

Physique modélisation PSI 2021 :
Régulation d'un système de climatisation à débit d'air variable

II Contexte et système étudié

1. Donner deux solutions simples permettant d'améliorer la consommation énergétique d'un bâtiment.

Réponse :

Améliorer l'isolation des murs et fenêtres, installer une pompe à chaleur...

2. Expliquer, brièvement, pourquoi il est nécessaire de renouveler constamment l'air intérieur d'un bâtiment.

Réponse :

En l'absence d'aération, l'air dans une habitation se charge en humidité, et dioxyde de carbone, en microbes..

3. Quel est le rôle de l'échangeur thermique ?

Réponse :

L'air évacué de la pièce climatisée est plus froid que l'air à l'extérieur du bâtiment. L'échangeur permet à l'air entrant de se refroidir un peu au contact de l'air sortant, avant de traverser le climatiseur : c'est un prérefroidissement qui ne coûte rien.

4. Citer deux avantages au fait de contrôler le débit d'air conditionné dans chaque pièce.

Réponse :

Les différentes pièces d'une habitation n'ont pas forcément les mêmes besoin en climatisation. Adapter le débit d'air conditionné permet de travailler avec de l'air froid à la même température pour toutes les pièces, et donc avec un unique climatiseur pour toutes les pièces.

III Étude des principaux échanges thermiques

III.1 Puissance thermique dégagée par les personnes présentes dans la pièce

5. Déterminer, pour une personne, la part en pourcentage de la puissance dégagée par chacun des modes de transfert thermique à 24 degrés.

Réponse :

La puissance dégagée totale vaut 123 W :

- rayonnement 38 W, 30,9 %
 - conduction 20 W, 16.3 %
 - convection 18 W, 14.6 %
 - évapo-transpiration 47 W, 38.2 %
-

6. Calculer la puissance totale \mathcal{P}_{pers} dégagée par 4 personnes présentes dans la pièce

Réponse :

$$\mathcal{P}_{pers} = 4 \times 123 = 492 \text{ W}$$

7. Calculer la puissance thermique maximale extraite du bâtiment par le climatiseur lorsque toutes les pièces lorsque toutes les pièces sont maintenues à la température de 24 degrés.

Réponse :

$$\mathcal{P}_{clim,tot} = D_{m,tot} c_p (T - T_c) = \frac{25000}{3600} 1000 (24 - 20) = 27,8 \text{ kW}$$

Puissance thermique extraite par le climatiseur

8. Calculer la puissance électrique qui serait consommée au maximum par le climatiseur si son efficacité était égale à son efficacité maximale

Réponse :

La puissance électrique minimale consommée est égale à la puissance thermique divisée par l'efficacité maximale, qui vaut ici $293/(28 - 20) = 36,6$. On obtient $\mathcal{P}_{elec} = 766 \text{ W}$.

9. En pratique la puissance électrique consommée peut dépasser la valeur calculée à la question précédente. Expliquer pourquoi.

Réponse :

L'efficacité réelle d'un climatiseur est inférieure à l'efficacité maximale évaluée à la question précédente.

10. Justifier que la puissance thermique apportée par le renouvellement d'air s'écrit :

$$\mathcal{P}_{ren} = d_m c_p (T_{e/p} - T)$$

Réponse :

Considérons le système ouvert "pièce" traversé par le flux du renouvellement d'air. L'air entrant dans la pièce est à la température $T_{e/p}$ et l'air sortant est à la température T . Le premier principe industriel appliqué à la pièce donne $\mathcal{P}_{ren} = d_m \Delta h = d_m c_p (T_{e/p} - T)$

11. En appliquant le 1er principe à l'écoulement entre les abscisses x et $x + dx$, établir l'équation différentielle (4) et expliciter le paramètre λ en fonction de c_p , d_m , K_{th} , et N le nombre de paires flux entrant/flux sortant de l'échangeur.

