Centrale 2 Certains énoncés version torchon.

Clavaud P

Soient $p_1 < ... < p_k$ des entiers non nuls.

$A_n = \{(n_1, ..., n_k) \in \mathbb{N}^k | \sum p_j n_j = n\}$, $a_n = card(A_n)$, $f(x) = \sum\limits_0^{\infty} a_n x^n$.

1) Soit $\alpha \in \mathbb{C}, p \in \mathbb{N}$.

Pour $|z| < 1$ mq, $\dfrac{1}{(z-\alpha)^p} = \sum\limits_0^{\infty} u_n x^n$, $u_n =?$, équivalent de u_n en l'infini.

2) Dans un match de rugby, les australiens ont marqué 142 pts.

Ecrire une fct Python qui compte le nombre de combinaisons possibles , essais, pénalités...

3) Mq pour $k = 3$, $\forall n \geqslant 1, a_n = \sum\limits_0^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} \left(1 + \left\lfloor \dfrac{n-3i}{2} \right\rfloor\right)$.

Equivalent de a_n en l'infini.

4) Cas général : Mq $a_n = O(n^k)$, rayon de cv de f ?

Mq pour $k = 2$, $f(x) = \prod\limits_0^{k} \dfrac{1}{1 - x^{p_i}}$. Kdo produit de Cauchy.

Adrien Le Derf

Soit $A \subset \mathbb{N}$, on pose $\sum a_n x^n$ avec $a_n = 1$ si $n \in A$, 0 sinon.

1) Mq le rayon dépasse 1.

On note f_A la fct concernée, et on suppose que les élts de A sont tq $\lim\limits_{1^-}(1-x)f_A(x)$ existe.

On la note $P(A)$.

2)a) Mq $\emptyset$ et $\mathbb{N}$ sont là et calculer les limites concernées.

b) Mq $A \subset B \Rightarrow P(A) \leqslant P(B)$.

c) Mq $P(A) \in [0, 1]$.

d) Soient A, B disjoints , déterminer $P(A \cup B)$.

e) Déterminer $P(\overline{A})$.

Soit A l'ensemble des carrés en partant de 0.

3)a) Ecrire une fonction Python qui calcule $f_A(x)$.

b) Conjecturer $P(A)$.

c) Par comparaison série intégrale, déterminer un équivalent en 1 de f_A.

Alexandre

On considère une pièce avec une probabilité $p \in]0, 1[$ de faire Pile et q de faire Face.

Pour $n > 0$, E_n événement 2 Pile consécutifs n'ont pas été obtenus après n lancers.

$p_n = \mathcal{P}(E_n)$.

1) Ecrire une fonction Python qui prend (p, n) en arguments et qui renvoie

True si E_n réalisé et False sinon.

2)a) $n > 0$, mq $p_{n+2} = pqp_n + qp_{n+1}$.

b) Mq 2 Piles consécutifs seront obtenus est un événement certain.

c) On note T la variable aléatoire qui prend en valeur le rang

de la première obtention de deux Pile.

Modifier votre fonction python pour qu'elle renvoie T.

3) Donner la fct génértrice de T en fonction de p.

4) ?

Yann

1) Écrire une fonction prenant en argument un entier naturel n > 1 , qui crée la liste des entiers naturels de 0 à $n-1$ puis qui retire un entier de la liste en utilisant une loi uniforme. (on pourra utiliser la commande list.remove(a) qui enlève la première occurence de a dans list.)

2) Écrire une fonction qui itère la manoeuvre précédente tout en remplissant une nouvelle liste des éléments retirés de la première liste.

Que simule cette fonction ?

3) Soit S_n l'ensemble des permtuations de $0, [\![\mathrm{n}-1]\!]$.

A. Quel est le cardinal de S_n ?

B. Écrire une fonction renvoyant le nombre de points fixes d'une permutation de $[\![0, n-1]\!]$.

Notons $f \in S_n$ et $\mathrm{Sn}(f)$ le nombre de points fixes de f.

