Retours
PSI *
Année 2022-2023

Année 2023.

Si vous repérez une étourderie dans ce poly, voir pire, veuillez me le signaler ! ! !

© Mines Ponts V Heynderickx ...

Exo 1 : On définit une suite réelle (a_n) en posant : $a_0 = 1$, $2a_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k a_{n-k}$.

1) Définition de f et rayon supérieur à 1.

2) Calculer f^2 en fonction des (a_n).

3) En déduire f et les (a_n).

Bonux : En dim infinie, avec $E = F \overset{\perp}{\bigoplus} F^{\perp}$.

Prouver que F est tjs un fermé.

Kdo : penser à lipschitzienneté.

Sol : Sol exo 23 de la feuille 6 dse.

F est le noyau de $P_{F^\perp}$, il faudrait la continuité pour appliquer

l'image réciproque du fermé $\{\overrightarrow{0}\}$.

Or elle est lipschitzienne de rapport 1 par Pythagore,

$\|P_{F^\perp}(x) - P_{F^\perp}(y)\|^2 = \|a - a'\|^2 \leqslant \|x - y\|^2 = \|a - a'\|^2 + \|b - b'\|^2$.

Rq perso pour celui qui pourrait améliorer cet exo :

En dim infinie, si $E = F \bigoplus F^{\perp}$, alors (cf exo 47 feuille 10) $(F^{\perp})^{\perp} = F$.

© Le Derf Mines .

Sot E ev préhilbertien, F sev de E.

1) Montrer que $F \subset (F^{\perp})^{\perp}$.

2) Ici $E = \mathbb{R}[X]$.

On prend le produit scalaire $< P, Q >= \displaystyle\int_0^1 PQ(t)dt$.

$F = \{P \in E, P(1) = P'(1) = 0\}$.

Donner $F^{\perp}$ et $(F^{\perp})^{\perp}$.

3) Donner une condition suffisante pour avoir $F = (F^{\perp})^{\perp}$.

© Diane CCINP :

Exercice 1 : Analyse

On considère les fonctions suivantes :

$$f : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt$$
$$\varphi : x \in \Big[1, +\infty\Big[\mapsto \int_{x-1}^{x} \ln(f(t))dt$$

1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

2. Pour $x \geqslant 1$, relier $f(x)$ et $f(x-1)$.

3. Montrer que φ est dérivable sur $[1, +\infty[$ et calculer φ'.

4. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 2} \frac{(-1)^n}{\varphi(n)}$.

Exercice 2 : Algèbre

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$, $f : P \mapsto (X-a)P' + P - P(a)$.

1. Déterminer Ker(f).

2. Déterminer $Im(f)$.

3. Déterminer les éléments propres de f.

Sol analyse calculs "erronés" , idées parfaites :

1) On reconnait $\Gamma(1+x)$, la cie est + simple que ds le cours car plus de pb à gauche.

2) Comme ds le cours $f(x) = (x-1)f(x-1)$, (*) ipp...

3) On coupe en $x = 2$, thm fondamental analyse (""dedans"" c'est cie).

Il vient $\varphi' = \ln(x-1)$, par (*).

φ est donc croissante à partir de $x = 2$, or elle est positive et tend vers l'infini .

La positivité , vient de bornes croissantes et dedans positif.

Vers l'infini car $f(n) = n!$ rec simple (*) et la croissance.

On a ttes les hyp du cssa.

Algèbre :

$E = \mathbb{R}_n[X]$ de dimesion $n+1$ ...

$f(P) = (X-a)P' + P - P(a)$.

0) D'abord on rassure le correcteur , linéarité et contrôle du degré pour valider l'endomorphisme de E.

1) Il se voit que $f(1) = 0$ donc $1 \in \ker(f)$.

On calcule $f(X^k) = (k+1)X^k + ...$ pour remplir la matrice de f dans la base canonique.

Donc sans calculs, la matrice est triangulaire supérieure de diagonale $(0, 2, 3, ..., n+1)$.

Elle est donc immédiatement de rang n.

Le noyau est de dimension 1, $\ker(f) =< 1 >$.

L'image est un hyperplan, mais si on ouvre les yeux, $(f(P))(a) = 0$.

Donc l'image est incluse dans la noyau de la forme linéaire non-nulle qui à Q associe $Q(a)$.

Inclusion et égalité des dimensions, $Im(f) =< (X-a), (X-a)^2, ..., (X-a)^n >$.

On voit dans la matrice, que les valeurs propres (sur la diagonale) sont les $(0, 2, 3, ..., n+1)$.

Donc c'est diagonalisable (vp 2 à 2 distinctes avec bon cardinal)(**).

Le noyau (associé à la vp 0) est connu.

Pour les autres vp, il me vient une idée...

Je regarde $f((X-a)^k) = (k+1)(X-a)^k$. Ça marche !

Rq : les sep sont des droites vectorielles (**) .

© Maximilien CCINP :

Analyse ; $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{t}}{e^t - 1} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_1^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$.

Fait en révisions, géométrique, Fubini...

Algèbre $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,tq $M^2 + M^T = I_n$.

2) Si M symétrique , pver dz $(\mathbb{C})$ et que $tr(M) \neq 0$, et inversible.

3) SS la symétrie , mq dz.

4) Mq M inversible ssi 1 pas vp.

Sol Lundi 27/5/24

© Edouard Mines Ponts.

Exercice 1 : Soit $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et Δ l'endomorphisme de dérivation.

Montrer que les espaces vectoriels stables par Δ sont les $\mathbb{R}_k[X]$ pour $k \in [\![1, n-1]\!]$.

2) Soit E un espace de dimension n avec $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^n = o_{\mathcal{L}(E)}$ et $f^{n-1} \neq o_{\mathcal{L}(E)}$.

a) Justifier qu'il existe x tel que $(x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x))$ soit une base de E.

b) Montrer qu'il existe ε base de E tel que $Mat_\varepsilon(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & \ddots & 0 \\ & & \ddots & & n-1 \\ 0 & & \cdots & & 0 \end{pmatrix}$.

c) Déterminer tous les espaces stables par f dans E.

Exercice 2 :

a) Déterminer la limite de $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{nt(1-t)}{(nt)^2 + (1-t)^2} dt$.

b) $2^{\text{ème}}$ question non traitée avec l'étude des $\sum {I_n}^2$ et $\sum I_n$.

Vincent H (Saclay) : voir 205 rms 23 et exo 62 F10, ccinp 2013 m2 tout y est. A rédiger.

1) Mq $\displaystyle\sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{\sqrt{k(m-k)}} \geqslant \int_1^{m-1} \frac{dt}{\sqrt{t(m-t)}}$.

2) Calculer l'intégrale de droite avec $t = \dfrac{m}{1+u^2}$.

3) On pose $A_n = \left(\dfrac{1}{i+j-1}\right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

En étudiant pour $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), V^T A_n V$.

Mq les vp sont strictement positives.

4) On pose λ^+ et λ^- les plus petites vp .

Mq : $\lambda^- \leqslant \dfrac{1}{n}(a + b\ln(n))$.

Constantes indépendantes de n .

5) On pose $H = (1/\sqrt{1}, ..., 1/\sqrt{n})$.

Calculer $H^T A_n H$ et montrer que $\lambda^+ \geqslant \pi$.

