

calculatrice autorisée

PARTIE I : ETUDE D'UNE MACHINE A COURANT CONTINU

Dans les machines électriques, le principe de la conversion d'énergie électromécanique repose sur l'interaction entre le champ magnétique créé par l'inducteur et le courant électrique circulant dans l'induit.

Le circuit magnétique en fer amplifie et canalise les lignes de champs magnétiques. Il comporte un entrefer séparant la partie statique (le stator) de la partie en rotation (le rotor).

Dans une M.C.C. à stator bobiné, l'inducteur comporte un grand nombre de spires en série, alimentées par un courant continu de faible intensité, notée i_{exc} . Par l'intermédiaire de pièces polaires, ce courant crée un champ radial dans l'entrefer.

Le rotor ou induit est constitué de plusieurs spires plates, connectées en parallèle les unes avec les autres. Il est alimenté par une source de tension continue qui délivre un courant d'intensité I importante.

On recherche dans cette **partie** à identifier la constante de temps électrique τ_e de l'induit d'une M.C.C..

Le bornier de la machine (**figure 3**) fait apparaître deux couples de bornes, l'un correspondant à l'induit et l'autre à l'inducteur. Ils sont dénommés couple A et couple B.

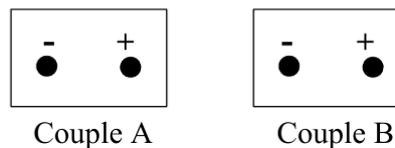


Figure 3 - Bornier de la M.C.C.

Dans une première expérience, on mesure pour deux fréquences différentes, à l'aide d'un impédance-mètre, à la fois la résistance R et l'inductance L des deux enroulements de la M.C.C.. Les mesures sont regroupées dans le **tableau 1**.

	Couple A	Couple B
$f = 120 \text{ Hz}$	$R_A = 4,61 \ \Omega ; L_A = 3,30 \text{ mH}$	$R_B = 160 \ \Omega ; L_B = 822 \text{ mH}$
$f = 1 \text{ kHz}$	$R_A = 8,82 \ \Omega ; L_A = 3,07 \text{ mH}$	$R_B = 920 \ \Omega ; L_B = 568 \text{ mH}$

Tableau 1 - Mesures de résistances et d'inductances

Q10. Quel couple de bornes A ou B correspond *a priori* aux enroulements de l'induit ? Aux enroulements de l'inducteur ?

Q11. Comment expliquez-vous que les résistances puissent augmenter avec la fréquence ? En électromagnétisme, rappeler l'équation locale de Maxwell-Faraday ainsi que la loi de Lenz. Comment expliquez-vous que les inductances puissent diminuer avec la fréquence ?

Dans une seconde expérience, on a bloqué le rotor de la machine. On a ensuite imposé entre les deux bornes du couple A, un échelon de tension d'amplitude $V_0 = 10 \text{ V}$, à l'aide d'une alimentation extérieure. On a relevé (**figure 4**), à l'aide d'un capteur à effet Hall, le courant $I_A(t)$ circulant dans l'enroulement correspondant au couple de bornes A.

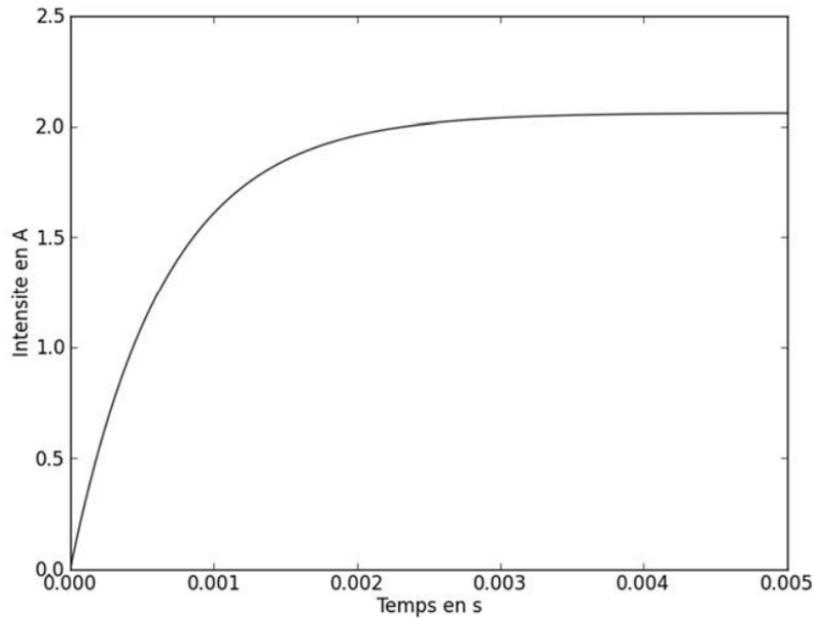


Figure 4 - Réponse à un échelon de tension, rotor bloqué

Q12. Justifier la nécessité de bloquer le rotor de la M.C.C..