C. Soit $N \in \mathbb{N}$. Écrire une fonction qui renvoie la liste $[\mathrm{Sn}\,(f_k)]_{0 \leqslant k < N}$.

D. Calculer la moyenne des valeurs de la liste pour n $= 10$ et N $= 500$.

E. Conjecturer la valeur de $E(Sn(f))$.

F. Démontrer ce résultat. On pourra notamment utiliser les variables $X_i(f)$ qui prennent la valeur 1 si i est un point de fixe de f et 0 sinon.

4) Calculer la variance de $\mathrm{Sn}(f)$.

5) Que valent $P(Sn = n)$ et $P(Sn = n-1)$?

PS : Il y avait encore 3 ou 4 questions derrière, que je n'ai pas eu le temps de traiter.

Diane D

On pourra effectuer les importations suivantes :

import numpy as np

import pyplot.lib as plt

from numpy.Polynomial import Polynomial

(1) (a) On considère f et g définies sur [a,b] et σ une subdivision $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b$ de [a, b]. Ecrire une fonction Python qui renvoie max $\{|f(t_i) - g(t_i)|, i$ dans $[\![0, m]\!]\}$.

(b) On considère maintenant que f est continue et croissante sur [a,b]. Soit $\varepsilon > 0$. Justifier qu'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ et $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b$ tels que $\forall i \in [\![1, m]\!], f(t_i)\ f(t_{i-1}) \leqslant \varepsilon$. Ecrire une fonction Python renvoyant une telle subdivision.

(2) On considère une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues et croissantes sur [a,b] et convergeant simplement sur [a, b] vers f.

(a) Montrer que f est croissante sur [a, b].

(b) Soit $x \in [a, b]$. Montrer que $\exists i \in [\![1, m]\!]$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, f_n(t_{i-1}) - f(t_{i-1}) - \varepsilon \leqslant f_n(x) - f(x) \leqslant f_n(t_i) - f(t_i) + \varepsilon$$

(c) Je ne sais plus.

(3) On considère une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $P_0 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1} : t \mapsto \frac{1}{2}\left(P_n(t)^2 + t\right)$$

(a) Mq cette suite converge uniformément sur [0, 1] vers une fonction à déterminer.

(b) On considère Q vérifiant j'ai oublié cette partie.

Tracer la courbe de Q sur [0, 1] sur Python.

Paul de Bouet

Soit $M \in M_n(R)$,on définit la suite u_k par $u_k(M) = \dfrac{\mathrm{tr}\left(M^{k+1}\right)}{\mathrm{tr}\left(M^k\right)}$.

Pour calculer les k premiers termes on a cet algorithme :

```
def quotrace( M, k) :
    u=[]
    for i in range(0,k+1):
```

```
      Mk=alg.matrixpower(M,i)
      Mkp1=Mk.dot(M)
      u.append(np.trace(Mkp1)/np.trace(Mk))
  return u
```

En quoi cet algorithme est-il maladroit ?

Refaites-le de manière à ce qu'il y ait au plus k produits matriciels.

2.a) On suppose que le polynôme caractéristique de M est scindé et ses racines sont $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. (on ne donnait pas d'information si complexes ou réelles, simples ou doubles).

On suppose de plus que $|\alpha_1| > \max\limits_{2 \leqslant k < n} (|\alpha_k|)$. Montrer que la suite u converge vers α_1

2.b) Qu'en est-il si $\alpha_1 = \alpha_2$ et $|\alpha_1| > \max\limits_{3 \leqslant k \leqslant \mathrm{n}} (|\alpha_k|)$?

3) Que peut-on dire quant à la convergence de u si M est la matrice d'une symétrie vectorielle par rapport à un plan dans $\mathbb{R}^3$?

Ensuite 2 matrices A et B dans $M_n(\mathbb{Z})$ dont je ne me souviens pas des coefficients.

4.a) Calculer $u_k(A+B), u_k(A), u_k(B)$ pour k variant de 5 à 20. Emettre une conjecture.

(La conjecture était : $u_k(A+B) = u_k(A) + u_k(B)$)

4.b) Montrez à la main que A et B possède un vecteur propre commun.

