

**PARTIE I : ETUDE D'UNE MACHINE A COURANT CONTINU
(CCINP PSI 2020)**

Q10.

Pour l'inducteur (le stator) on a un grand nombre de spires en série donc R et L sont grandes. A contrario pour l'induit (le rotor), les spires sont en parallèle donc R et L sont plus faibles. Couple A : l'induit et Couple B : l'inducteur.

Q11.

R(f) est une fonction croissante de f, cf effet de peau et Q7.

$$\overline{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Les phénomènes d'induction s'opposent à la cause qui leur a donné naissance.

Il se développe des courants de Foucault qui s'opposent à la variation de flux et qui font alors baisser l'inductance.

Q12. Equation de la MCC : $U = Ri + L \frac{di}{dt} + E$. E est proportionnelle à la vitesse de rotation de la machine. On bloque le rotor pour imposer $E = 0$. On a alors un circuit R,L du 1^{ier} ordre. Par la réponse à 63%, $\tau'_c = 0,5 \text{ ms}$.

Valeur finale (lecture graphique 2,05 A) en régime permanent : $R = U/I = 4,9 \Omega$.

$$\tau'_c = \frac{L}{R} \text{ d'où } L = 2,45 \text{ mH}.$$

Ces valeurs sont compatibles avec les données, compte tenu que R dépend de f et L aussi.

Q13.

$$\text{Pont diviseur de tension résistif : } V_{\text{MCC}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_0.$$

Q14.

$$\text{Pont diviseur de tension capacitif : } V_{\text{MCC}} = \frac{\frac{1}{jC_2\omega}}{\frac{1}{jC_1\omega} + \frac{1}{jC_2\omega}} U_0 = \frac{\frac{1}{C_2}}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} U_0 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} U_0.$$

Q15.

$$V_{\text{moy}} = \frac{1}{T} \int_0^T v(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^{\alpha T} V_{\text{sat}} dt + \frac{1}{T} \int_{\alpha T}^T -V_{\text{sat}} dt = (2\alpha - 1) V_{\text{sat}}.$$

Q16.

- Pont diviseur de tension résistif : fonctionne mais trop de dissipation d'énergie par effet Joule, donc mauvais rendement.
- Pont diviseur de tension capacitif : ne fonctionne pas en continu (C équivalant à un interrupteur ouvert), la MCC ne sera traversée par aucun courant donc aucun couple moteur.
- A. Li. : c'est un composant de l'électronique fine, très peu de courant de sortie donc très peu de couple et de puissance développés par la MCC.

Q17.

Régime linéaire \Rightarrow rétroaction sur la borne – de l'A.Li.

A.Li.1 : linéaire; A.Li.2 : non linéaire.

Q18.

Régime linéaire donc $V^+ = V^-$; par la loi des nœuds exprimée en terme de potentiels, il vient :

$$V^+ = 0 = V^- = \frac{\frac{V_B}{R_3} + jC\omega V_A}{\frac{1}{R_3} + jC\omega} ; \text{ soit : } H(j\omega) = \frac{-1}{jR_3C\omega} \text{ C'est un montage intégrateur inverseur.}$$

Q19.

Comparateur à hystérésis non inverseur.

Q20.

Aux basculements du comparateur, ε passe par 0. D'où : $\frac{V_{A_{\text{basce}}}}{R_4} + \frac{V_B}{R_5} = 0$, avec $V_B = \pm V_{\text{sat}}$.

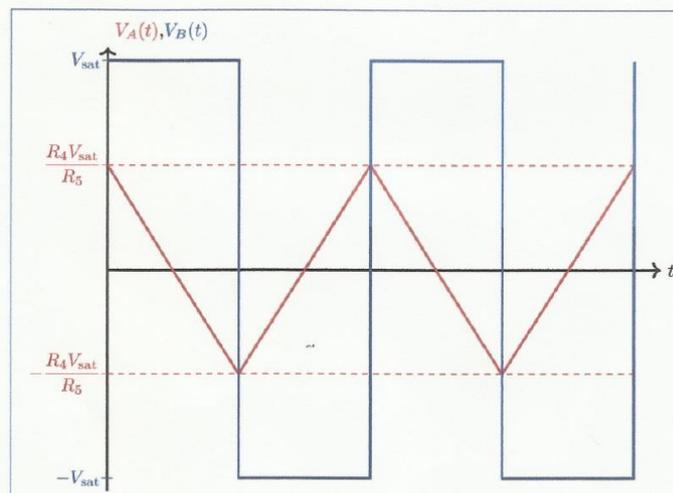
$$\text{Soit } V_{A_{\text{basce}}} = \pm \frac{R_4 V_{\text{sat}}}{R_5}.$$