Arthur D (Saclay) : A rédiger. Voir surtout rms 213.

On pose (E) : $y" + qy = 0$ où $q \in \mathcal{C}^2([a, +\infty[, \mathbb{R}_*^+)$.

Avec : $\lim\limits_{+\infty} \int_a^x \sqrt{q(t)}dt = +\infty$.

Et $q'(x) = o\left(q^{\frac{3}{2}}(x)\right)$, en l'infini, hyp peu claire.

Soient y_1 et y_2, $\mathcal{C}^1$, ss racines communes.

On pose $\varphi(x) = y_1(x) + iy_2(x)$ et $\varphi(a) = r_0 e^{i\theta_0}$.

1) Mq $\forall x \in [a, +\infty[$, $\varphi(x) = e^{\psi(x)}$, où $\psi(x) = \displaystyle\int_a^x \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}dt + \ln(r_0) + i\theta_0$.

2) Mq on peut écrire : $y_1(x) = r(x)\cos(\theta(x)), y_2(x) = r(x)\sin(\theta(x))$ sur notre intervalle.

Avec $r(x) = \sqrt{y_1^2(x) + y_2^2(x)}$.

Et $\theta(x) = \theta_0 + \displaystyle\int_a^x \frac{(y_2'y_1 - y_2y_1')(t)}{r^2(t)}dt$.

3) On pose $\tau(x) = \displaystyle\int_a^x \sqrt{q(u)}du$.

Mq τ réalise une bijection de notre intervalle vers $\mathbb{R}_*^+$.

4) Soit y une solution de (E), ss réserve...

Mq $Y = y \circ (\tau^{-1})$ est solution de (E') , $Y" + \varphi Y' + Y = 0$,

où $\varphi(x) = \dfrac{qq'(\tau^{-1}(x))}{2.q^{3/2}}(\tau^{-1}(x))$.

5)6)7)8) 149) 25926475)...

© Arthur D Centrale 1 (ss prépa).

On pose $n > 0, u_n = \displaystyle\int_0^\infty \frac{1 - \cos^n(t)}{t^2}dt$.

On admet $u_1 = \dfrac{\pi}{2}$.

1) Existence de $(u_n)_{\mathbb{N}}$ et valeur de u_2.

2) Mq $u \in [0, 1]$, $\left|1 - \cos^n\left(\sqrt{\dfrac{2u}{n}}\right)\right| \leqslant u$.

3) Mq pour $n > 0$, $u_n = \sqrt{2}\sqrt{n}\int_0^{\infty} \frac{1-\cos^n\left(\sqrt{\frac{2u}{n}}\right)}{u.\sqrt{u}}du$.

En déduire que : $\exists K \in \mathbb{R}$ tq $\underset{0}{\sim} K\sqrt{n}$.

Sol : Exo sympa que je ne connaissais pas.

1) Existence car cie sur l'ouvert et prolongeable par cie en 0.

En l'infini, c'est domniné en va par $\frac{2}{t^2}$.

$u_2 = \int_0^{\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}dt$.

Ipp, crochet cv et nul, $u' = \frac{1}{t^2}, v = \sin^2(t)$.

Qui donne $\int_0^{\infty} \frac{\sin(2t)}{t}dt$, Dirichlet.

Qui elle même sort de u_1 par IPp $v = 1 - \cos(t), u' = \frac{1}{t^2}$.

Tout cela est hyper classique...

2) Application du TAF, $f(u) = \cos^n\left(\sqrt{\frac{2u}{n}}\right)$.

$|f'(u)| \leqslant 1$ après dérivation, majoration du cos par 1 et $\sin(a) \leqslant a$, pour $a > 0$.

Donc $|f(0) - f(u)| \leqslant |u - 0|.\sup\limits_{[0,1]}|f'|$.

3) Erreur d'énoncé ss importance.

On pose $t = \sqrt{\frac{2u}{n}}$, $\mathcal{C}^1$ st croissant bijectif.

Attention aux étourderies de calcul, $u_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{n}\int_0^{\infty} \frac{1-\cos^n\left(\sqrt{\frac{2u}{n}}\right)}{u.\sqrt{u}}du$.

On pense à la cv dominée, hyp classiques faciles.

Pour la domination, on utilise 2) sur $[0,1]$ pour controler par $\frac{1}{\sqrt{u}}$.

Puis sur $[1, +\infty[$ par $\dfrac{2}{u\sqrt{u}}$. Toutes deux intégrables.

La cv simple à u fixé n'est pas si simple...

Le numérateur cv simplement vers $1 - e^{-u}$.

Bref l'intégrale cv vers $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1-e^{-u}}{u\sqrt{u}}$, ouf intégrable ! Gagné .

© Baude Centrale 1 ss préparation.

$E = \mathbb{R}^n$ muni de se sa structure canonique.

$u \in \mathcal{L}(E)$ associée à A dans $\mathcal{B}$ bon.

$u^* \in \mathcal{L}(E)$ associée à A^T dans $\mathcal{B}$.

A' associée à u dans $\mathcal{B}'$ bon.

1) Mq la matrice de u^* dans $\mathcal{B}'$ est $(A')^T$.

En déduire que la définition de u^* est indépendante de la base choisie.

2) Mq $\forall (X, Y) \in E^2, (u(X)|Y) = (X, u^*(Y))$.

Mq cela définit u^*, ie unicité .

3) Soit $w = u^* \circ u$.

Mq w possède n vp positives.

4) Soit λ et μ la plus petite et la plus grande vp de w.

Mq $\forall X \in E, \sqrt{\lambda}\|X\| \leqslant \|u(X)\| \leqslant \sqrt{\mu}\|X\|$.

Sol :

© Heyndericky Centrale 1 sans préparation.

1) On pose $V = \left\{ \begin{pmatrix} x & z \\ y & x \end{pmatrix}, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.

Quelles sont les matrices de V dz ?

2) Matrices de V qui représentent un projecteur orthgonal en base canonique ?

3) On associe à (X, Y, Z) des lois uniformes dans $[\![1, 6]\!]$, indépendantes.

Quelle est la probabilité pour que la matrice soit inversible ?

Sol le même exo a été posé à Th Edouard (Centrale 1 aussi).

© Diane Centrale 1 ss préparation.

Soit E un ev de dimension n et u un endo de E, nilpotent d'indice p.

Soit $v = \sum_{0}^{p-1} u^k$.

1) a) Mq v est bijectif.

b) Déterminer la bijection réciproque de u.

2) Mq $\ker(v - Id) = \ker(u)$.

3) Déterminer le spectre de v.

4) Soit $w = \sum_{0}^{p-1} \frac{u^k}{k!}$.

Montrer sa bijectivité, et donner sa réciproque.

Sol :.

Félix D Centrale 1 ss préparation.

$A = \{f \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R}), f'(x) = x^2 + f^2(x), f(0) = 0\}$.

1) Mq $f(x) = \frac{x^3}{3} + \int_0^x f^2(t)dt \Leftrightarrow f \in A$.

2) On admet l'existence d'une suite f_n telle que $f_0(x) = \frac{x^3}{3}$.

$f_n(x) = \frac{x^3}{3} + \int_0^x f_{n-1}^2(t)dt$.