... d'autres questions, je m'en souviens plus

Démontrer la conjecture

Bourdon

$E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$.

Pour $f \in E$, $T(f) : x \mapsto \dfrac{1}{2}\left(f(x) + f\left(\dfrac{x+1}{2}\right)\right)$.

Pour $x \in]0,1[$, $h(x) = \left(\dfrac{\pi}{\sin(\pi.x)}\right)^2, g(x) = \displaystyle\sum_{\mathbb{Z}} \dfrac{1}{(n-x)^2}$.

On souhaite démontrer que $h = g$.

1) Avec Python montrer l'égalité sur $]\varepsilon, 1-\varepsilon[$, ε petit, utiliser une somme partielle.

2) Mq les valeurs propres de T sont dominées par 1.

3) Mq g est cie sur $]0,1[$.

Mq : $g-h$ est prolongeable par cie en 0 et 1 .

Utiliser un dévelop asymtotique de h en 0.

4) Calculer $T(g-h)$, conclure.

5) Avec Python, écrire un programme renvoyant $T^n(f)$, composition.

Lauschke

On note Σ l'ensemble des suites tq $\forall k \leqslant 2, u_k = \frac{1}{k}(2u_{k-1} + (k-2)u_{k-2})$.

1)a) $\sum$ ev ? b) Dimension ?

2)a) On note $u(a,b)$ la suite telle que $u_1 = a$ et $u_2 = b$.

Calculer $u_n(a,a)$.

Que manque-t-il pour caractériser Σ ?

3) On note $A_n = \displaystyle\sum_1^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

Sur Python :

a) Ecrire une fonction qui renvoie $u_n(a,b)$.

b) Ecrire une fonction qui renvoie A_n.

c) Pour $n \in [\![2,20]\!]$, calculer $u_n\left(1, \dfrac{3}{2}\right) - 2A_n$, conjecture ?

4) Mq $u_n(a,b)$ est bornée.

II) On note $f_u(x) = \displaystyle\sum_1^{\infty} u_k x^k$.

1) Mq la série a un rayon strict positif.

2) Mq la série vérifie dans l'ouvert de cv :

$(1-x^2)f_u'(x)+2f_u(x)=2(u_1-u_2)x-u_1$

Mq sans calcul $x \longmapsto \dfrac{x}{1-x}$ est sol de $(1-x^2)y'+2y=-1$ sur $]-1,1[$.

3) On prend $u_n\left(1,\frac{3}{2}\right)$, calculer f_u .

En déduire u_n.

Defresne

On admet que $<P;Q>=\displaystyle\int_0^1 PQ(t)dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

1) Montrer l'existence d'une BON $(P_k)_0^n$ telle que $\forall k, deg(P_k)=k$.

2) Mq $\forall k>0$, $P_k \perp \mathbb{R}_{k-1}[X]$, .

3) Info : Calculer $P_0,...,P_3$.

4) Mq $\forall k>0, \displaystyle\int_0^1 P_k=0$ en déduire l'existence d'une racine dans $[0,1]$.

5) On pose Q_k tel que $P_k=Q_k\displaystyle\prod_1^p(X-\lambda_j)^{n_j}$.

Avec les λ_j racines d'ordres impaires.

a) Mq Q est de signe cst sur $[0,1]$.

b) Calcul de $\displaystyle\int_0^1 P_k\prod_1^p(t-\lambda_j))$, conclure.

Heinrich

Soit (u_n) suite récurrente linéaire d'ordre p avec $u_{n+p}=\displaystyle\sum_0^{p-1}a_ku_{n+k}(1)$.

Soit $P=X^n-\displaystyle\sum_0^{p-1}a_kX^k$.

1) Soit (u_n) une suite réelle et L une suite de $N+1$ termes consécutifs de (u_n).

Ecrire une fonction qui permet de tester si $\forall n \in [\![0, N - deg(P)]\!]$ (1) est vérifiée

elle prendra en argument P et L.

2) Soit (u_n) une suite réelle récurrente d'ordre p, on dispose d'une liste L

de termes consécutifs de u d'indices p à $2p$ inclus.

