Attention aux erreurs de frappes...

—© cours.

—♠ dur.

—♢ fondamental.

—♡ j'adore.

Algèbre

986.© Soit E un espace vectoriel de dimension finie non nulle et u, v

deux endomorphismes de E.

a) Montrer que $|\mathrm{rg}(u) - \mathrm{rg}(v)| \leqslant \mathrm{rg}(u+v) \leqslant \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v)$.

b) Soit F un sous-espace de E et G, H deux supplémentaires de F dans E.

Soit p le projecteur sur F parallèlement à G et q le projecteur sur H parallèlement à F.

Montrer que $rg(p+q) = \mathrm{rg}(p) + rg(q)$.

987.♢. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on pose $\varphi(A) = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$.

a) Montrer que l'on définit ainsi une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $\forall i \in [\![1, n]\!], |a_{i,i}| > \sum\limits_{j \neq i}^{n} |a_{i,j}|$. Montrer que pour tout

$b \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'équation $AX = b$ admet une unique solution dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Sol : a)
988. Soient $n \geqslant 1, A, B \in \mathbb{R}_n[X]$ et $a \in \mathbb{R}$. On suppose $A(a) \neq 0$.

On considère l'ensemble $E = \{P \in \mathbb{R}_n[X], P + P(a)A = B\}$ et la fonction $f : P \mapsto P(a)A$

a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et calculer son rang.

b) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

c) En utilisant la question precédente, déterminer E.

Sol : D'abord .

989. A quelles conditions $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & c & 2 & 0 \\ d & e & f & 2 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Le cas échéant, diagonaliser effectivement A.

990. Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{pmatrix}$.

a) Justifier que A est diagonalisable et donner un vecteur propre évident de A.

b) Calculer le polynôme caractéristique de A puis en déduire le spectre de A.

c) Exprimer, lorsqu'elle existe, la matrice inverse A^{-1} en fonction de I_4, A, A^2 et A^3.

991. Soit $M = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que M soit diagonalisable.

b) Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que M et M^2 soient semblables.

992.$\diamondsuit, \heartsuit,$ © PYTHON Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\omega_n = e^{2i\pi/n}$ et

$F_n \in M_n(\mathbb{C})$ la matrice $\left(\omega_n^{(k-1)(l-1)}\right)_{1 \leqslant k,l \leqslant n}$.

a) Ecrire une fonction Python qui prend un entier n en argument et renvoie F_n.

Afficher plusieurs matrices F_n.

b) Calculer avec Python le produit $F_n\overline{F_n}$.

c) Écrire une fonction Python qui prend un entier n en argument et renvoie F_n^{-1}.

Que peut-on conjecturer ?

d) Ecrire une fonction Python qui prend deux entiers n et k en arguments et renvoie F_n^k.

Que peut-on conjecturer ?

e) Démontrer les conjectures précédentes.

f) Déterminer les valeurs propres de F_n. Cette matrice est-elle diagonalisable ?

993.$\diamondsuit, \heartsuit,$ ©. PYTHON Soit n un entier naturel. On considère la matrice $A_{n+1} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que $a_{j-1,j} = j-1, a_{j+1,j} = n+1-j$ pour tout j, et dont tous les autres coefficients sont nuls.

a) Écrire une fonction Python qui prend un entier n en argument et renvoie A_{n+1}

b) Déterminer avec Python les valeurs propres de A_{n+1}. Que peut-on conjecturer ?

c) Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ canoniquement associé à la matrice A_{n+1}.

Montrer qu'il existe un polynome Q ne dépendant pas de n tel que,

pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X], u(P) = QP' + nXP$.

d) En déduire les éléments propres de u.

e) La matrice A_{n+1} est-elle diagonalisable ?