Évaluer alors les valeurs de la résistance R , de l'inductance L et de la constante de temps électrique τ_e de l'association alimentation-M.C.C..

Ces valeurs sont-elles compatibles avec les relevés de la première expérience ?

Dans une M.C.C., la force électromotrice (f.e.m.) induite est proportionnelle à la vitesse de rotation de la machine. La source d'énergie est généralement une source de tension constante notée U_0 . Il convient donc de l'associer à un convertisseur statique pour pouvoir faire varier la vitesse de rotation de la machine.

Q13. Un étudiant E1 propose d'intercaler, entre la source de tension continue U_0 et la M.C.C., un pont diviseur de tension résistif composé d'une résistance R_1 et d'une résistance R_2 variable (**figure 5**).

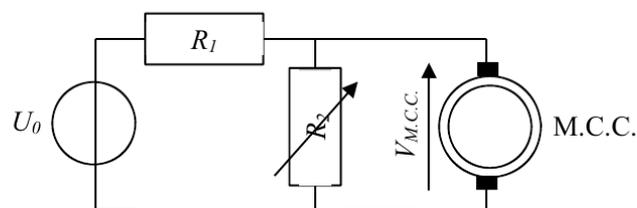


Figure 5 - Pont diviseur résistif

Exprimer, en supposant l'impédance de la M.C.C. grande devant la résistance R_2 , la tension $V_{M.C.C.}$, aux bornes de la M.C.C., en fonction de U_0 , de R_1 et de R_2 .

- Q14.** Un étudiant E2 suggère au contraire d'utiliser un pont diviseur de tension capacitif, dont la capacité du condensateur 2 est réglable (**figure 6**).

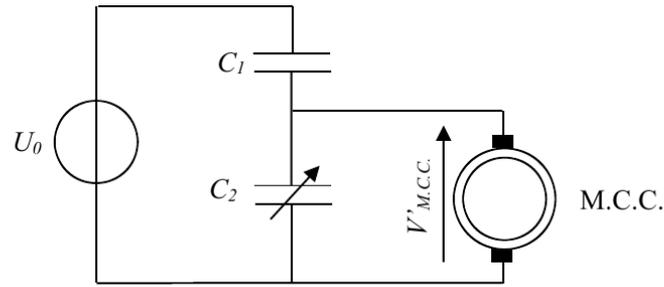


Figure 6 - Pont diviseur capacitif

Exprimer, en supposant l'impédance de la M.C.C. grande devant celles des capacités, la tension $V_{M.C.C.}$, aux bornes de la M.C.C., en fonction de U_0 , de C_1 et de C_2 .

- Q15.** Un étudiant E3 suggère d'utiliser un amplificateur linéaire qui fonctionne en comparateur, de façon à délivrer sur une période T de hachage (**figure 7**) une tension hachée U_1 d'amplitude $+V_{sat}$ pour $t \in [0; \alpha T]$ et d'amplitude $-V_{sat}$ pour $t \in [\alpha T; T]$.

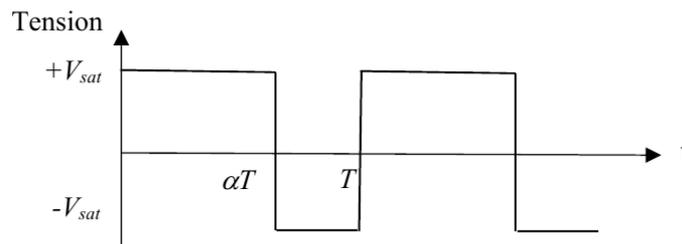


Figure 7 - Tension hachée U_1

Déterminer en fonction de α et de V_{sat} , la valeur moyenne V_{moy} de la tension hachée U_1 .

- Q16.** Présenter les avantages et les inconvénients de ces trois propositions en une dizaine de lignes au maximum.

Industriellement, la source de tension continue d'amplitude U_0 est connectée à la M.C.C. par l'intermédiaire d'un hacheur. On considère ici un hacheur série (**figure 8**), comprenant deux composants de puissance : un transistor T et une diode D.