Créer une fonction prenant en argument L et renvoyant le polynôme P associé à u.

On peut passer par résolution d'un système p équations et p inconnues.

3) Des tests...

Lucas Berr

On donne une matrice A symétrique définie positive, soit v le seul vecteur tq $AX = b$.

A était un matrice 3x3 (laquelle ? ?)

On note (u_p) la suite définie par $u_{p+1} = \rho(A.u_p - b)$.

1)a) Vérifier (Python) que A est défine positive .

b) Etudier (u_p) avec le u_0 de votre choix et $\rho = 0.2$ et $\rho = 0.25$.

c) Déterminer la valeur exacte de v.

Cas général :

2) Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Mq $\forall x \in \mathbb{R}^n, \|SX\| \leqslant \sup\limits_{\lambda \in Sp(S)} |\lambda| \|x\|$.

3) Mq $\|u_{p+1} - v\| \leqslant K \|u_p - v\|$.

Avec K cste dépendant du spectre de A.

4) CNS pour la convergence des (u_p).

Feliers

Le 992 (la chance pour la ...)

Baude

1. Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite telle que $a_1 = 1$ et pour tout $n > 1, a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k}$.

a. Calculer les 10 premiers termes de la suite.

b. Soit $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{4^k}$.

Tracer S_n en fonction de n pour $1 \leqslant n \leqslant 10$.

Que peut-on conjecturer ? On admettra la conjecture.

c. Que peut-on dire du rayon de la série entière $\sum a_n x^n$?

2. Soit la suite $(b_n)_{n\geqslant 1}$ telle que $b_1 = 1$ et pour tout $n > 1, b_n = \dfrac{-n}{2(n-1)} \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} b_k b_{n-k}$.

a. Calculer les 10 premiers termes de cette suite.

En comparant a_n et $|b_n|$ faire une conjecture sur les rayons, la prouver.

Que peut-on dire du rayon R' de la série entière $B(x) = \sum b_n x^n$?

3. Mq B vérifie $xy'(1+y) - y = 0$ sur $]-R', R'[$.

4. $f(x) = x.e^x$ Tracer simult de f et B sur $]-1/4, 1/4[$, conjecture et preuve.

Vite Benjamin retour imparfait...

1) $f(x) = (1+\cos(5\pi.x))x(1-x)$, $M = \sup\limits_{[0,1]} f$.

a) Tracer f et donner une valeur approchée de M.

b) $I_n = \displaystyle\int_0^1 f^n(x)dx, S_n(x) = \sum_0^n I_k x^k$.

$a = 1/M + 0.1$

Tracer S_n sur $[-a,a]$, pour $n \in 10,20,30,40,50$, conjecture ?

2) $g(x) = -x.\ln(x)$ sur $]0,1]$.

$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, J_{n,p} = \displaystyle\int_0^1 x^n (\ln(x))^p dx.$

a) Mq pour $(n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, J_{n,p} = -\dfrac{p}{n+1} J_{n,p-1}$.

b) Calcul de $J_{n,p}$.

c) La conjecture du 1 est-elle vérifiée pour g ?

3 Cas général :

Comportement de $u_n = \dfrac{I_{n+1}}{I_n}$.

Conclure .

Dubois F

Très dur à relire, donc fautes de frappes ? ?

On a 2 jetons. L'un avec des faces 1 et 0, l'autre possède deux fois le 1.

On note E : j'utilise le premier jeton.

On note X le rang où l'on obtient le premier 1.

On note Y le rang où l'on obtient le premier 0.

Rq si ils n'arrivent pas , on prend 0.

On note U_k avoir 1 au rang k.

On pose $S = max(X,Y)$ et $I = min(X,Y)$.

1) Ecrire une fct simuXY qui renvoit une liste contenant X et Y.

Faire l'expérience 10000 fois .

Donner $E(X)$, $E(Y)$, $V(X)$, $V(Y)$, $cov(X,Y)$.

2) Ecrire une fct simus() qui renvoie S.

