac{1}{K}}{1 + \frac{C}{K}p + \frac{M}{K}p^2} = \frac{\frac{1}{K}}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{1}{\omega_0^2}p^2}$$

Avec : $\frac{1}{\omega_0^2} = \frac{M}{K} \Leftrightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{M}}$ et $\frac{2\xi}{\omega_0} = \frac{C}{K} \Leftrightarrow \xi = \frac{C}{2K}\omega_0 \Leftrightarrow \xi = \frac{C}{2\sqrt{KM}}$

Q14.

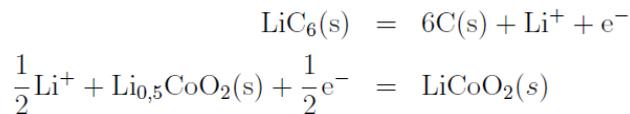
AN : $\xi = 4,7 \cdot 10^{-2} \ll 1$ d'où on a $\omega_r \approx \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{M}}$

Conclusion : l'amortissement n'a quasiment aucune influence sur la pulsation de résonance. Les seuls paramètres permettant d'ajuster la valeur de ω_r sont K et M .

Les questions 15 à 23 sont en lien avec le cours de SII.

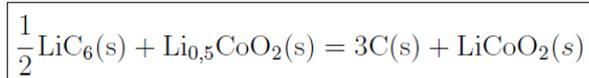
Partie III : Comment alléger la batterie ?

24. D'après l'énoncé, on passe, lors de la décharge, de $\text{Li}_{0,5}\text{CoO}_2$ à LiCoO_2 . Les demi-équations électroniques s'écrivent donc pour la décharge :

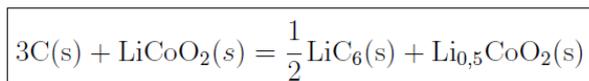


En sommant les demi-équations électroniques, on obtient alors :

– pour la décharge :



– pour la charge, la réaction inverse :



25. Les réactifs sont présents en proportions stoechiométriques afin qu'il n'y ait pas de réactif en excès non utilisé, ce qui occasionnerait une masse supplémentaire inutile.

Masse des réactifs :

$$\begin{aligned} n(\text{LiC}_6) &= n_{\text{e}^-} = n \\ n(\text{Li}_{0,5}\text{CoO}_2) &= 2n(\text{LiC}_6) = 2n \end{aligned}$$

On a donc une masse de réactifs :

$$m_{\text{accu}} = n \cdot M(\text{LiC}_6) + 2n \cdot M(\text{Li}_{0,5}\text{CoO}_2) = n [2 \cdot M(\text{Li}) + 6 \cdot M(\text{C}) + 2 \cdot M(\text{CoO}_2)]$$

26. Capacité massique maximale :

$$q_{\text{max}} = \frac{Q_{\text{max}}}{m_{\text{accu}}} = \frac{n \mathcal{F}}{n [2 \cdot M(\text{Li}) + 6 \cdot M(\text{C}) + 2 \cdot M(\text{CoO}_2)]}$$

soit

$$q_{\max} = \frac{\mathcal{F}}{[2.M(\text{Li}) + 6.M(\text{C}) + 2.M(\text{CoO}_2)]}$$

A.N. : $q_{\max} = 3,6.10^5 \text{ C.kg}^{-1} = 1,0.10^2 \text{ A.h.kg}^{-1}$

Énergie massique :

$$w_{\max} = \frac{W_{\max}}{m_{\text{accu}}} = q_{\max} \cdot E$$

A.N. : $w_{\max} = 1,3.10^6 \text{ J.kg}^{-1} = 3,7.10^2 \text{ W.h.kg}^{-1}$

27. La tension imposée par la batterie est trois fois plus grande que celle aux bornes d'un seul accumulateur. Ainsi, la batterie est constituée de trois accumulateurs en série.

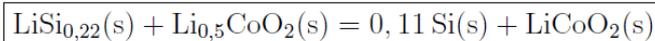
La capacité massique d'un accumulateur est : $q = \frac{Q}{m}$ soit $q = 15 \text{ A.h.kg}^{-1}$. On trouve une capacité sept fois plus faible que q_{\max} .

Pour se rapprocher de cette capacité maximale, il faudrait que la masse de l'accumulateur se rapproche de la masse des réactifs, présents en proportions stoechiométriques. Il faut donc minimiser la masse de l'enveloppe de la batterie.

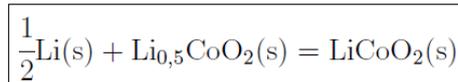
Par ailleurs, certaines réactions parasites ont peut-être lieu, minimisant ainsi la charge utile que peut débiter l'accumulateur. Il faut donc éviter au maximum ces réactions parasites afin de se rapprocher de la capacité massique maximale.