Par l'A.Li 1, on intègre $V_B = \pm V_{\text{sat}}$, avec une constante de temps R_3C , soit pour V_B il vient un signal triangle qui varie entre $-\frac{R_4 V_{\text{sat}}}{R_5}$ et $\frac{R_4 V_{\text{sat}}}{R_5}$ avec une pente égale à $\pm \frac{V_{\text{sat}}}{R_3C}$.

Soit T la période du signal, on a : Amplitude crête à crête du triangle = pente $\frac{T}{2}$, d'où :

$$\frac{2R_4 V_{\text{sat}}}{R_5} = \frac{V_{\text{sat}}}{R_3C} \frac{T}{2}. \text{ Soit } T = \frac{4R_4}{R_5} R_3C.$$

Allure des tensions :



T est proportionnelle à R_3 , donc R_3 modifie la fréquence ou la période.

Q21.

Par l'association des deux condensateurs C_0 , qui constitue un pont diviseur de tension capacitif avec la masse au milieu, on impose de part et d'autre du potentiomètre des potentiels

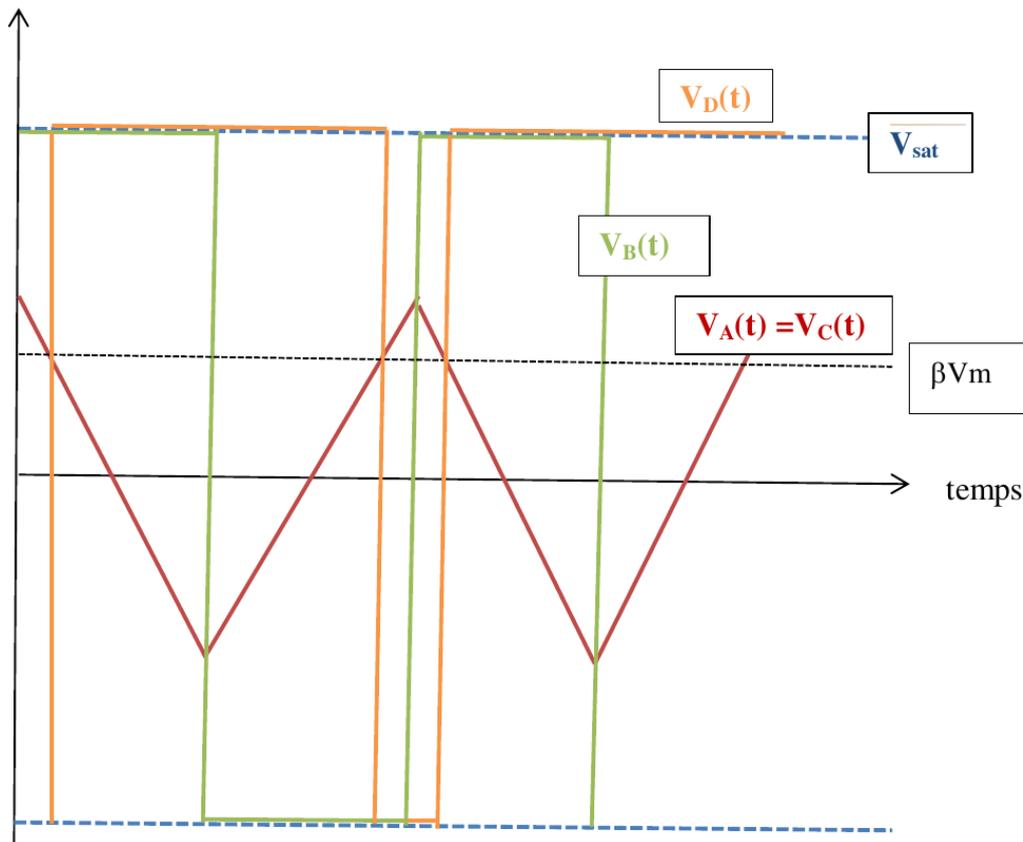
$$\frac{-V_m}{2} \text{ et } \frac{V_m}{2}. \beta \text{ varie ainsi entre } -0,5 \text{ et } +0,5.$$