$E(S)$, $V(S)$.

3) Qur valent : $\mathcal{P}_E(U_k)$, $\mathcal{P}'_E(U_k)$, $\mathcal{P}(U_k)$.

Les (U_k) sont-ils mutuellement indépendants ?

4) On note A_n : On a eu n fois 1 après n lancers.

Que vaut $\mathcal{P}_{A_n}(E)$, interprétation ?

LeGall Lucas.

Soit Y_i une suite de VA réelle ou complexe, iid.

On considère $\sum\limits_0^{+\infty} Y_i(w)x^i$.

1) Tracer l'arc brisé $(k, \sum\limits_0^{k} Y_i(w)x^i$ avec des VA usuelles.

Tester avec $x \in \{-1.1, -1, -0.9, -0.5, 0.5, 0.9, 1, 1.1\}$.

Conjecture sur le rayon de cv ?

Soit Z loi géométrique de param p.

2) Soit $x \leqslant 0$, mq $\mathcal{P}(Z > x) = (1-p)^{\lfloor x \rfloor}$.

3) Soit $\varphi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow I$ bij et strict croissante.

Mq $\forall x \in I$, $(1-p)^{\varphi^{-1}(x)} \leqslant \mathcal{P}(\varphi(Z) > x) \leqslant (1-p)^{\frac{\varphi^{-1}(x)}{1-p}}$.

On rappelle Borel Cantelli.

4) On suppose que $\exists c$ tq $\sum\limits_0^{\infty} (|Y_i| > c^n)$ converge.

Mq $\mathcal{P}(\{w \in \Omega / \left(\dfrac{Y_n}{c^n}\right)_{\mathbb{N}} \textit{ bornee}\}) = 1$.

En déduire que si Y admet une espérance finie $\mathcal{P}(w \in \Omega | R(w) \geqslant 1) = 1$.

Il restait 4 questions...

Vincent Heyndericka

On pose $(a_n)_{\mathbb{N}^*}$ suite de réels strict positifs.

On définit aussi $v_0 = 1, v_1 = a_1, v_{n+1} = a_n v_n + v_{n-1}$.

1) Ecrire un script qui renvoie les $p+1$ premiers termes de (v_n) en fct de $(a_n)_1^p$.

2) On définit $S_n = \displaystyle\sum_1^n \frac{(-1)^k}{v_k.v_{k-1}}$.

Ecrire un script qui renvoie les $p+1$ premiers termes de $(S_n)_1^{p+1}$ en fct de $(a_n)_1^p$.

3) Tracer $S_n(n)$ pour $a_n = \dfrac{1}{n^2}, a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}, a_n = \dfrac{1}{2^n}, a_n = 1$.

Conjecture ?

4) Démonntrer les conjectures.

Lorsque (a_n) cv, lorsque (a_n) diverge.

Kdo Mq $v_n \leqslant \prod(1 + a_n)$.

5) Les résultats sont-ils tjs vrais avec la suite $S'_n = \displaystyle\sum_1^n \frac{1}{v_k.v_{k-1}}$?

Mariadass Vâni

Soit f linéaire de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}^n$.

Rang de f : $p < n$.

On note P_b le problème $\overrightarrow{x}$ vérifie :

$\|f(x) - b\| = \inf\limits_{\mathbb{R}^p}(\|f(y) - b\|)$.

Q1.Un exemple avec A et b (coeff ? ?TD Psi * ? ?) A 4 lignes , 3 colonnes, $p = 3, n = 4$.

a) Montrer que f vérifie les hyp (Python).

b appartient-il à l'image de f , réponse non.

b) Montrer l'unicité du vecteur qui vérifie le pb et l'expliciter avec Python.

c) Trouver les vecteurs qui vérifient $A^T Ax = A^T b$.

Q2. Cas général.

a) Mq x sol de P_b ssi $A^T Ax = A^T b$.

b) ? ?

Q3. a) Décomposition QR, avec Q orthogonale et R triangulaire supérieure.

b) A quoi ça sert ici ?

c) ? ?