Réponse :

Le 1er principe industriel appliqué à l'air sortant, de débit massique d_m réparti sur N tranches donne

$$c_p d_m (T_{FS}(x) - T_{FS}(x + dx)) = 2K_{th} N dx (T_{FE}(x) - T_{FS}(x))$$

$$-\frac{dT_{FS}}{dx} = \frac{2K_{th}N}{d_m c_p} (T_{FE}(x) - T_{FS}(x))$$

On identifie donc $\lambda = \frac{d_m c_p}{2K_{th}N}$

-
12. Expliquer, succinctement et sans faire de calcul, comment établir l'équation différentielle (5)

Réponse :

On peut appliquer le 1er principe industriel à l'écoulement entrant, entre x et $x + dx$.

13. Dédire des équations différentielles (4) et (5) que $T_{FE}(x) - T_{FS}(x) = T_{e/p} - T$.

Réponse :

En soustrayant les équations (4) et (5), on obtient $\frac{d}{dx}(T_{FS} - T_{FE}) = 0$, donc $T_{FS} - T_{FE} = cte$. Cette constante peut se calculer du côté intérieur, $cte = T - T_{e/p}$.

14. Établir une équation différentielle vérifiée uniquement par $T_{FE}(x)$. La résoudre en tenant compte des conditions aux limites.

Réponse :

À partir de l'équation (5), on obtient $\frac{dT_{FE}}{dx} = -\frac{T_{e/p} - T}{\lambda} = \frac{T - T_{e/p}}{\lambda}$

Avec la condition $T_{FE}(0) = T_e$, on obtient $T_{FE}(x) = \frac{T - T_{e/p}}{\lambda}x + T_e$.

15. Montrer finalement que la puissance thermique apportée par le renouvellement de l'air s'écrit :

$$\mathcal{P}_{ren} = \frac{d_m c_P}{1 + \frac{2NK_{th}L}{d_m c_P}}(T_e - T)$$

avec L la longueur de l'échangeur. Justifier que l'échangeur est équivalent à une résistance thermique. Donner son expression.

Réponse :

D'après la question 10, $\mathcal{P}_{ren} = d_m c_P (T_{e/p} - T)$.

D'après la question 14, en $x = L$, $T_{FE}(L) = T_{e/p} = \frac{T - T_{e/p}}{\lambda}L + T_e$.

On en tire

$$T_{e/p} = \frac{TL/\lambda + T_e}{1 + L/\lambda}$$

En remplaçant dans \mathcal{P}_{ren} , on obtient l'expression demandée, puis la résistance thermique

$$R_{th} = \frac{1 + \frac{2NK_{th}L}{d_m c_P}}{d_m c_P}$$

16. Pourquoi est-il intéressant de disposer d'un échangeur pour lequel N est grand ?

Réponse :

Plus N est grand, et plus la puissance apportée à la pièce par le renouvellement de l'air est faible. L'échangeur thermique est plus efficace pour N plus grand, mais les pertes de charge lors de la circulation de l'air augmentent aussi. Un compromis est donc nécessaire.

IV. Influence du débit d'air conditionné sur la température

IV.1 Schéma électrique équivalent de la pièce

17. Exprimer R_4 en fonction des résistances thermiques de l'échangeur et de la fenêtre. Justifier.

Réponse :

L'échangeur et la fenêtre sont soumis à la même différence de température $T_e - T$, ils sont donc en parallèle, les conductances thermiques s'ajoutent.

18. À quoi correspond la source de courant η ? Justifier.

Réponse :

Il s'agit de la puissance thermique fournie à la pièce par les 4 personnes.

19. Donner l'expression de la résistance R_3 .

Réponse :

On a d'après (2), $\mathcal{P}_{clim} = D_m c_p (T - T_c)$, d'où l'expression de la résistance thermique $R_3 = \frac{1}{D_m c_p}$. Cette résistance varie lorsque le débit varie.

20. En appliquant la loi des noeuds aux points 1,2 et 3, établir trois équations faisant intervenir T_1 , T_2 , T et leurs dérivées.