L'A.Li. 3 fonctionne en comparateur simple.

$$V_C < \beta V_m \text{ impose } V_D = +V_{\text{sat}} = 15 \text{ V.}$$

$$V_C > \beta V_m \text{ impose } V_D = -V_{\text{sat}} = -15 \text{ V.}$$

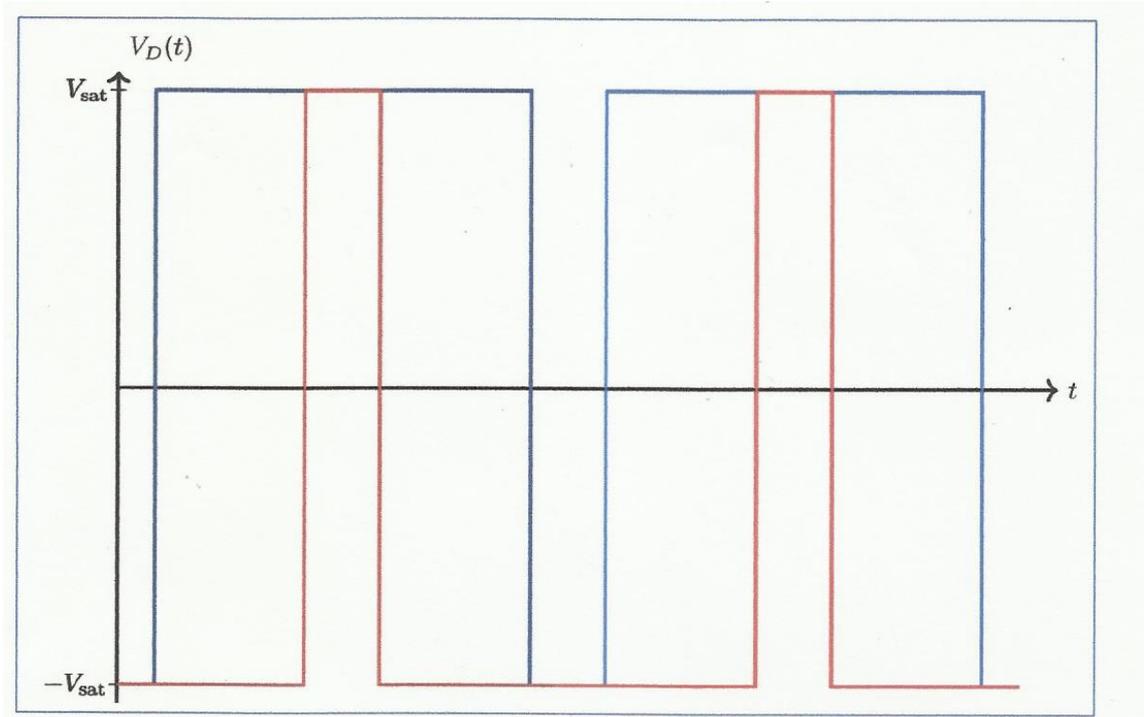
Tensions (V) pour $\beta=1/3$

**Q22.**

Pour toutes les tensions, $f_h = \frac{1}{T} = \frac{R_5}{4R_3R_4C}$ ou $\frac{1}{2R_3C}$.

Rapport cyclique = $\alpha' = \frac{T_{\text{haut}}}{T_{\text{haut}} + T_{\text{bas}}} = \frac{1}{2} + \frac{\beta R_5}{2R_4}$ ou $\frac{1+2\beta}{2}$.

$V_D(t)$: En bleu $\beta = 1/3$; en rouge $\beta = -1/3$.



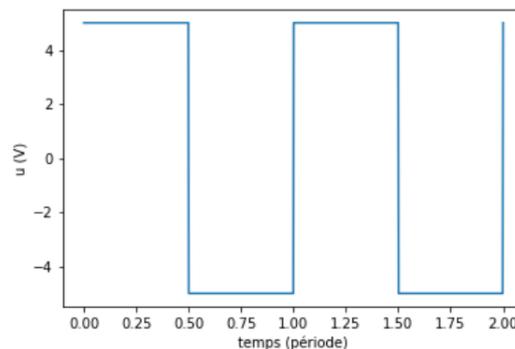
PARTIE II : POELE A INDUCTION POUR PANCAKES (E3A PSI 2022)

Q1. L'objectif d'un onduleur est de convertir un signal électrique continu en signal électrique alternatif. Dans la charge RLC série, le courant est continu du fait de la présence d'une bobine. Si l'inductance de la bobine est suffisamment élevée, on pourra considérer le courant comme quasiment constant : on a donc une source de courant.