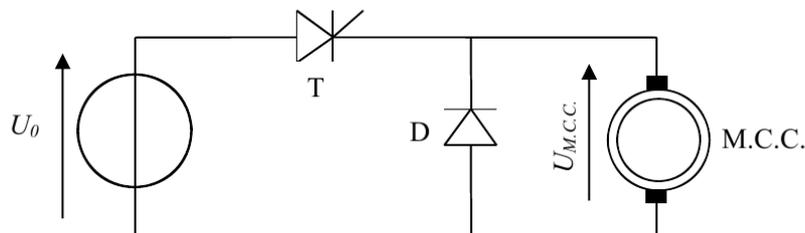


Figure 8 - Montage avec hacheur série

Le transistor est utilisé en commutation par l'intermédiaire d'une tension de commande V_{com} . On désire obtenir la tension hachée U_2 , représentée sur la **figure 9**. On note α' le rapport cyclique du hacheur et f_h la fréquence de hachage ($f_h = \frac{1}{T_h}$).

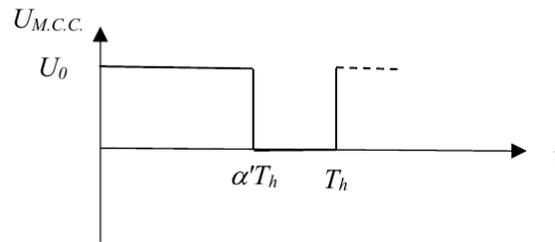


Figure 9 - Tension hachée U_2

Pour faire simple, on admettra que le transistor est passant lorsque $V_{com} = +15$ V et qu'il est bloqué lorsque $V_{com} = -15$ V.

On s'intéresse ici au circuit électronique qui permet de générer la tension de commande V_{com} du hacheur série.

Dans tout le sujet, les amplificateurs linéaires (A.Li.) sont supposés d'impédance d'entrée infinie et d'impédance de sortie nulle. En mode linéaire, leur gain est considéré comme infini. On note $\pm V_{sat}$ leur tension de saturation, avec $V_{sat} = 15$ V.

On considère le circuit de commande de la **figure 10**. La résistance R_3 est une résistance variable, les deux autres résistances sont de valeurs fixes.

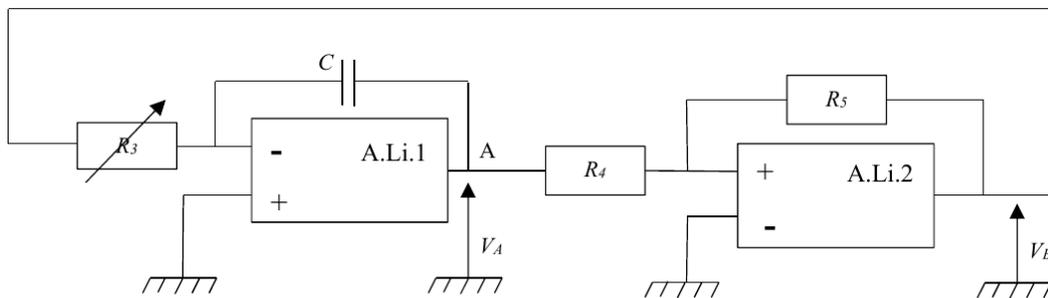


Figure 10 - Circuit de commande du hacheur

Q17. Préciser pour chacun des amplificateurs linéaires, s'il fonctionne, *a priori*, en régime linéaire ou saturé.

Q18. Déterminer, en fonction de R_3 et C , la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = \frac{V_A}{V_B}$ du montage lié à l'amplificateur linéaire A.Li.1. Quelle est la fonction réalisée par cette partie du montage ?

Q19. Quelle fonction réalise le montage lié à l'amplificateur linéaire A.Li.2. ?

Q20. On suppose que $V_A(t=0) = \frac{R_4 V_{sat}}{R_5}$. En veillant à indiquer toutes les informations nécessaires, tracer sur un même graphe, l'allure des deux tensions V_A et V_B en fonction du temps. Comment sont modifiées ces tensions lorsqu'on augmente la résistance R_3 ?

Dans la suite du sujet, on suppose $R_5 = 2R_4$.

- Q21.** On connecte le point A du circuit précédent (**figure 10**) au point C du circuit décrit sur la **figure 11**. Un potentiomètre relié à un ensemble de deux condensateurs et une source de tension constante $V_m = 15 \text{ V}$, permettent d'imposer le potentiel de l'entrée non inverseuse de l'amplificateur linéaire A.Li.3. On a ainsi : $V^+ = \beta V_m$.