Réponse :

Les loi des noeuds aux point 1,2 et 3 donnent respectivement

$$C_1 \frac{dT_1}{dt} = \frac{T_e - T_1}{R_1} + \frac{T_3 - T_1}{R_1}$$
$$C_3 \frac{dT}{dt} = \eta + \frac{T_e - T}{R_4} + \frac{T_2 - T}{R_2} + \frac{T_c - T}{R_3} + \frac{T_1 - T}{R_1}$$
$$C_2 \frac{dT_2}{dt} = \frac{T_3 - T_2}{R_2}$$

21. Montrer que la modélisation adoptée conduit à l'équation différentielle matricielle $X = AX + BU$, avec

$$X = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T \end{pmatrix} \text{ et } U = \begin{pmatrix} T_e \\ T_c \\ \eta \end{pmatrix}. \text{ On explicitera avec soin les matrices } A \text{ et } B.$$

Réponse :

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{2}{R_1 C_1} & 0 & \frac{1}{R_1 C_1} \\ 0 & -\frac{1}{R_2 C_2} & \frac{1}{R_2 C_2} \\ \frac{1}{R_1 C_3} & \frac{1}{R_2 C_3} & -\frac{1}{C_3} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} \frac{1}{R_1 C_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{R_4 C_3} & \frac{1}{R_3 C_3} & \frac{1}{C_3} \end{pmatrix}$$

IV.2 Résolution numérique

22. Compléter la ligne 7 du programme fourni, en définissant le vecteur U .

Réponse :

```
U = np.array([28,20,500])
```

23. On souhaite initialiser les températures T_1 , T_2 et T à 28 degrés. Compléter la ligne 10 initialisant le vecteur X .

Réponse :

```
X = np.array([28,28,28])
```

24. Approcher $X(t_{k+1})$ à l'aide de $X(t_k)$, $\dot{X}(t_k)$ et Δt en utilisant la méthode d'Euler. Á quelle condition cette approximation est-elle justifiée ?

Réponse :

$X(t_{k+1}) - X(t_k) = AX(t_k) + BU$. Cette approximation est justifiée si Δt est suffisamment faible devant le temps caractéristique de variation de la température.

25. Compléter les lignes 21 à 23. Les éléments des listes "temps" (t) et "température" (T) devront respectivement correspondre à des minutes et des degrés Celcius.

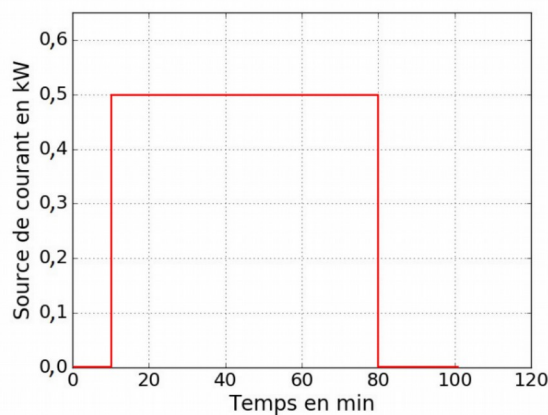
Réponse :

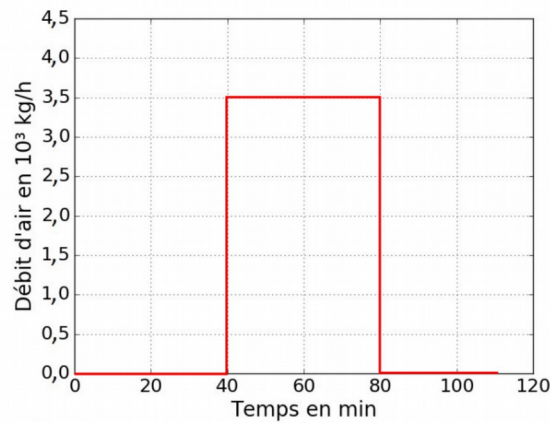
```
t.append(i*Δt)
X = X + np.dot(A,X)+ np.dot(B,U)
T.append(X[2])
```

IV.3 Résultat de simulation et identification à un premier ordre

26. Représenter graphiquement les évolutions temporelles de la source de courant η et du débit massique d'air conditionné D_m sur le document réponse.

Réponse :





27. Justifier qu'un modèle de comportement type passe-bas du premier ordre semble approprié.

Réponse :

La réponse du système à une échelon a une allure exponentielle, il n'y a pas de dépassement, un modèle d'ordre 1 semble convenir.