Q2. Étudions l'évolution de la tension u au cours du temps.

Dans la première phase, K_1 et K_3 sont fermés tandis que K_2 et K_4 sont ouverts. Avec une loi des mailles, on obtient : $u = E$.
 Dans la deuxième phase, K_2 et K_4 sont fermés tandis que K_1 et K_3 sont ouverts. Avec une loi des mailles, on obtient : $u = -E$.

u est donc une tension créneau variant entre $-E$ et $+E$ (on prendra arbitrairement $E = 5$ V dans la figure suivante).



Q3. On a, au niveau de la charge RLC série : $u = Ri + u_c + L \frac{di}{dt}$

En dérivant cette expression et en utilisant $\frac{du_c}{dt} = \frac{i}{C}$, on obtient alors :

$$\frac{du}{dt} = R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} + L \frac{d^2i}{dt^2}$$

puis, en divisant par L :

$$\boxed{\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = \frac{1}{L} \frac{du}{dt} \quad \text{avec} \quad \frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L} \quad \text{et} \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}} \quad (1)$$

On en déduit : $\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}}$

Q4. $\underline{H}(j\omega)$ a la dimension d'une conductance électrique.

Pour déterminer son expression, on passe l'équation différentielle 1 en notations complexes :

$$-\omega^2 \underline{i} + \frac{\omega_0}{Q} j\omega \underline{i} + \omega_0^2 \underline{i} = \frac{j\omega}{L} \underline{u} \Rightarrow \underline{H}(j\omega) = \frac{\frac{j\omega}{L}}{\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{\omega_0}{Q} j\omega}$$

De plus, on a $\frac{Q}{\omega_0} = \frac{L}{R}$ donc $L = \frac{RQ}{\omega_0}$, ce qui donne finalement :

$$\boxed{\underline{H}(j\omega) = \frac{\frac{j\omega\omega_0}{QR}}{\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{\omega_0}{Q} j\omega} = \frac{\frac{j\omega}{Q\omega_0 R}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \frac{j\omega}{Q\omega_0}}$$

On peut également poser $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ et on obtient :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\frac{jx}{QR}}{1 - x^2 + \frac{jx}{Q}}$$

Le module de \underline{H} s'écrit :

$$\boxed{G(\omega) = \frac{\frac{\omega}{Q\omega_0 R}}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}}$$

— Quand $\omega \ll \omega_0$, on a $G \sim \frac{\omega}{Q\omega_0 R}$.

— Quand $\omega \gg \omega_0$, on a $G \sim \frac{\omega_0}{Q\omega R}$.

On voit donc que G tend vers 0 quand ω tend vers 0 ou vers $+\infty$.

Q5. Pour déterminer la valeur maximale de G , on reprend la notation avec la pulsation réduite de \underline{H} et on la met sous la forme :

$$\underline{H} = \frac{1}{R} \frac{1}{1 + jQ \left(x - \frac{1}{x} \right)}$$

ce qui donne

$$G = \frac{1}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x} \right)^2}}$$

G est maximal quand son dénominateur est minimal soit quand $x = 1$, ou encore quand $\omega = \omega_0$.

On a alors

$$G_{\max} = G(\omega = \omega_0) = \frac{1}{R}$$

A.N. : $G_{\max} \simeq 0,14 \Omega^{-1} \simeq 0,14 \text{ S}$

Q6. D'après les questions précédentes, on remarque qu'il s'agit ici d'un filtrage passe-bande d'ordre 2 : le gain tend vers 0 à basses et hautes fréquences et passe par un maximum à la fréquence de résonance.

Le but de l'onduleur est d'obtenir le courant le plus sinusoïdal possible. En réglant $\omega = \omega_0$, on récupère (si le filtre est suffisamment sélectif) la fondamentale du signal créneau, ce qui permet d'avoir un courant sinusoïdal d'amplitude relativement importante (ici, $i_{\max} = E/R = 1,7 \text{ A}$).

La fréquence associée est $f = f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ A.N. : $f_0 \simeq 39 \text{ kHz}$.