Thomas Debray

Q1. Soit I intervalle de $\mathbb{R}$, et $f \in \mathcal{C}^1(I)$, I stable par f tq $\exists a \in I, f(a) = a, |f'(a)| < 1$.

Mq il existe un voisinage de a tq tte suite récurrente $y_{n+1} = f(y_n)$ cv vers a.

Q2. On considère (x_n) tq pour $P \in \mathbb{R}[X]$, $x_{n+1} = x_n - \dfrac{P(x_n)}{P'(x_n)}$.

Et $f_P : x \mapsto x - \dfrac{P(x)}{P'(x)}$.

On prend $U_t = X^3 - 3X - 2t$.

Info : Tracer U_t pour $t = 3$, dérterminer les 20 premiers termes de la suite

pour différentes valeurs de x_0, que remarque-t-on ?

Essayer $t = 1.8$.

Q3. On dit que (u, v) est un couple si $f_P(u) = v, f_P(v) = u$.

On dit qu'il est attracteur si $|f'_P(u) f'_P(v)| < 1$.

Soit (u, v) attracteur . Mq si V voisinage de v et pareil en U, et que si $x_N \in V \cap U$.

Alors les extraites paires et impaires cv vers (u, v) ou (v, u).

Q4. Application à $P = U_t$, mq (u, v) est attracteur ssi $\begin{cases} 2u^3 + uv + 3v^2 = 2t \\ 2u(??) = 3 \end{cases}$.

Erreurs possibles...

Q5.Q6....

Sol :Q1 prendre un voisinage tq $M_V = |f'| < 1$, IAF.

Q2. cv des termes pairs et impairs mais lim distinctes.

Q3. $x_{2n+2} = f_P^2(x_{2n})$, on applique Q1 pour f_P^2...

Marie Léo

Soient (n, p) entiers naturels non nuls.

On définit ε_n par -1 si p divise n, 1 sinon.

Et $\alpha_n = \dfrac{1}{n} \sum_1^n \varepsilon_k$.

Q1. Ecrire un programme prenant (n, p) en argument et renvoyant la liste ε_k.

Q2. Pareil avec α_k.

Q3. $p = 2$, Tracer $\left(\sum_1^n \dfrac{\varepsilon_k}{k} \right)_{1 \leqslant n \leqslant 300}$. Puis Tracer $\left(\sum_1^n \dfrac{\alpha_{k-1}}{k} \right)_{1 \leqslant n \leqslant 300}$.

Conjecture ?

Q4. Prouver les conjectures.

$p > 2$:

Q5. Montrer qu'il existe K_p telle que $\forall n, \alpha_n \geqslant K_p$.

Q6. Ecrire $\sum_1^n \dfrac{\varepsilon_k}{k}$ en fonction des (α_k).

Q7. Natures de $\sum_2 \dfrac{\alpha_{k-1}}{n}$? ? et $\sum_1 \dfrac{\varepsilon_n}{n}$.

Q8 ? ?

Maintenant Centrale 2 extérieur Beos

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $A_n = \left(\dfrac{\binom{n}{i}}{n-i+j+1} \right)_{(i,j) \in [\![1,n]\!]}$.

On pose le produit scalaire de $\mathbb{R}^n$: $(X|Y) = \sum_{i,j} \dfrac{x_i y_j}{n-i+j+1}$.

Et pour $P \in \mathbb{R}_n[X], u(P) = \displaystyle\int_0^1 (X-t)^n P(t) dt$.

Q1. Ecrire une fonction mat qui prend l'entier n en argument et qui renvoie la matrice A_n.

La fonction du binomial était donnée.

Q2. Déterminer les valeurs propres de A_n pour n de 1 à 8.

Q3.Ecrire une fct produit scalaire qui prend 2 vecteurs en argument et qui renvoie le ps.

Q4. Les vecteurs propres de A_n sont-ils 2 à 2 orthogonaux ?

Vérification pour n de 1 à 8.

Q5.Montrer que u est un endomorphisme.

Q6. Montrer que u est symétrique dans $\mathbb{R}_n[X]$ avec le ps $\displaystyle\int_0^1 PQ(t)dt$.