28. Identifier le gain statique H_0 et la constante de temps τ du modèle.

Réponse :

Lorsque le régime permanent est atteint, on a $H_0 = \Delta T / D_m = (29,2 - 22,7) / (3,5 / 3,6) = 6,7 \text{ K.m}^{-3}\text{s}$
 Le temps caractéristique est obtenu lorsque l'évolution est à 63 % de l'évolution maximale, c'est à dire lorsque la température vaut 25 degrés. On obtient $\tau = 1 \text{ min et } 30 \text{ s}$.

V. Contrôle du débit d'air conditionné

V.1 Étude du débit en fonction de l'inclinaison des volets du registre

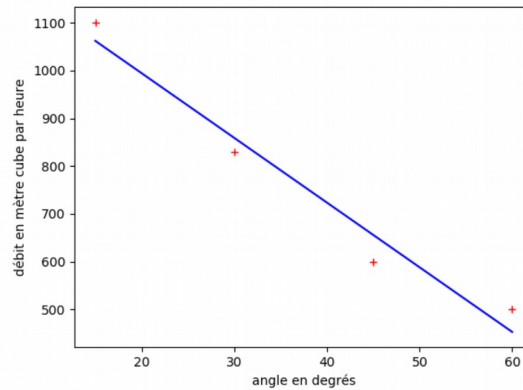
29. En utilisant les différents points de fonctionnement, tracer sur le document réponse la caractéristique de débit en fonction de l'angle d'inclinaison des volets. Sachant qu'il y a deux ventilateurs qui doublent le débit, proposer une modélisation affine sous la forme $D_m = K_R \theta + D$

Réponse :

Pour une surpression de 70 Pa, on relève les points de fonctionnement suivants :

Débits : 500, 600, 830, 1100

Angles : 60, 45, 30, 15



On obtient $K_r = -13,5 \text{ m}^3/\text{h}/\text{deg}$ et $D = 12,7 \cdot 10^3 \text{ m}^3/\text{h}$

30. Écrire la fermeture géométrique de la boucle 0-1-4-3-0 en projection sur \vec{x}_0 et \vec{y}_0 . Éliminer le paramètre θ_4 . Mettre le résultat sous la forme $f(\theta_1, \theta_3) = 0$.

Réponse :

La fermeture géométrique s'écrit :

$$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DA} = \vec{0}$$

En projection sur \vec{x}_0 :

$$1,3l \cos \theta_1 + 2,8l \cos \theta_4 + 1,8l \cos \theta_3 + 0 = 0$$

En projection sur \vec{y}_0 :

$$1,3l \sin \theta_1 + 2,8l \sin \theta_4 + 1,8l \sin \theta_3 - 2,5l = 0$$

Pour éliminer θ_4 on utilise $\cos^2 \theta_4 + \sin^2 \theta_4 = 1$, on obtient

$$(1,3 \cos \theta_1 + 1,8 \cos \theta_3)^2 + (2,5 - 1,3 \sin \theta_1 - 1,8 \sin \theta_3)^2 - 2,8^2 = 0$$

31. Recopier et compléter les lignes 15 à 18 de la fonction dichotomie

Réponse :

```
def Dichotomie(f, a, b, eps):
    if f(a)*f(b) >= 0 : return None
    while b-a > eps :
        c = (b-a)/2
        if f(a)f(c)<0 :
            b=c
        else :
            a = c
    return a
```

32. Proposer un modèle linéaire reliant θ à l'angle θ_1 sous la forme $\theta = 90 + K_c \theta_1$

Réponse :

$\theta \approx 90 - \theta_1$ semble convenir

V.3 Modélisation du couple moteur en fonction de l'inclinaison

33. Isoler l'ensemble des pièces mobiles et effectuer un bilan des puissances extérieures et intérieures. Seules seront considérées les puissances des liaisons parfaites, l'action de l'air ainsi que la puissance motrice $\mathcal{P}_{moteur \rightarrow 1/0} = C_m \dot{\theta}_m$.

Réponse :

Les liaisons pivot étant parfaites, il n'y a pas de puissances de forces intérieures.