I.2 Puissance induite dans la poêle

Q7. L'équation de Maxwell-Faraday s'écrit : $\boxed{\text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$

Calculons la circulation sur le contour \mathcal{L} du champ électrique \vec{E} :

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{L}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} &= \iint_{S(\mathcal{L})} \text{rot}(\vec{E}) \cdot d^2\vec{S} \quad (\text{théorème de Stokes}) \\ &= \iint_{S(\mathcal{L})} -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d^2\vec{S} \quad (\text{équation de Maxwell-Faraday}) \\ &= -\frac{d}{dt} \iint_{S(\mathcal{L})} \vec{B} \cdot d^2\vec{S} \quad (S(\mathcal{L}) \text{ fixe}) \\ \oint_{\mathcal{L}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} &= -\frac{d\Phi}{dt} \end{aligned}$$

où Φ est le flux du champ magnétique à travers la surface s'appuyant sur le contour fermé et orienté \mathcal{L} .
On retrouve la loi de Faraday.

Q8. On va utiliser la relation précédente sur un contour \mathcal{L} circulaire, de centre O et de rayon R , orienté selon $+\vec{u}_\theta$. On obtient :

$$\oint_{\mathcal{L}} E(r, t) \vec{u}_\theta \cdot r d\theta \vec{u}_\theta = -\frac{d\Phi}{dt} \quad \text{avec} \quad \Phi = \iint_{S(\mathcal{L})} \vec{B} \cdot \vec{d}^2\vec{S} = B \pi r^2$$

Remarque : $\vec{d}^2\vec{S}$ est orientée selon la règle de la main droite à partir de l'orientation de \mathcal{L}

Cela donne alors :

$$E(r, t) 2\pi r = -\frac{\pi r^2 \mu_0 \mu_r}{2R} \frac{di}{dt} \Rightarrow E(r, t) = -\frac{r \mu_0 \mu_r}{4R} \frac{di}{dt} = \frac{r \omega I_0 \mu_0 \mu_r}{4R} \sin(\omega t)$$

Q9. D'après la loi d'Ohm locale,

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} = \frac{\gamma r \omega I_0 \mu_0 \mu_r}{4R} \sin(\omega t) \vec{u}_\theta$$

La puissance volumique moyenne dissipée par effet Joule est :

$$p = \langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle = \gamma \left(\frac{\mu_0 \mu_r r I_0 \omega}{4R} \right)^2 \langle \sin^2(\omega t) \rangle = \frac{1}{2} \gamma \left(\frac{\mu_0 \mu_r r I_0 \omega}{4R} \right)^2$$

Q10.

$$P_{\text{ind}} = \iiint_V p d^3V = \frac{1}{2} \gamma \left(\frac{\mu_0 \mu_r I_0 \omega}{4R} \right)^2 \iiint r^3 dr d\theta dz = \frac{1}{2} \gamma \left(\frac{\mu_0 \mu_r I_0 \omega}{4R} \right)^2 \times \frac{a^4}{4} \times 2\pi e$$

donc on retrouve bien l'expression de l'énoncé : $P_{\text{ind}} = \frac{\gamma \pi (\mu_0 \mu_r \omega I_0)^2 e a^4}{64 R^2}$

Q11. $\gamma_{\text{alu}} > \gamma_{\text{fonte}}$ mais $\mu_{r,\text{alu}} = 1 < \mu_{r,\text{fonte}}$.

Comme, numériquement, $\gamma_{\text{alu}} \times \mu_{r,\text{alu}}^2 = 4, 0.10^7 < \gamma_{\text{fonte}} \times \mu_{r,\text{fonte}}^2 = 6, 4.10^9$,

on a $P_{\text{ind,alu}} < P_{\text{ind,fonte}}$ ou encore $\frac{P_{\text{ind,fonte}}}{P_{\text{ind,alu}}} = 160$.

Ainsi, la puissance Joule dissipée dans une poêle en fonte est supérieure à celle dans une poêle en aluminium : le chauffage par induction est plus efficace dans une poêle en fonte.

Q12. Il s'agit de l'effet de peau. On trouve $\delta = 2, 8.10^{-4}$ m.

En prenant une épaisseur de poêle de l'ordre du centimètre, on voit que $e \ll \delta$.

Il faudrait donc prendre en compte l'effet de peau pour faire un calcul plus précis de la puissance dissipée.

Le volume dans lequel apparaissent les courants de Foucault est plus petit que ce que l'on a supposé : on a donc surestimé la puissance dissipée par effet Joule.