Mq $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,1],\ f_n(x) \leqslant \frac{2}{5}x$, et $0 \leqslant (f_{n+1} - f_n)(x) \leqslant (f_{n+1} - f_n)(1)$.

3) Mq A est non vide...

Sol : .

© Clavaud Centrale 1 ss préparation.

Soit E ev de dimension n.

1) Supposons l'existence de $\overrightarrow{x}$ tq $(x, u(x), ..., u^{n-1}(x))$ soit libre.

a) Mq $(Id, u, ..., u^{n-1})$ libre ?

b) $(Id, u, ..., u^{n-1}, u^n)$ libre ?

2) Supposons u dz et que $(Id, u, ..., u^{n-1})$ libre.

Mq $\exists x_0 \in E$ tq $(x_0, u(x_0), ..., u^{n-1}(x_0))$ libre.

3) Soit $r > 0$ qcq (pas clair).

Mq $\forall x \in B(x_0, r)$ la famille $(x, u(x), ..., u^{n-1}(x))$ libre.

Rq : A mon premier avis , pver l'existence d'un tel r...

Rq : A mon premier avis , pver l'existence d'un tel r...

Sol : Attention, ne pas confondre avec un exo classique ou u est nilpotent.

Rq : 1) cette famille libre est une base (cardinal), pas sûr que ce soit utile.

a) On écrit une comb lin nulle, on applique sur le x qui précède, les coeff sont nuls !

b) Ne pas tomber ds le piège du cardinal, on est en dim n^2.

Mais Cayley-H nous garantit que le poly caract de degré exactement n annule u...

2) On regarde la matrice diagonalisée, les vp sont 2 à 2 distinctes.

Car par l'absurde, si il y en a "moins", la matrice serait annulée par $\prod_{1}^{q}(X - d_i)$.

Avec q le cardinal des vp restantes, donc u subit le même sort.

On donc u^q comb lin des précédents.

On peut exhiber plusieurs vecteurs valables, mais mon préféré (de loin) est :

$x_0 = \sum_1^n e_i$, $((e_i)_1^n)$ base de dz.

$u^k(x_0) = \sum_1^n d_i^k e_i$, le det de cette famille ds cette base est VDM $\neq 0$.

3) L'application qui à x associe $\det_{(e_i)_1^n}(x, u(x), ..., u^{n-1}(x))$

est cie en tant que composée (bcp) d'objets cies , rq dim finie.

Or elle est non nulle en x_0, donc $\exists r > 0$ tel que elle le reste sur la boule de rayon r.

Gagné ! Bel exo.

Ex1 Analyse :

1) $u_n = \sum_{n+1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$.

Existence et limite.

2) $v_n = \frac{(-1)^n}{n} u_n$, cv de $\sum v_n$?

3) $w_n = \frac{(-1)^n}{n} \sum_1^n \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$.

Cv de $\sum w_n$?

4) $x_n = \frac{1}{n} \sum_1^n \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$.

Cv de $\sum x_n$?

5) Bonus perso : Cv de $\sum u_n$?

Sol :

C'est l'exo 84 de la feuille de réduction, fait au tableau tous les ans.

Berruezo Centrale 1.

$\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne.

$f_{b,c}(t) = (\sqrt{1+c^2}\cos(t), b\sqrt{1+c^2}\sin(t), c)$.

1) Mq $f_{b,c}([0, 2\pi]) \subset S_b$ avec $S_b = \left\{(x, y, z), x^2 + \dfrac{y^2}{b^2} - z^2 = 1\right\}$.

Déterminer le plan tgt à S_b au pt $(1, 0, 0)$.

Déterminer la tgte à la courbe $f_{b,0}([0, 2\pi])$ en $(1, 0, 0)$.

2) On note $L : (b, c) \in \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R} \longmapsto \displaystyle\int_0^{2\pi} \|f'_{b,c}(t)\| dt$.

Mq L est cie, puis calcul de $L(b, 0)$.

Sol : Exo très crescendo...

© Debray CCinp :

Analyse : Soit (a_n) une suite telle $a_0 = a_1 = 1$ et $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$.

1) Mq $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{a_n}{n!} \leqslant 1$, que peut on en déduire sur le rayon de la dse $\displaystyle\sum_0^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$.

2) Etablir l'équa diff sur $]-1, 1[$ (ordre 1).

3) Expressions des a_p en fct de p.

Algèbre :

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tq $f^3 = Id$ et $f \neq Id$.

1) Mq 1 est vp.

2) Mq $\mathbb{R}^3 = \ker(f - Id) \oplus \ker(f^2 + f + Id)$.

3) Matrice : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Sol : 1) Le poly caract est de degré 3 réél, donc au moins une racine réelle (vp).

Or les vp annulent les poly annulateurs ($X^3 - 1$) donc 1 est vp.

2) On peut faire par analyse synthèse, pas très drôle, faite en exo.

On peut aussi (même exo 16) par décomposition des noyaux (Hors prog).

Rq perso $\mathbb{R}^3 = \ker(f - Id) \oplus Im(f - Id)$. exo16.

3) Il y a certainement plus simple que ça...

Si vous avez faites le moi savoir.

Ds la somme directe qui précède aucun sev nul, car 1 vp et $f^3 \neq Id$.

Soit b non nul du 2ème, $f(b)$ est aussi dedans par calcul élémentaire.

La famille $(b, f(b))$ est libre, $\alpha.b + \beta f(b) = \overrightarrow{0}$.

On applique f, on fait une comb lin pour virer b.

On arrive à $(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta) f(b) = \overrightarrow{0}$.

Or $f(b)$ non nul ! Car sinon $b = \overrightarrow{0}$, 0 non vp...

Donc hyper classique du cours $(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta) = 0$ entraine $\alpha = \beta = 0$.

Donc dte à gauche, plan à dte pour raisons dimensionnelles.

On prend une base adaptée à la somme directe : $(a, b, f(b))$.

La matrice n'est pas encore celle désirée $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

J'en cherche une autre...

Je cherche donc un cycle, prenons $u = a + b$, $f(u) = a + f(b)$ nommé w,

$f(w) = a + f^2(b) = a - f(b) - b$ nommé v.

Bien sûr, $f(v) = u$, si la famille est libre, c'est gagné !

On écrit une comb lin nulle, on identifie sur la base adaptée à la somme directe.

Tout est nul ss difficultés.

Analyse : facile

1) Rec triviale donc le rayon excède 1 (attention à ne pas inverser les inégalités).

2) On remplace, équa diff ordre 2 à coeff csts, on résout.

On applique les cond initiales, on trouve f (unique) on dérive on a l'équa diff.

3) Fibonacci suite rec ordre 2 etc...

© CCINP Marie Léo Exo 1 .

$I_n = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\arctan(x+n)}{(x+n)\sqrt{x}} dx.$

Existence, limite, équivalent .

Algèbre.

$A^T + A^2 = I_3$ et $tr(A) = 0$.

1) Mq les vp sont à récolter parmi les racines des polynômes annulateurs.

2) Y-a-t-il une solution ? Kdo tver un poly annulateur.

Sol : Lundi 27 mai 2024

Naïm CCp , voir A Thieulent.

Vite B CCINp : A finir.

Exo 1 : $I = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos(t)}{1+e^t} dt.$

Existence et $I = \displaystyle\sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}.n}{1+n^2}$.