Q7. Retrouver les résultats de Q4.

Q8. Soit $(P_1, P_2, ..., P_n)$ une bon de vecteurs propres de u...

Pas de suite , la comparer avec l'orthonormalisée de GS ? ? ?

Soit $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a. telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N} P(\varepsilon_k = 1) = P(\varepsilon_k = -1) = 1/2.$$

On note $X_n = \displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{k} \varepsilon_k$ et $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^n \left(\frac{\ln(k)}{k}\right)^2$.

Montrer que X_n a une espérance et une variance.

Montrer que S_n converge et on note alors $S_n \longrightarrow S$.

Montrer $P\left(X_n \geqslant a\right) \leqslant \frac{S_n}{a2} \leqslant \frac{S}{a^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}^{+*}$.

Ecrire un code qui par une fct estim (a, n) renvoie $P\left(M_n \geqslant a\right)$ sur 10000 simulations.

Ecrire $S(a, n)$ qui renvoie $\frac{S_n}{a^2}$.

Conjecturer le signe de $P\left(M_n \geqslant a\right)-\frac{S_n}{a^2}$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}^{+*} P\left(\frac{M_n}{\sqrt{\ln (n))}} \geqslant a\right) \longrightarrow 0$.

Soit $\left(X_n\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans l'ensemble des entiers naturels indépendantes et toutes de même loi, définie par :

$$X_1(\omega)=\{-1,1\} \quad, \quad P\left(X_1\right)=P\left(X_1=-1\right)=\frac{1}{2}$$

On pose $X_0=0$.

On définit une marche aléatoire symétrique par

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n=\sum_{k=0}^n X_k .$$

1. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

a) Montrer que

$$\sum_{k=0}^n P(X>k)=(n+1) P(X>n)+\sum_{k=0}^n k P(X=k)$$

$$\text{et } (n+1) P(X>n) \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} k P(X=k)$$

b) En déduire que $E(X)=\sum_{k=0}^{+\infty} P(X>k)$.

2. a) Écrire un code définissant une fonction d'en-tête sortie (a, b) qui définit la marche aléatoire symétrique et renvoie $-a$ quand elle sort de $[-a, b[$ par $-a$ et b quand elle sort par b.

b) Autre question Python (oubliée).

Soit

$$\begin{aligned} \delta : \mathbb{R}[X] &\longrightarrow \mathbb{R}[X] \\ P &\longmapsto P(X) - P(X-1) \end{aligned}$$

1) Implémenter une fonction Python qui renvoie $\delta(P)$.

2) Calculer $\delta(P)$ pour $P \in \{1, X, \ldots, X^{10}\}$.

3) Montrer que δ est linéaire. Déterminer le noyau et l'image de δ.

4) Montrer qu'il existe une unique suite de polynômes $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que

$$P_0 = 1, \forall n \in \mathbb{N}^*, P_n(0) = 0 \text{ et } P_n(X) - P_n(X-1) = X^{n-1}.$$

5) En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P_n(X) = (n-1)\int_0^X P_{n-1}(t)\mathrm{d}t + C_n X$$

avec $C_n \in \mathbb{R}$.

Calculer alors P_1 et P_2.

6) à 10) Une histoire de conjecture à déterminer, puis à vérifier avec Python.

Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve :

3) Poser une application pour se ramener à de la dimension finie
Commentaires divers

Examinateur posant beaucoup de question pour aiguiller la réflexion et vérifier la connaissance du cours durant l'épreuve, beaucoup de dynamisme pendant l'oral. Exercice qui semblait infinissable au vu de la longeur du sujet et de la difficulté des questions

Commentaire du modérateur

Suite à l'absence de réponse du candidat à mes sollicitations, j'ai modifié le texte à partir de la question 4 (j'ai remplacé $P_{n-1}(X)$ par $P_n(X-1)$ et l'intégrale de 1 à X par une intégrale de 0 à X). Le texte obtenu est juste avec $C_n = -B_{n-1}$ pour $n \geqslant 3$, où l'on peut montrer que B_{n-1} est le coefficient de Bernoulli d'indice $n-1$. En particulier, on a $C_n = 0$ si n est pair supérieur à 3. Ceci n'est bien sûr qu'une proposition de restauration de l'exercice, mais elle n'est pas garantie conforme à l'original...