28. Les réactions globales de décharge s'écrivent :

– avec une anode en silicium :



– avec une anode en lithium :



On a alors les capacités massiques maximales :

$$q_{\max}(\text{Si}) = \frac{\mathcal{F}}{[2.M(\text{Li}) + 0,11.M(\text{Si}) + 2.M(\text{CoO}_2)]}$$
$$q_{\max}(\text{Li}) = \frac{\mathcal{F}}{[2.M(\text{Li}) + 2.M(\text{CoO}_2)]}$$

ce qui donne, numériquement, $q_{\max}(\text{Si}) = 1,3.10^2 \text{ A.h.kg}^{-1}$ et $q_{\max}(\text{Li}) = 1,4.10^2 \text{ A.h.kg}^{-1}$

Les anodes en silicium ou en lithium pur sont plus légères donc permettent d'augmenter la capacité massique de la batterie.

Partie IV : Peut-on se passer de batterie ?

29. – La résistance R est liée à l'effet Joule qui se produit dans le conducteur du fait du déplacement des porteurs de charge.
- L'inductance propre L est liée à l'induction propre qui se produit à travers les spires de la bobine. En effet, la bobine, parcourue par un courant variable, crée un champ magnétique variable donc le flux à travers la bobine est variable.
 - La capacité C est liée à l'existence d'"armatures" chargées se faisant face (les spires de la bobine), comme dans un condensateur.
30. En modélisation la bobine avec le modèle (b), on obtient l'équation différentielle suivante :

$$(R_g + R + R_c)i + L \frac{di}{dt} = e(t)$$

En prenant $e(t) = E$ (pendant la demi-période où le signal créneau est positif), on a :

$$\frac{di}{dt} + \frac{R_{tot}}{L} i = \frac{E}{L} \quad \text{avec} \quad R_{tot} = R_g + R + R_c$$

On pose $\tau = \frac{L}{R_{tot}}$ et on obtient : $u_R(t) = R \left(A e^{-t/\tau} + \frac{E}{R_{tot}} \right)$

Or, $i(t = 0^-) = i(t = 0^+) = 0$ par continuité du courant dans la bobine (on pose $t = 0$ l'instant où la tension $e(t)$ passe de 0 à $+E$). Ainsi, on a :

$$u_R(t) = \frac{ER}{R_{tot}} (1 - e^{-t/\tau})$$

On est en présence d'un système d'ordre 1 avec le modèle (b).

Graphiquement, on remarque :

- une pente à l'origine non nulle ;
- l'absence de dépassement ;
- l'absence d'oscillations.

Ces différentes observations confirment que le système étudié est d'ordre 1. Le modèle (b) est donc cohérent avec la réponse observée.

Valeur de l'inductance L :

Afin de déterminer L , on détermine d'abord τ graphiquement. Pour cela, on trace la tangente à l'origine (l'origine étant l'instant où $e(t)$ passe de 0 à $+E$) et on mesure le temps t_{inter} pour lequel elle coupe l'asymptote $u_R = u_{R,\infty}$.

On a alors : $\tau = t_{inter} - t_{initial} = 7,6 \cdot 10^{-3}$ ms.

On trouve ensuite $L = \tau R_{tot}$ $L = 8,0$ mH. Cette valeur semble cohérente pour une bobine de ce type.

31. Le modèle (a) donne $|Z| = R$. Il reste valide tant que $|Z|$ est indépendant de la fréquence. On voit sur la figure 24 que $|Z|$ reste constante jusqu'à environ $f_{max,1} = 1 \cdot 10^2$ Hz.

Le modèle (b) donne $|Z| = \sqrt{R^2 + (2\pi fL)^2}$ soit $\ln(|Z|) = \frac{1}{2} \ln(R^2 + (2\pi fL)^2)$.

Si on s'intéresse aux fréquences supérieures à 1 kHz, on a $R^2 \ll (2\pi fL)^2$ avec les valeurs de R et L dont on dispose. On pourra donc faire la simplification suivante :

$$\ln(|Z|) \simeq \frac{1}{2} \ln((2\pi fL)^2) \simeq \ln(2\pi L) + \ln(f)$$

On cherche donc jusqu'à quelle fréquence la courbe de la figure 24 est une droite de pente 1. On voit que ceci est vrai jusqu'à $f_{max,2} \simeq 5.10^4$ Hz.

32. $\underline{Y} = jC\omega + \frac{1}{R + jL\omega} = \frac{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}{R + jL\omega}$ d'où

$$\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{R + jL\omega}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$$

33. On lit graphiquement $f_0 \simeq 1,6.10^5$ Hz. Pour une telle fréquence, on a bien $\underbrace{R}_{6,2\Omega} \ll \underbrace{2\pi fL}_{8.10^3\Omega}$.