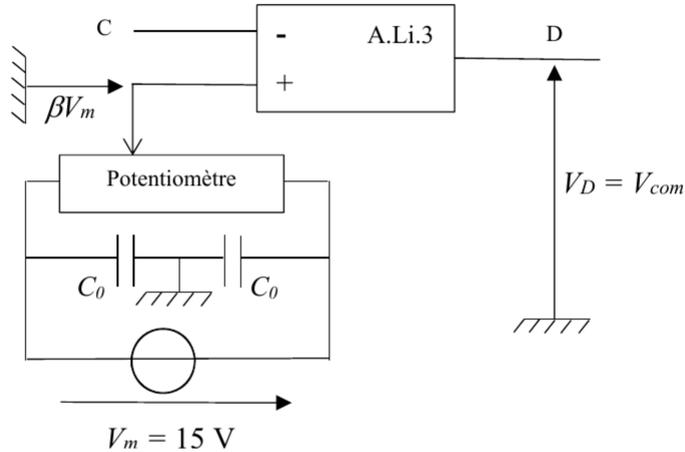


Figure 11 - Circuit supplémentaire

Sur quel intervalle varie la grandeur β ? Dessiner l'allure de la tension $V_D(t)$ dans les deux cas correspondant à $\beta = 1/3$ et $\beta = -1/3$.

- Q22.** La tension $V_D(t)$ est utilisée pour commander le transistor du hacheur série qui alimente la M.C.C., on a ainsi : $V_{com}(t) = V_D(t)$. Préciser les relations qui relient la fréquence de hachage f_h et le rapport cyclique α' du hacheur aux différents éléments présents dans les circuits électroniques représentés sur les **figures 10 et 11**.

PARTIE II : POELE A INDUCTION POUR PANCAKES

On se propose d'étudier un système de cuisson des pancakes, crêpes originaires d'Amérique du Nord. Il utilise un onduleur série et une poêle qui fonctionne par induction dans le but d'obtenir une température de 160°C , condition nécessaire à l'obtention d'un pancake bien cuit, doré et savoureux.

I.1 - Onduleur RLC série

Afin de concevoir le module à induction, on choisit une alimentation électrique pouvant fournir 3 A en continu (régime permanent stationnaire) pour une tension maximale de 30 V. De telles puissances nécessitent de dimensionner en conséquence l'onduleur et les câbles, notamment afin d'éviter la détérioration... voire la "cuisson" de composants électroniques !

On étudie un onduleur de tension autonome de période T , à commande symétrique, dont le montage est représenté sur la **figure 2**. Les quatre interrupteurs bidirectionnels K_1 , K_2 , K_3 , K_4 sont supposés idéaux et commandés électriquement de telle façon que :

- pour $nT < t < (n + 1/2)T$, avec $n \in \mathbb{N}$: les interrupteurs K_1 et K_3 sont fermés, les interrupteurs K_2 et K_4 sont ouverts ;
- pour $(n + 1/2)T < t < (n + 1)T$: les interrupteurs K_1 et K_3 sont ouverts, les interrupteurs K_2 et K_4 sont fermés.

Le générateur est une source de tension idéale de force électromotrice E constante. La charge est un circuit RLC série, l'inductance L étant celle de la bobine destinée au chauffage.

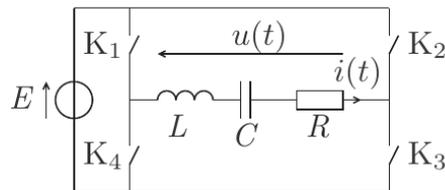


Figure 2 – Onduleur à circuit RLC série : schéma du montage

- Q1.** Rappeler brièvement l'objectif d'un onduleur. Préciser si la charge RLC série est une source de courant ou de tension en justifiant la continuité d'une grandeur électrique dans ce circuit.
- Q2.** Tracer soigneusement la courbe $u(t)$ sur deux périodes.
- Q3.** Écrire l'équation différentielle liant à tout instant t , la tension $u(t)$ et l'intensité du courant $i(t)$ et la mettre sous la forme canonique :

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = \frac{1}{L} \frac{du}{dt}. \quad (1)$$

On explicitera les expressions de Q (facteur de qualité) et de ω_0 (pulsation propre) en fonction de R , L et C .