Sol :

Exo 2 :

$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ endo associé en canonique.

1) Mq A non dz mais tz.

2) Donner d'éventuelles droites stables par A.

On note $a' = a_{|F}$, où F est un sev stable par A.

a) Mq $\chi_{a'}$ divise χ_a.

b) Que dire de $\ker(a - 3Id)$?

c) Benjamin ne sais plus, nature de a' ? ?

Sol Algèbre :

© Baude G Mines Exo 1

Soient f et g cies sur $[0,1]$ vers lui-même, qui commutent.

1) Mq $\exists \alpha > 0, \forall x \in [0,1], f^n(x) \geqslant g^n(x) + \alpha n$.

2) En déduire : $\exists c \in [0,1], f(c) = g(c)$...

Sol :

Mines exo 2 algèbre.

Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, telles que $AB = 0$.

1) Mq A et B ont un vecteur propre en commun .

2) Mq A et B sont cotrigonalisables.

Sol :

© Inconnu Mines.

1) Montrer que $(x^n-1)^2 = \prod_{k=1}^{n}\left(x^2 - 2x\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)+1\right)$.

2) Calculer pour $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$.

$$\int_0^{2\pi} \ln\left(x^2-2x\cos(\theta)+1\right) d\theta(\text{ convergence pour } x=1?)$$

3) Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(\theta))d\theta$.

Sol :

© Leo L Mines :

Analyse facile ; On note $f(x) = \sum_0^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}$ et $F(x) = \int_0^x f(t)e^{-t}dt$.

1) Rayon de cv de f et valeur usuelle.

2) Mq F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calcul de F'.

3) Mq F est dse et donner le développement.

Algèbre : 1) $P = X^3 - X^2 + 1$, mq il admet une unique racine réelle notée α.

2) Soit $Q = X^5 + X + 1$, décomposition en facteurs irréductibles en fonction de α.

3) Même question avec $R = X^5 + X^4 + 1$.

4) Approximation de α.

Sol Algèbre :

© Naïm Mines :

$$u_n = \int_0^{\infty} \frac{dt}{\prod_1^n (t+k)}.$$

1) Existence et limite.

2) Mq $\forall x > 0,\, x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.

Mq $\forall a > 0, \exists b \geqslant 0, \forall x \in [0,1],\, e^{ax^2} \leqslant 1 + bx$.

3) Mq $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\prod_1^n (t+k)} \sim \frac{1}{n!\ln(n)}$.

4) Equivalent de u_n.

Algèbre Naïm mines : Trouver les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M + M^T$ soit nilpotente.

Contre exemple sur $\mathbb{C}$.

Sol Algèbre :

Exo 2 : Soient f et g continues de $[0,1]$ dans $[0,1]$ telles que

$$f \circ g = g \circ f$$

1) Mq l'ensemble des points fixes de $f($ et de $g)$ admet un maximum et un minimum.

2) Montrer qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que $f(c) = g(c)$

Sol :

Inconnu ccp. Je peux rédiger, déjà fait.

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$ - espace vectoriel E de dimension finie non nulle.

1) Supposons f diagonalisable, montrer que f^2 est diagonalisable.

2) Supposons f diagonalisable, montrer que $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Ker}(f^2)$.

Soit λ une valeur propre non nulle de f^2, et μ racine complexe de λ.

3) Démontrer que :

$$\operatorname{Ker}\left(f^2 - \lambda Id_E\right) = \operatorname{Ker}(f - \mu Id_E) \bigoplus \operatorname{Ker}(f + \mu Id_E)$$

4) Supposons f^2 dz et inversible, montrer que f est dz et inversible.

5) Supposons f^2 dz, montrer que : f est dz $\Leftrightarrow \operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Ker}(f^2)$

ANALYSE ; Posons

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x))dx$$
$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x)\cos(x))dx$$

1) Montrer que I converge.

2) Montrer que $J = 2I$.

3) Calculer la valeur de I.

VANI ccinp. Je peux rédiger.

Soit $m, p \in \mathbb{N}^+$, on définie l'intégrale :

$$I_{m,p} = \int_0^1 z^p(\ln(z))^m dz$$

et sur $]0,1]$, $\quad f(x) = \dfrac{1}{x^x}$.

Q1) Justifier l'existence de $I_{m,p}$,

Q :2) Montrer la relation pour $m > 1$:

$$I_{m,p} = -\frac{m}{p+1} I_{m-1,p}$$

Q.3) Justifier l'intégrabilité de f sur $[0,1]$.

Q.4) Montrer que $\quad \displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^m}$.

Exercice : On a $(E_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant m}$ base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q.1) Rappeler la définition d'um projecteur.

Q.2) Quelles matrices de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ représentent un projecteur ?

Q3) Montrer que si M est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ alors M s'écrit comme ume combinaison linéaire de projecteurs.

Q 4) Montrer que $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ sont des projecteurs.

Q.5) Une combinaisom linéaire de projecteurs est-elle diagonalisable ?

Sol

Barrault CCINP. A rédiger.

$$E = \varphi^0([-1,1],\mathbb{R}) f(g) = \int_{-1}^{1} g(t)f(t)dt.$$

un produit scalaire sur E.

1. Montrer qu'il existe une famille orthogonale $(Q_m)_m$ de $\mathbb{R}[X]$ tel que $\deg(Q_n) = n$ et le coefficient dominant de Q_n est 1.

b) Il y a -t-il unicité ?

2) Calculer Q_0, Q_1, Q_2, Q_3

3)a). On pose $\hat{f}(t) = f(-t)$

montrer que $(\hat{g} \mid f) = \left(g \mid \hat{f}\right)$.

b) En déduire la parité de Q_n en fonction de n.

Ex2 :

1. Justifier l'existence de l'intégrale $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x - 1} dx$.

2. Montrer que $J = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^3}$.

Gautier Vasse CCINP. A rédiger.

Exercice 1 :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Q1) La matrice M est-elle diagonalisable ?

Q2) La suite $(Tr^n(M))_n$ converge-telle ?

Q3) Soient a et b deux complexes tels que : $R_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$.

Q4) Etudier la suite $(\mathrm{Tr}^n(R(a,b)))_n$.

Déterminer une/des condition(s) sur a et b pour que la suite converge.

Exercice 2 :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{te^{-tx}}{e^t - 1} dt$$

Q1) Déterminer le domaine de définition de f.

Q2) Déterminer sa limite en $+\infty$.

Q3) Calculer $f(x-1) - f(x)$.

Q4) En déduire un DSE de f.

Q5) Trouver d'une autre manière ce DSE.

Thieulent CCINP : 3 élèves concernés. C'est le 719 mines 19.

Exercice 1 :

$$g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{(\mathrm{e}^{-xt} sh(t))}{t} dt$$

1) Donner le domaine de définition de g, noté Dg.

2) Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Dg et calculer g'.

3) Donner la limite de $(g(n))_{n>1}$ en $+\infty$.

4) Donner la valeur de $g(x)$.

Exercice 2 : Soit M les matrices symétriques réelles qui vérifient l'équation :

$$\mathrm{M}^3 + 4\mathrm{M}^2 + 5\mathrm{M} = 0_n$$

1) Justifier que M est diagonalisable.

2) Montrer que les valeurs propres de M sont parmi les racines de

$$P(X) = X^3 + 4X^2 + 5X$$

3) Trouver les matrices M.