Les puissances de forces extérieures sont :

$$\mathcal{P}_{air \rightarrow volet1} = -M_{A(\theta_m)} \dot{\theta}_m$$

$$\mathcal{P}_{air \rightarrow volet2} = -M_{E(\theta_m)} \dot{\theta}_m$$

$$\mathcal{P}_{air \rightarrow volet3} = -M_{E(\theta)} \dot{\theta}$$

$$\mathcal{P}_{moteur \rightarrow 1/0} = C_m \dot{\theta}_m$$

34. La faible vitesse permet de négliger l'énergie cinétique. Écrire le théorème de l'énergie cinétique et en déduire la relation entre C_m , $M_{E(\theta_m)}$, $M_{A(\theta_m)}$, $M_{D(\theta)}$.
En prenant $\theta_m \approx \theta$, en déduire la relation $C_m = f(\theta)$ et $H_v(p)$. Conclure sur la partie.

Réponse :

L'application du TEC en négligeant l'énergie cinétique correspond à la somme des puissances = 0, d'où

$$C_m \dot{\theta}_m = M_{A(\theta_m)} \dot{\theta}_m + M_{E(\theta_m)} \dot{\theta}_m + M_{D(\theta)} \dot{\theta}$$

puis, avec $\theta_m \approx \theta$ (ce qui est cohérent avec la modélisation de la question 32)

$$C_m = 0, 4\theta_m + 0, 4\theta_m + 0, 4\theta \approx 1, 2\theta$$

Cette partie a donc permis d'obtenir les relations entre C_m et θ , et entre θ et D_m .

VI Régulation de la température

35. Donner la valeur de K_a afin d'avoir un asservissement correct. Justifier l'intérêt d'un correcteur proportionnel intégral.

Réponse :

Pour que la comparaison entre les deux températures soit correcte, il faut $K_a = K_T$. Le correcteur proportionnel intégral améliore la précision du système

36. Régler T_i afin de compenser le pôle dominant de la fonction de transfert en boucle ouverte. Donner, dans cette configuration, l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte sans prendre en compte les perturbations. Le gain en boucle ouverte sera noté K_{BO} . L'expression sera mise sous forme canonique.

Réponse :

$$FTBO(p) = K_T K_i \left(\frac{1 + T_i p}{T_i p} \right) K_m K_v K_R \left(\frac{H_0}{1 + \tau p} \right)$$

$$FTBO(p) = K_{BO} \left(\frac{1 + T_i p}{T_i p} \right) \left(\frac{H_0}{1 + \tau p} \right)$$

Pour compenser le pôle dominant, on choisit $T_i = \tau$, on a alors $FTBO(p) = \frac{K_{BO}}{T_i p}$.

37. Justifier la stabilité du système avec la fonction obtenue.

Réponse :

C'est un intégrateur pur qui est stable pour une entrée en Dirac mais Instable pour une entrée bornée (échelon).

38. Donner l'expression de la fonction de transfert en boucle fermée (sans les perturbations) du système corrigé par compensation du pôle dominant. L'expression sera mise sous forme canonique.

Réponse :

$$FTBF(p) = \frac{1}{1 + \frac{T_i}{K_{BO}}p}$$

C'est un premier ordre, donc le système est stable.

39. Sachant que $K_{BO} = 2.10^{-7}K_i$, calculer K_i afin de respecter le critère du cahier des charges en rapidité.

Réponse :

La fonction de transfert devient $FTBF(p) = \frac{1}{1 + \frac{T_i p}{2.10^{-7}K_i}}$, donc le temps caractéristique du système est

$$\tau' = \frac{T_i}{2.10^{-7}K_i} = \frac{\tau}{2.10^{-7}K_i}$$

Le temps de réponse à 5% correspond à $3\tau'$. Avec $\tau = 90$ s déterminé question 28 et $tr_{5\%} = 2500$ s dans le cahier des charges, on obtient $K_i = 5,4.10^3$

40. Que faut-il modifier dans le schéma pour prendre en compte cette limitation ? Quelle conséquence aura cette modification sur les critères du cahier des charges ?

Réponse : On peut rajouter un saturateur en entrée du registre à volets.
Cela tend à ralentir le système.

41. Conclure vis-à-vis des critères du cahier des charges.

Réponse :

Le cahier des charges semble rempli : la courbe converge vers 24 degrés, cette valeur finale étant quasi atteinte à $t = 2500$ s. Le dépassement correspond environ à 1/3 de l'amplitude, ce qui correspond environ aux 35% exigés.