994. PYTHON On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$.

a) Calculer le polynôme caractéristique de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Préciser le module de ses valeurs propres.

b) On considère la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 = 2, u_1 = 3, u_2 = 8, u_3 = 4, v_4 = 11$ et,

pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+5} = \dfrac{1}{5}(u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + u_{n+4})$.

i) Écrire une fonction Python qui prend en argument un entier n et renvoie

les $n+1$ premiers termes de cette suite.

ii) Afficher sur un graphique les 25 premiers termes de la suite.

Que peut-on conjecturer concernant la convergence de u_n?

iii) Réécrire la relation de récurrence a l'aide de la matrice A.

iv) Montrer que la suite de matrice $(A^n)_n$ converge vers la matrice d'un projecteur

dont on précisera les éléments caractéristiques.

v) Trouver un vecteur non nul X tel que $A^T X = X$.

995. $\diamondsuit$. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $(E_1) : A^4 + I_2 = 0$ et $(E_2) : A^T A = AA^T$.

u et v les endomorphismes resp représentés par A et A^T dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

a) i) Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Quelles sont les valeurs propres possibles ?

ii) Montrer que tout vecteur propre de u est vecteur propre de v.

b) Quelles sont les matrices satisfaisant (E_1) et (E_2)?

996. Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et $v \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $v^2 + v + id_E = 0$.

a) Soit $x \in E$ non nul. Montrer que $(x, v(x))$ est une famille libre.

b) Soit $x, y \in E$ tels que $(x, y, v(x))$ soit une famille libre.

Montrer que la famille $(x, y, v(x), v(y))$ est libre.

c) On suppose désormais que $\dim E = 4$.

Montrer qu'il existe une base (e_1, e_2, e_3, e_4) de E qui vérifie $e_3 = v(e_1)$ et $e_4 = v(e_2)$.

Donner la matrice de v dans cette base. Est-elle diagonalisable ?

997.$\heartsuit$, $\spadesuit$ Soit U l'ensemble des polynômes unitaires à coefficients complexes et φ l'application de

U dans U définie par $\prod_{k=1}^{n} (X - \lambda_k) \mapsto \prod_{k=1}^{n} \left(X - \lambda_k^2\right)$.

a) L'application φ est-elle injective ? surjective ?

b) Déterminer une condition sur n pour que $\varphi(X^n - 1) = X^n - 1$

c) i) Calculer le polynôme caractéristique de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$.

ii) Montrer que deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.

iii) En déduire que si P est à coefficients entiers, alors $\varphi(P)$ l'est également.

Sol : a)

Gagné ! !

998. PYTHON. Soit $G \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré $n+1$, scindé sur $\mathbb{R}$

et à racines simples. On définit g l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ qui au polynôme P

associe le reste de la division euclidienne de PX par G.

a) Montrer que g est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Dans cette question $n = 3$ et $G = X^4 + 2X^3 - X^2 - 2X = X(X-1)(X+1)(X+2)$.

i) Donner la matrice de g dans la base canonique.

ii) g est-elle diagonalisable ?

uii) Tracer sur $[-3, 2]$ les fonctions polynomiales associées aux vecteurs propres de g.

c) On revient au cas général. l' application g est-elle diagonalisable ?

Sol CCP Lagrange ?

999. ♠♠♠.a) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \chi_{AM+B} = \chi_{AM}$.

a) Montrer qu'il existe un entier p tel que $B^p = 0$.

b) Montrer que $BA = 0$.

c) Réciproquement, soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $B^n = BA = 0$.

Montrer que, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \chi_{AM+B} = \chi_{AM}$.

1000. a) Soient M et N deux matrices semblables de $M_n(\mathbb{C})$.

Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{C}[X], P(M)$ et $P(N)$ sont semblables.

b) Soient A une matrice diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $(B_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices semblables à A, convergeant vers une matrice B. Montrer que B est semblable à A.

c) Ce résultat subsiste-t-il si A n'est pas diagonalisable ?