© Heinrich CCINP :

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2 \quad / Sp(A) \cap Sp(B) = \varnothing$.

1) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, polynôme annulateur de A.

Montrer que les valeurs propres de A sont racines de P.

2) Montrer que $\chi_A(B) \in GL_n(\mathbb{C})$.

3) Soit $X \in \mathbb{C}^n$. Montier que $AX - XB = 0_{\mathbb{C}^n} \Leftrightarrow X = 0_{\mathbb{C}^n}$.

4) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Montrer qu'il existe un unique $X \in \mathbb{C}^n$ tel que $AX - XB = M$.

Sol :

Exercice 2 : Analyse, vu mais où ? exotd ? ou mines 19 ?

Soit $\varphi : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} \sin(xt)dt$.

1) Vérifier que φ est bien définie sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que φ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

3) Soit $x \in \mathbb{R}$, donner l'expression de $\varphi'(x)$ puis de $\varphi(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.

© Heinrich Centrale 1

Soit $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ continue, décroissante et intégrable , sur $\mathbb{R}^+$.

1) Montrer que, par une comparainon série-intégrale,

$\forall x \in \mathbb{R}^+, \sum\limits_{n\geqslant 0} \varphi(x+n)$ est une série convergente.

2) On pose le problème suivant :

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} f(x+1)+f(x)=\varphi(x) \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0 \end{array} \right.$$

Montrer que l'expresion de f est nécessairement : $\forall x \in \mathbb{R}^+$

$$P(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\varphi(x+n)$$

3) Montrer que $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^m\varphi(x+n)$ satisfait (P).

Conclure (nbre de solution de (P)).

4) Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}_+$.

Sol :

© Léo Marie Mines : Algèbre.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telle que $A^3 = A^2 - 2A$.

Mq que le rang de A est pair.

Sol :

Analyse (Léo mines), exo **très** calculatoire.

1) Etablir : $\lim\limits_{\infty} \displaystyle\int_a^b f(t)\sin(nt)dt$.

Et re : $\lim\limits_{\infty} \displaystyle\int_a^b f(t)\cos(nt)dt$.

Avec $f \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$.

2)a) Calculer $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2nt)}{\tan(t)}dt$.

b) En déduire $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$.

3) Limite et équivalent de : $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(2.\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right)\cos(nt)dt$.

Sol :

© Pôl Lemaire CCINP Voir Vani.

© Pôl Lemaire Mines telecom.

© Retour Lemaire (Mines télécom)

Exo 1 :

$(a,b) \in \mathbb{R}^3, \quad x \in \mathbb{R}^3 \quad , f(x) =< x/a > a + < x/b > b$, (a,b) libre.

Q1) Montrer que f est un endomorphisme autoadjoint.

Q2) Montrer que $\ker(f) = \mathrm{Vect}(a,b))^{\perp}$.

Q3) $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3$.

Q4) si $\langle a/b \rangle = 0$, que dire de f ? Reconnaître sa nature et ses éléments propres.

Q5) et si < a/b > non nul ?

Exo 2 : Soit f dérivable sur $[a, b\,[$, continue en b, $f(a) = f(b)$ et $f'(a) = 0$.

Q1) Montrer que il existe c dans $\mathbb{R}$ tels que, $f'(c) = (f(c) - f(a))/(c - a)$.

Q2) Proposer une interprétation géométrique.

Sol :

© B Vite Mines :

Algèbre : E eve , u endo orthogonal , $v = u - Id$.

1) Mq $\ker(v) = (Im(v))^{\perp}$.

2) Soit $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{0}^{n-1} u^k$.

Mq qu'elle cv vers la projection orthogonale sur $\ker(v)$.

Analyse : $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

1) Mq f est convexe ssi $\forall a \in \mathbb{R}^n, H_f(a) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

2) $a \in \mathbb{R}^n$, tq $f(a)$ min local, alors il est global.

Sol Algèbre :

© Debray Mines :

Analyse : Soit (a_n) une suite telle $a_0 = a_1 = 1$ et $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$.

1) Mq $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{a_n}{n!} \leqslant 1$, que peut on en déduire sur le rayon de la dse $\displaystyle\sum_{0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$.

2) Etablir l'équa diff sur $]-1, 1[$ (ordre 1).

2') Trouver f.

3) Expressions des a_p en fct de p.

Sol :

Sol :

Je mixe les 2 exos quasi similaires avec ccp.

0) Rec facile $a_n > 0$.

1) Rec forte et aisée $a_n \leqslant n!$

On en déduit que le rayon dépasse 1.

2) On va trouver $f'(x) - (1+x)f(x) = 0$.

Pour l'obtenir, on écrit $f(x) = \sum_0^\infty \frac{a_n}{n!} x^n$.

On dérive ds l'ouvert de cv, donc au moins dans $]-1, 1[$.

Donc $f'(x) = \sum_0^\infty \frac{a_{k+1}.x^k}{k!} = 1 + \sum_0^\infty \frac{a_{k+2}.x^{k+1}}{(k+1)!}$, on utilise le départ :

C'est bon : $f'(x) - (1+x)f(x) = 0$.

Ce qui confirme que le rayon est 1.

On résout : $f(x) = \lambda e^{x+\frac{x^2}{2}}$, sensation de déjà vu ? ? ?

Rq : $a_0 = 1$ donc $f(0) = 1$, bref $\lambda = 1$.

3) Pour avoir le dse, produit de Cauchy de séries entières cvtes

(ouvert plus petit rayon)(peu amusant).

Ressemblance avec mines 2022 , 695.

$$e^t e^{\frac{t^2}{2}} = \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{t^p}{p!}\right)\left(\sum_{q=0}^{+\infty} \frac{t^{2q}}{2^q q!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p+2q=n} \frac{1}{2^q p! q!}\right) t^n$$

4) On peut alors séparer en pairs, impairs, on a les coeff...

On peut alors les expliciter comme somme sur une lettre muette.

Exo 2 Debray mines, on est en plein délire, exo qualifié en classe de Béton armé.

C'est le 9 feuille 8 ...Je redonne.

Exercice 9. Montrer que, pour tout $x \geqslant 0$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t} dt$

En déduire $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t} dt$.

1. (a) Appliquons le théorème de continuité des intégrales à paramètre.

- Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $x \to \frac{e^{-xt}}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, la fonction $x \to \frac{e^{-xt}}{1+t^2}$ est cpm sur $\mathbb{R}_+$.

- On a

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \left| \frac{e^{-xt}}{1+t^2} \right| = \frac{e^{-xt}}{1+t^2} \leqslant \frac{1}{1+t^2}$$

La fonction $t \to \frac{1}{1+t^2}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+$;

elle est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, car $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} \int_0^A \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ existe et vaut $\pi/2$.

Cela fournit l'hypothèse de domination.

On en déduit que f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

(b) Pour tout $x > 0$, on peut écrire :

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-xt}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{e^{-xt}}{x} \right]_{t=0}^{t=+\infty} = \frac{1}{x}$$

On en déduit $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

(c) Notons $\varphi : (x,t) \to \frac{e^{-xt}}{1+t^2}$ et appliquons le caractère local sur des segments,

pour établir que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

- Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $x \mapsto \varphi(x,t)$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_*^+$.