Centrale 2 extérieur

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p, x \in [0,1]$.

Soit $S_{n,p}$ une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paralètres n et p.

Conjecturer à l'aide de Python la valeur de $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(S_{n,p} > x\right)$.

On pourra distinguer 3 cas :

i) $x > p$

ii) $x = p$

iii) $x < p$

2. On définit : $F_z : \mathbb{R} \to [0,1]$ par $F_z(t) = \mathbb{P}(Z \leqslant t)$.

a) Tracer F_z si Z suit une loi uniforme sur $\{1,2,3\}$.

b) Si Z suit une loi géométrique, montrer que :

$$F_z(t) = \begin{cases} 1-(1-p)^{\lfloor t \rfloor} & \text{si } t \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

3. Démontrer les conjectures i) et ii) de la question 1 .

Pour i), on pourra montrer l'inclusion $(S_{n,p} > nx) \subset \left(\left|\frac{S_{n,p}}{n} - p\right| \geqslant x - p\right)$.

Centrale 2 extérieur

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $(u_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{aligned} &u_0(a) = a \\ &\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1}(a) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{u_n(a)}{1+\sqrt{1+u_n(a)^2}}\right) \end{aligned}$$

1-Coder la fonction Suite (a, N) qui renvoie la liste des N premiers termes de $(u_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$.

Calculer Suite(0,5) et Suite(4,10).

2-Calculer : Suite(-1,10), Suite(6,10), Suite(10,10).

Émettre une conjecture (C_1) sur la suite $(u_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$.

3-Calculer les 10 premiers termes de $(2^n u_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ pour différentes valeurs de $a \in \mathbb{R}$.

Émettre une conjecture (C_2) sur la suite $(2^n u_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$.

4-Tracer la fonction $a \mapsto 22^{10} u_{10}(a)$ pour $a \in [-30, 30]$.

5-Montrer l'assertion suivante : $\forall x \in \mathbb{R}, |\operatorname{Arctan}(x)| \leqslant |x|$, démontrer (C_2).

6-Préciser la nature des séries suivantes :

$$\sum u_n(a), \sum u_n^2(a), \sum \ln\left(\frac{2u_{n+1}(a)}{u_n(a)}\right)$$

7-En déduire une preuve de la conjecture (C_2).

Centrale 2 ext

On pose $J_n(x) = \displaystyle\int_0^1 u^{x-1}(1-u)^n \,\mathrm{d}u$.

1. Déterminer le domaine de définition D de J_n.

2. Calculer $J_n(x)$ pour tout $x \in D$.

3. On pose $u_n(t) = \begin{cases} t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n & \text{si } t \in [0,n] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

a) Déterminer $u(t) = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n(t)$.

b) Tracer sous Python $u_n(t)$ pour $n \in \{2, 5, 10\}$ et $u(t)$ (on choisira une valeur de x).

c) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^n u_n(t)\mathrm{d}t = \Gamma(x)$.

4. a) Montrer que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

b) Démontrer que $\Gamma(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}$.

c) Montrer que $\Gamma(n) = (n-1)\,!$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

d) Tracer la fonction Γ sous Python.

5. a) Montrer que Γ est $\mathcal{C}^\infty$ sur D.

b) Démontrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}(\ln(t))^k \mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t$ est convergente pour $x \in D$ et $k \in \mathbb{N}$.

c) Donner les dérivées k-ièmes de Γ.

6. Montrer qu'il existe $c \in]1, 2\,[$ tel que $\Gamma'(c) = 0$.

7. Tracer alors le tableau de variations de Γ.

8. Écrire en Python un script permettant de tracer $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}(\ln(t))^k \mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t$.

9. Donner les limites en 0 et en $+\infty$ de la fonction Γ et de $\Gamma^{(k)}$.