On a alors $|Z| = \frac{L\omega}{|1 - LC\omega^2|}$ qui atteint un maximum (infini!) lorsque le dénominateur s'an-

nule. Ainsi, $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ puis $C = \frac{1}{(2\pi f_0)^2 L}$ A.N. : $C = 1,3.10^{-10}$ F = 0,13 nF.

Cette valeur est faible mais c'est logique car une bobine a un faible comportement capacitif.

34. Dans l'Approximation des Régimes Quasi-Stationnaires (ARQS), on néglige le temps de propagation du signal devant sa période soit $\tau_{propagation} \ll T$.

Cela revient à vérifier l'inégalité : $\ell \ll \lambda$ avec ℓ la distance caractéristique de propagation et λ la longueur d'onde du signal.

Ici, $\ell = r_0 \simeq 1$ à 10 m et $\lambda = \frac{c}{f} \simeq 3$ km. On a donc bien $r_0 \ll \lambda$ et on peut donc bien supposer que l'ARQS est vérifiée.

35. Norme du moment magnétique :

Par définition, on a $\mathcal{M}_1 = N_1 S_1 i_1$

Définition de l'inductance mutuelle :

Le flux, à travers le circuit 2, du champ magnétique créé par le circuit 1 s'écrit : $\Phi_{1 \rightarrow 2} = M i_1$.

De même, $\Phi_{2 \rightarrow 1} = M i_2$.

Expression de l'inductance mutuelle :

Calculons le flux de \vec{B}_1 à travers le circuit 2 :

$$\begin{aligned} \Phi_{1 \rightarrow 2} &= \iint_{N_2 \text{ spires}} \vec{B}_1 \cdot d^2\vec{S}_2 \\ &= N_2 \vec{B}_1 \cdot S_2 \vec{u}_z \\ &= N_2 S_2 \frac{\mu_0 \mathcal{M}_1}{4\pi r_0^3} \left(2 \cos \theta_0 \underbrace{\vec{u}_r \cdot \vec{u}_z}_{\cos \theta_0} + \sin \theta \underbrace{\vec{u}_\theta \cdot \vec{u}_z}_{-\sin \theta_0} \right) \\ &= \frac{N_2 S_2 \mu_0 N_1 S_1 i_1}{4\pi r_0^3} (2 \cos^2 \theta_0 - \sin^2 \theta_0) \end{aligned}$$

Par identification, on trouve
$$M = \frac{\mu_0 N_1 N_2 S_1 S_2}{4\pi r_0^3} (2 \cos^2 \theta_0 - \sin^2 \theta_0)$$

L'expression est homogène car μ_0 s'exprime en H.m^{-1} et M en H .

36. Le modèle du champ créé par un dipôle magnétique n'est valable que loin du dipôle, c'est-à-dire pour $r_0 \gg a_1$ où a_1 est le rayon de la spire constituant le dipôle magnétique.

Ici, $a_1 = 10$ cm, donc l'expression du champ n'est pas valable pour des distances inférieures à 1 m. C'est bien ce qu'on observe sur la figure 26.

Pour l'application étudiée, on a $r_0 \sim 1$ à 10 m. Pour ces valeurs de r_0 , l'approximation dipolaire est valable. Le modèle analytique est donc pertinent dans ce cas (on voit sur la figure 26 qu'il est en bon accord avec l'expérience pour $r > 1$ m).

37. On écrit deux lois des mailles :

$$\begin{aligned} \underline{e} &= \left(R_1 + jL_1\omega + \frac{1}{jC_1\omega} \right) \underline{i}_1 + jM\omega \underline{i}_2 \\ 0 &= \left(R_2 + R_c + jL_2\omega + \frac{1}{jC_2\omega} \right) \underline{i}_2 + jM\omega \underline{i}_1 \end{aligned}$$

38. Quand $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}$, on a
$$\underline{i}_2 = \frac{Mj\omega_0 \underline{e}}{M^2\omega_0^2 + R_1(R_2 + R_c)}$$

Puissance transmise à la charge :

$$P = R_c I_{eff}^2 = R_c \frac{(M\omega_0 E_{eff})^2}{(M^2\omega_0^2 + R_1(R_2 + R_c))^2}$$

39. On synthétise les résultats dans le tableau suivant :

r_0 (m)	1	3	10
P_{max} (W)	$1,3 \cdot 10^3$	$2,5 \cdot 10^1$	$2,5 \cdot 10^{-3}$

La puissance d'alimentation en vol stationnaire étant d'environ 50 W (d'après la formule trouvée à la question 7, pour une masse de 500 g), ce dispositif devrait se limiter à des vols à basse altitude (inférieure à 2 m), ce qui paraît inadapté à l'utilisation du drone.

Ce système ne paraît donc pas pertinent pour alimenter un drone.