$\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t) = -\frac{te^{-xt}}{1+t^2}$ et $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x,t) = \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^2}$.

- Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $p \in [0,1]$.

La fonction $t \mapsto \frac{\partial^p \varphi}{\partial x^p}(x,t) = \frac{(-t)^p e^{-xt}}{1+t^2}$ est continue par morceaux, car continue, sur $\mathbb{R}_+$.

Comme $\frac{(-t)^p e^{-xt}}{1+t^2} \sim (-1)^p t^{p-2} e^{-xt} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$, au voisinage de $+\infty$, elle est intégrable sur cet intervalle, par comparaison aux intégrales de Riemann.

- La fonction $t \mapsto \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x,t) = \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^2}$ est continue par morceaux, car continue, sur $\mathbb{R}_+$.

- Soit $[a,b]$ un segment inclus dans $\mathbb{R}_+^*$. On a :

$$\forall (x,t) \in [a,b] \times \mathbb{R}_+^*, \left| \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x,t) \right| = \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^2} \leqslant e^{-xt} \leqslant e^{-at}$$

La fonction $t \mapsto e^{-at}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$;

d'où l'hypothèse de domination sur tout segment pour $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$.

Par suite, f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x,t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^2} \, \mathrm{d}t$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+^*, f''(x) + f(x) &= \int_0^{+\infty} \left(\frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^2} + \frac{e^{-xt}}{1+t^2} \right) \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-xt} \, \mathrm{d}t = \left[-\frac{e^{-xt}}{x} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

On peut donc conclure que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f''(x) + f(x) = \frac{1}{x}$$

- Pour $x > 0$, la fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{x+t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Pour $x = 0$, la fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ car,

au voisinage de 0 , on a $\sin t \sim t$.

Cela assure, pour $x \in \mathbb{R}_+$, l'existence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin t}{x+t} \, \mathrm{d}t$.

Fixons $x \geqslant 0$ et justifions la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t} \, \mathrm{d}t$, à l'aide d'une IPP :

- Le crochet $\displaystyle\left[-\frac{\cos t}{t+x} \right]_{t=1}^{t=+\infty}$ existe et vaut $\displaystyle\frac{\cos 1}{1+x}$.

* On a, pour tout $t \geqslant 1$: $\displaystyle\left| \frac{\cos t}{(t+x)^2} \right| \leqslant \frac{1}{(t+x)^2} \leqslant \frac{1}{t^2}$.

On en déduit la convergence absolue de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{(t+x)^2} \, \mathrm{d}t$,

par comparaison aux intégrales de Riemann.

Par suite, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t}\,\mathrm{d}t$ converge et l'on a :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t}\,\mathrm{d}t = \frac{\cos 1}{1+x} - \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{(t+x)^2}\,\mathrm{d}t$$

On a donc établi la convergence, pour tout $x \geqslant 0$, de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t} dt$

- Pour tout $x > 0$, la fonction $\psi :]x, +\infty[\to]0, +\infty[$, définie par $\psi(u) = u - x$

est une bijection strictement croissante, de classe $\mathcal{C}^1$.

D'après le théorème changement de variable, on peut donc écrire :

$$\begin{aligned}
g(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_x^{+\infty} \frac{\sin(\psi(u))}{x+\psi(u)} \psi'(u)\mathrm{d}u = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(u-x)}{u} du \\
&= \int_x^{+\infty} \frac{\cos x \sin u - \sin x \cos u}{u} du
\end{aligned}$$

En procédant comme dans l'étude précédente, on établit la convergence

des intégrales $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u$ et $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,\mathrm{d}u$. On peut donc écrire :

$$g(x) = \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,\mathrm{d}u$$

Comme les fonctions $u \mapsto \frac{\sin u}{u}$ et $u \mapsto \frac{\cos v}{v}$ sont continues sur $\mathbb{R}^*$,

, on deduit thm fondamental analyse, que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*+$ avec, pout, tout $x > 0$:

$$\begin{aligned}
g'(x) = &- \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u - \frac{\cos x \sin x}{x} \\
&- \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,\mathrm{d}u + \frac{\sin x \cos x}{x} \\
= &- \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u - \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

La fonction g' est de même de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec, pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} g''(x) &= -\cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\ \mathrm{d}u + \frac{\sin^2 x}{x} \\ &\quad + \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\ \mathrm{d}u + \frac{\cos^2 x}{x} \\ &= -\ g(x) + \frac{1}{x} \end{aligned}$$

La fonction g est donc solution, sur $\mathbb{R}_+^*$, de la même équation différentielle que f :

$$y'' + y = \frac{1}{x}$$

Fixons $x \geqslant 0$ et effectuons une intégration par partie.

De $\left|\dfrac{1-\cos t}{t+x}\right| \leqslant \dfrac{1-\cos t}{t}$ pour $t > 0$, on tire $\lim\limits_{t\to 0}\left(\dfrac{1-\cos t}{t+x}\right) = 0$,

car $\dfrac{1-\mathrm{cost}}{t} \sim \dfrac{t^2/2}{t}$, an voisinage de 0 .

De $\left|\dfrac{1-\cos t}{t+x}\right| \leqslant \dfrac{2}{t}$ pour $t > 0$, on tire $\lim\limits_{t\to +\infty}\left(\dfrac{1-\cos t}{t+x}\right) = 0$.

Par suite, le crochet $\left[\dfrac{1-\cos t}{t+x}\right]_0^{+\infty}$ existe et vaut 0.

On déduit du théorème d'IPP la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{(t+x)^2}\ \mathrm{d}t$ et l'égalité :

$$g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x}\ \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{(t+x)^2}\ \mathrm{d}t$$

- Appliquons le théorème de continuité des intégrales à paramètre.

* Pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto \frac{1-\ \cos t}{(t+x)^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, la fonction $t \mapsto \frac{1-\cos t}{(t+x)^2}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$.

- On a :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*, \left|\frac{1-\cos t}{(t+x)^2}\right| = \frac{1-\cos t}{(t+x)^2} \leqslant \frac{1-\cos t}{t^2}$$

La fonction $\varphi : t \mapsto \dfrac{1-\cos t}{t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Comme $\dfrac{1-\cos t}{t^2} \sim \dfrac{t^2/2}{t^2} = \dfrac{1}{2}$, au voisinage de 0,

la fonction φ a un prolongement continu sur $\mathbb{R}_+$, donc est intégrable sur $]0, 1]$.

On a $\varphi(t) = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$, au voisinage de $+\infty$; on en déduit,

par comparaison aux intégrales de Riemann, l'intégrabilité de φ sur $[1, +\infty[$.

Ainsi φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Cela fournit l'hypothèse de domination.

On peut donc conclure que g est continue sur $\mathbb{R}_+$.

- On a :

$$\forall x > 0 \quad 0 \leqslant g(z) \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{2}{(t+x)^2} dt = \left[-\frac{2}{t+x}\right]_0^{+\infty} = \frac{2}{x}$$

On en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$.

- Posons $h = f - g$. D'après les questions précédentes, la fonction h est continue sur R_+,

de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ et est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle :

$$y'' + y = 0$$

On en deduit l'existence de $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x > 0 \quad h(x) = a \cos x + b \sin x$$

D'après l'étude précédente, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 0$.