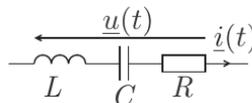


Figure 3 – Association RLC série : analyse fréquentielle

Considérons une tension $u(t)$ sinusoïdale de pulsation ω . On note $\underline{u}(t)$ et $\underline{i}(t)$ les grandeurs complexes respectivement associées aux quantités $u(t)$ et $i(t)$ rappelées sur la **figure 3**. En notant j le nombre complexe tel que $j^2 = -1$, on définit la fonction de transfert :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{i}(t)}{\underline{u}(t)}. \quad (2)$$

- Q4.** Préciser la dimension de $\underline{H}(j\omega)$, puis l'exprimer en fonction de R , ω , ω_0 et de Q . Déterminer le comportement de son module $G(\omega) = |\underline{H}(j\omega)|$ pour les grandes et les petites pulsations.
- Q5.** Déterminer littéralement puis numériquement la valeur maximale de G .
- Q6.** Caractériser le filtrage réalisé (nature, ordre). Justifier l'intérêt d'ajuster la période du signal de commande afin d'avoir $\omega = \omega_0$. Calculer numériquement la fréquence f associée.

I.2 - Puissance induite dans la poêle

Le circuit électrique précédent permet de faire parcourir un courant sinusoïdal d'intensité

$$i(t) = I_0 \cos(\omega t) \quad (3)$$

dans une bobine plate enroulée en spirale, schématisée sur la **figure 4**. Le champ magnétique créé par cette distribution de courant est complexe ; on se contente de comprendre le principe du chauffage par induction avec un circuit plus simple : une unique spire circulaire de centre O et de rayon R , parcourue par une intensité $i(t)$. Dans la suite, on travaille dans un système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) , muni de la base orthonormée directe $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$.

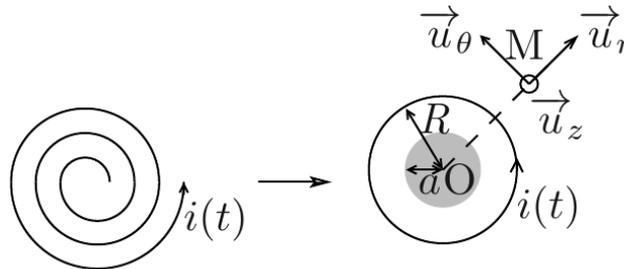


Figure 4 – Bobine : schéma et modélisation

On pose dans le plan de cette spire une poêle, assimilée à un cylindre de rayon $a < R$ et d'épaisseur e , de perméabilité magnétique relative μ_r et de conductivité électrique γ . Dans un souci de simplification, on suppose que le champ magnétique \vec{B} créé par la spire dans la poêle est uniforme. En notant μ_0 la perméabilité magnétique du vide, on donne :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \mu_r i(t)}{2R} \vec{u}_z. \quad (4)$$

- Q7.** Rappeler l'équation locale de Maxwell-Faraday. On donne le théorème de Stokes :

$$\oint_{\mathcal{L}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \iint_S \text{rot} \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad (5)$$

où S désigne une surface s'appuyant sur le contour fermé \mathcal{L} .

Obtenir une formulation globale de l'équation locale de Maxwell-Faraday.

On cherche le champ électrique induit au sein de la poêle sous la forme $\vec{E} = E(r, t) \vec{u}_\theta$.

- Q8.** Déterminer $E(r, t)$ en fonction de $r, t, R, I_0, \omega, \mu_0$ et de μ_r .
- Q9.** Ce champ électrique induit est responsable de courants de Foucault répartis dans tout le volume du conducteur. Exprimer leur densité de courant volumique \vec{j} en tout point de la poêle, puis la puissance volumique moyenne p dissipée par effet Joule en fonction des données.
- Q10.** En intégrant cette puissance volumique moyenne sur le volume de la poêle, montrer que la puissance moyenne totale induite s'écrit :

$$P_{\text{ind}} = \frac{\pi(\mu_0 \mu_r)^2 \gamma \omega^2 I_0^2 e a^4}{64 R^2}. \quad (6)$$

- Q11.** On dispose de poêles en aluminium et en fonte. Bien que l'aluminium soit environ 40 fois plus conducteur électriquement que la fonte, on choisira la poêle en fonte : pourquoi ?

En réalité, le champ électromagnétique variable ne pénètre pas la poêle sur toute son épaisseur, mais uniquement sur une taille typique :

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{\pi \mu_0 \mu_r \gamma f}}. \quad (7)$$

- Q12.** Comment se nomme cet effet ? Calculer numériquement δ en prenant pour la fréquence f la valeur obtenue à la **question Q6**. En comparant cette taille à l'épaisseur typique d'une poêle, cet effet vous semble-t-il important à prendre en compte pour calculer la puissance induite ?