Il en résulte que les deux suites $(h(2n\pi))_{n \in \mathbb{N}}$ et $\left(h\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ tendent vers 0 ;

comme $h(2n\pi) = a$ et $h\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = b$, il vient $a = b = 0$, d'où $h = 0$.

sur $\mathbb{R}_*^+$. Puis sur $\mathbb{R}^+$, par continuité en 0 .

On a donc êtabli que les fonctions f et g sont égales sur $\mathbb{R}_+$.

Coume $f(0) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = [\text{ Arctan } t]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$, on en déduit que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \,\mathrm{d}t = g(0) = \frac{\pi}{2}$$

Debray Th Centrale 1. A faire.

On considère la matrice M réelle tél que :

$$\begin{aligned} Mii &= c \\ Mij &= \text{ a } \quad si \quad i > j \\ Mij &= \text{ b } \quad sinon \end{aligned}$$

On note $f(z) = \det(zJ - Mij)$.

J que des 1.

1) Mq que f est une fonction polynomiale de degré 1.

2) On prend c = 0, mq M est DZ.

3) Mq les valeurs propres de M sont incluses soit dans un cercle soit dans une droite.

Vuidel CCINP :

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \neq 0$, $f_n(x) = \frac{(1+\frac{x}{n})^n - 1}{x}$. $I_n = \int_0^1 f_n(x)$.

1) Existence de I_n.

2) Mq $\lim_{\infty} I_n = \sum_1^{\infty} \frac{1}{k.k!}$.

Algèbre :

$A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A^2 = A^T$, inversible, $A \neq I_2$.

1) Polynôme annulateur.

2) Mq les vp sont des racines des poly annu...En déduire le spectre de A.

3) Mq A est orthogonale.

4) Déterminant de A, puis que vaut A.

Sol :

1) Attention piégeux, n fixé ! La fct tend vers 1 en 0 donc cie !

Kdo : exp de ln, puis $(e^u - 1) \underset{0}{\sim} u$. Bref I_n existe.

A x fixé (cv simple) Comme en 1) vers $x \mapsto \dfrac{e^x - 1}{x}$

qui est intégrable car cie sur un segment.

Or $\ln(1+u) \leqslant u$ donc $f_n(x) \leqslant \dfrac{e^x - 1}{x}$, TCD , $\lim\limits_{\infty} I_n = L = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^x - 1}{x} dx$.

Je dévellope $e^x - 1$ en dse. $L = \displaystyle\int_0^1 \sum_1^{\infty} \frac{x^{k-1}}{k!}$.

Ss réserve d'interversion $L = \displaystyle\sum_1^{\infty} \int_0^1 \frac{x^{k-1}}{k!} = \sum_1^{\infty} \frac{1}{k.k!}$.

Le thm de Fubini (T à T) s'applique car la série des $\displaystyle\int |g_k|$ cv.

Algèbre :

1) $A^4 = (A^2)^T = A$, donc $X^4 - X$ est recevable, mais A inversible donc $A^3 - I = 0$.

Donc A est $\mathbb{C}$ dz car annulée par poly scindé simple.

Mais on peut faire mieux, si 1 est vp comme la trace est réelle , l'autre aussi seul 1.

Donc $A = I_2$ impossible, bref $1 \notin sp(A)$, $A - I$ est donc inversible.

Poly annulateur $X^2 + X + 1$.

2) C'est du cours à maîtriser à la perfection car hyper réccurent.

Les vp ($\mathbb{C}$) recevables sont donc incluses ds $\{j, j^2\}$.

3) Comme $A^3 = I$, $A^2.A = I$, $A^T.A = I$.

4) Le det de la transposée est celui de A donc $\det^2(A) = \det(A)$ et A inversible.

$\det(A) = 1$. A est donc une rotation en dim 2, or $R_\theta^3 = I$, $\theta = \pm\dfrac{2\pi}{3}$. Car pas I_2.

Réciproque ok.

5) Les délires à éviter :

A^2 et A^T commutent sont sont codz.

Donc $\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ donc $a = 1, b = 1$ c'est I_2 , impossible.

Où est l'erreur ? L'ordre des vp...$a^2 = \overline{a}$...

© Hue Corentin CCINP :

On introduit l'application sur $[0, +\infty[$

$$f_n : x \mapsto \frac{x^n \mathrm{e}^{-x}}{n!}$$

a) Etudier les convergences de la suite de fonctions (f_n).

b) Etudier les convergences de la série de fonctions $\sum f_n$.

Sol :

Algèbre :

$\mathbb{E} = \mathbb{R}_n[X]$, $\phi : P \longmapsto P(1 - X) + P(0)X^n$.

1) ϕ endo et matrice base canonique.

2) En étudiant ϕ^2, mq A^2 est triangulaire supérieure.

3) a) Mq si λ vp de ϕ alors λ^2 vp de ϕ^2.

b) Mq si λ est vp de A^2, $\pm\sqrt{\lambda}$ est vp de A.

Sol peu clair, pb énoncé (oui) ?

Sol :

© Soyer Mines telecom :

Analyse : 1) DSE de $\int_0^x e^{-t^2}dt$.

2) Valeur à 10^{-3} près de $\int_0^1 e^{-t^2}dt$.

Sol :

Algèbre $\Phi(M) = tr(AM)$, $\Psi(M) = M + tr(AM)B$.

$A \neq 0$, $B \neq 0$, $tr(A) \neq 0$.

1) Nature de Φ.

2) Mq $\ker(\Phi)$ est un sep de Ψ.

Noyau de Φ.

3) Conclure.

Sol 1)

© Vuidel Léo : Mines Telecom.

Proba-Algèbre : X, Y va indépendantes, géométriques de paramètre $0 < p < 1$.

$$M = \begin{pmatrix} X & Y & 0 \\ 4Y & X & 0 \\ 0 & 0 & X-Y \end{pmatrix}.$$

Probabilité qu'elle soit inversible ?

Sol :

Analyse : g cie sur $[0,1]$, $G(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 |x-t|g(t)dt$.

1) Mq G est $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$. G".

2) Unicité d'une fonction tq $f(0) = f(1) = f'(0) = 0$...

© Barrault Martin Centrale 1 : Bô!!

Soit $(u_n)_{\mathbb{N}}$ définie par $u_0 > 0$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\arctan(u_n)$.

1) Mq $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_0 2^{-n}$.

En déduire, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = -\ln(2) + \mathcal{O}(u_n^2)$.

2) Mq $\exists C > 0$, tq $u_n \sim \dfrac{C}{2^n}$.

En posant $u_n = \dfrac{C}{2^n}(1 + \varepsilon_n)$.

3) Mq $\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n = \dfrac{-C^2}{3.4^n}$????

En déduire que $u_n = \dfrac{C}{2^n} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{8^n}\right)$.

Sol :

Hue Corentin Centrale 1 (pareil que Bourdon).

On définit $2n$ va indépendantes $(X_i)_1^{2n}$, de mêmes loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.

On note $(U_k = 1) = \displaystyle\bigcap_1^{2n}(X_i \neq k)$, à valeurs ds $\{0, 1\}$.

Et on note $F_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_1^n U_k$.

1) Donner la loi des U_k, espérance de F_n et sa limite.

2) Variance de F_n et sa limite.

3) Mq $\lim\limits_{\infty} \mathcal{P}(|F_n - e^{-2}| \geqslant \varepsilon) = 0$.

Sol :

© Naïm Centrale 1 . Bel exo , jamais croisé.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Etude des variations du poly caractéristique, une racine réelle ?, scindé ?

On note (a, b, c) les racines avec $a \in \mathbb{R}$.

2) a) $a^n + b^n + c^n \in \mathbb{N}$.

b) Mq $\sum \sin(\pi a^n)$ cv.

Sol :

© Titouan F Centrale 1

1) Prouver la cv de $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))dt$.

2) Pour $n \geqslant 2$, $P_n = \displaystyle\prod_1^{n-1} \left(\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\right)$.

Mq $\displaystyle\lim_\infty \frac{\pi}{2n} \ln(P_n) = I$.

Mq $P_n^2 = 2^{2n-1} P_{2n}^2$.

En déduire I.

Sol :

Titouan F : X

Soient $(\lambda_i)_1^p \in \mathbb{R}^*$, $(\rho_i)_1^p \in \mathbb{R}^*$.

$f(x) = \displaystyle\sum_1^p \rho_i exp(\lambda_i x)$.

1) Mq f admet au plus $p - 1$ racines.

2) Soit P polynôme réel avec p coeff non nuls, mq P admet au plus $2p - 1$ racines.

Sol :

Rq : un exo raisonnable avant sur Fibonacci déguisé.

Titouan ENS Ulm

Voir exo rms 193, le même posé à un autre élève, même syntaxe.

E un $\mathbb{C}$ ev de dime finie $n, f \in \mathcal{L}(E)$. On pose $\forall g \in \mathcal{L}(E)$, $\varphi_f(g) = f \circ g - g \circ f$.

a) Calculer $\varphi_f^n(g)$ pour $g \in \mathcal{L}(E)$.

b) Montrer que $f^{n+1} \circ g - g \circ f^{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f^k(f \circ g - g \circ f) f^{n-k}$.

c) On suppose f non inversible. Montrer que f est nilpotente si et seulement si φ_f l'est.

d) Mq, si f possède une unique valeur propre, alors φ_f est nilpotente.

Étudier la réciproque.

Sol :

© Léo Marie Centrale 1

En dimension n, soit un endo tq $u^2 = 0$. $rg(u) = r$.

1) Mq $r \leqslant \frac{n}{2}$.

2) Mq il existe une base $\mathcal{B}$, tq $Mat(u, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3) Déterminer le commutant de u.

Sol : Exo hyper classique , le "même" a été fait en cours, en révisions, en dm...

1) Par thm du rang ! Rq : $Im(u) \subset \ker(u)$.(*)

2) Soit $(e_i)_1^r$ une base de $Im(u)$, soit $(a_i)_1^r$, leurs antécédents.

Je complète $(e_i)_1^r$ en une base de de $\ker(u)$ cf (*).

Je regarde $(e_i)_1^r, (e_i)_{r+1}^{n-r}, (a_i)_1^r$, bon cardinal et libre ! ! !

Et on regarde la matrice en cette base , ben oui, ça roule...

3) Pour le commutant qui sera tjs un sev, on passe par blocs pour chercher

les matrices qui communtent.

Legall Centrale 1 : Classique .

Soit $F(x) = \sum_1^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n^2+n}$.

1) Existence sur $\mathbb{R}^+$.

2) Continuité sur $\mathbb{R}^+$.

3) Classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_*^+$.

4) Donner F" (équa diff) , F', F.

Question de cours : Taylor avec reste intégral.

Sol :

Maintenant extérieur Beos

Centrale 1 extérieur

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $\sum a_n$ soit absolument convergente.

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ et $A = \lim_{n\to+\infty} A_n$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer la convergence de $\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t$, puis calculer sa valeur.

2. Montrer que $\sum \frac{a_n}{n!} t^n$ et $\sum \frac{A_n}{n!} t^n$ ont un rayon de convergence infini.

3. On pose pour tout réel t :

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} t^n \text{ et } g(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A_n}{n!} t^n.$$

a) Montrer que f et g sont dérivables et vérifient :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f'(t) = g'(t) - g(t)$$

b) Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}, \int_0^t f(u)\mathrm{e}^{-u}\ \mathrm{d}u = \mathrm{e}^{-t}(g(t) - f(t)$.

4. Montrer que $\int_0^t f(u)\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u \xrightarrow{t\to+\infty} A$

Centrale 1 extérieur

Exo 8 feuille 12 béton...

Centrale 1 extérieur

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}$, soit u un endomorphisme de E, soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E, on note A la matrice de u dans $\mathcal{B}$.

On définit u^* l'endomorphisme tel que sa matrice dans $\mathcal{B}$ soit $A^\top$.

1- Soit $\mathcal{B}'$ une autre base orthonormée de E, A' la matrice de u dans cette base, montrer que la matrice de u^* dans $\mathcal{B}'$ est $(A')^\top$. En déduire que la définition de u^* ne dépend pas de la base orthonormée dans laquelle sont décrites les matrices.

2- Montrer la proposition suivante :

$$\forall (X,Y) \in E^2, (u(X) \mid Y) = (X \mid u^*(Y)) .$$

Montrer que si un endormorphisme v vérifie cette proposition alors $v = u^*$.

3- On pose $w = u^* \circ u$, montrer que w a n valeurs propres comptées avec multiplicité et que ces valeurs propres sont positives.

Centrale 1 ext

On définit $G = \{M \in \mathcal{M}_2(C) \mid \det(M) = 1\}$.

Soient A et B dans G, de même trace α.

1.a. Donner une condition suffisante sur α pour que A soit dz. Est-elle nécessaire ?

b. Donner une cns sur α pour que A et B soient semblables. Est-elle nécessaire ?

Soit ϕ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ telle que :

$\phi : \mathbb{R} \longrightarrow M_2(C), t \longmapsto \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix}$; on a donc, pour tout $t, \phi'(t) = \begin{pmatrix} a'(t) & b'(t) \\ c'(t) & d'(t) \end{pmatrix}$.

2. Soit $M \in M_2(\mathbb{C})$ mq l'application $t \to M\phi(t)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et précisez sa dérivée.

3. Soit $A \in G$ de trace nulle. Montrez l'existence de ϕ de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans G vérifiant :

$$\begin{cases} \forall (s,t) \in \mathbb{R}^2 \quad \phi(s+t) = \phi(s)\phi(t) \\ \phi(0) = I_2 \quad \text{et} \quad \phi'(0) = A \end{cases}$$

Centrale 1 ext

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $\sum a_n$ soit absolument convergente.

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, A_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$ et $A = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} A_n$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$, puis calculer sa valeur.

2. Montrer que $\displaystyle\sum \frac{a_n}{n!}t^n$ et $\displaystyle\sum \frac{A_n}{n!}t^n$ ont un rayon de convergence infini.

3. On pose pour tout réel t :

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!}t^n \text{ et } g(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A_n}{n!}t^n.$$

a) Montrer que f et g sont dérivables et vérifient :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f'(t) = g'(t) - g(t)$$

b) Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}, \displaystyle\int_0^t f(u)\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = \mathrm{e}^{-t}(g(t) - f(t))$.

4. Montrer que $\displaystyle\int_0^t f(u)\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u \xrightarrow{t\to+\infty} A$.