1001. Soit $\theta_1, \ldots, \theta_p$ des réels deux à deux distincts modulo 2π et $m_1, \ldots, m_p$ des complexes non tous nuls. Le but de l'exercice est de montrer que $\left(m_1 e^{i\theta_1 n} + \ldots + m_p e^{i\theta_p n}\right)$ ne tend pas vers 0 quand $n \to +\infty$. On suppose par l'absurde que $\left(m_1 e^{i\theta_1 n} + \ldots + m_p e^{i\theta_p n}\right) \to 0$.

a) On note $M_n = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1 n} & \cdots & e^{i\theta_p n} \\ \vdots & & \vdots \\ e^{i\theta_1(n+p-1)} & \cdots & e^{i\theta_p(n+p-1)} \end{pmatrix}$.

Montrer que $Y_n = M_n \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_p \end{pmatrix} \to 0$ quand $n \to +\infty$.

b) Montrer que $|\det M_n|$ est une constante non nulle.

c) A 1 'aide du théorème de Cayley-Hamilton, exprimer M_n^{-1} et trouver une contradiction.

1002. PYTHON. Une matrice carrée est dite stochastique si tous ses coefficients sont positifs et si la somme de ses coefficients sur chaque ligne vaut 1 .

a) Écrire une fonction Python stoch(N) qui renvoie une matrice de taille N stochastique avec des coefficients aléatoires.

b) Une matrice stochastique A est dite semi-vide si $a_{i,j} = 0$ quand $i + j$ est pair.

Écrire une fonction Python stoch2 (N) renvoyant une telle matrice.

c) Écrire une fonction Python tracevp (A) qui trace les valeurs propres de A.

Que remarquez-vous ?

d) Soit A une matrice stochastique semi-vide.

Montrer que si λ est valeur propre de A alors $\bar{\lambda}$ et $-\lambda$ aussi.

1003. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni du produit scalaire $< P, Q >= \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\ \mathrm{d}t$.

a) Montrer qu'il s'agit bien d'un produit scalaire.

b) Pour tout $k \in [0, n]$, on pose $B_k = X^k/k!$.

La famille $B = (B_0, \ldots, B_n)$ est-elle une base orthonormée de E?

c) Pour $k \in [\![0, n]\!]$ et $t \in \mathbb{R}$, on pose $f_k(t) = t^k e^{-t}$ et $L_k(t) = \dfrac{(-1)^k}{k!} e^t f_k^{(k)}(t)$.

Prouver que L_k est une fonction polynomiale, donner son degré et ses coefficients.

d) Montrer que $\mathcal{L} = (L_0, \ldots, L_n)$ est une base orthonormée de E.

e) Exprimer la matrice de passage de B à $\mathcal{L}$.

1004. Soit E un espace euclidien. On dit qu'un endomorphisme

$f \in \mathcal{L}(E)$ est une contraction lorsque : $\forall x \in E, \|f(x)\| \leqslant \|x\|$.

a) Montrer qu'un endomorphisme symétrique f est une contraction

si, et seulement si, $Sp(f) \subset [-1, 1]$.

b) Montrer que si f est un endomorphisme symétrique alors, pour tout polynôme

$P \in \mathbb{R}[X]$ et tout $x \in E$, on a $\|P(f)(x)\| \leqslant \|x\| \sup\limits_{a \in \mathrm{Sp}(f)} |P(a)|$.

Sol : a)

1005 $\diamondsuit$. a) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $I_n + M$ est inversible.

Montrer qu'il existe un polynôme P tel que $(I_n + M)^{-1} = P(M)$.

b) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique. Montrer que $I_n + A$ et $I_n - A$ sont inversibles.

Sol : .

1006. a) Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice de

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ soit diagonalisable dans une base orthonormale.

b) Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$

est-elle trigonalisable dans une base orthonormale ?

1007. $\heartsuit, \diamondsuit, \spadesuit$ .Soient $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^{2019} = B^{2019}$.

a) Montrer que A et A^{2019} sont diagonalisables ; quel lien y a-t-il entre leurs valeurs propres ?

b) Montrer que $A = B$.

c) Si $A^2 = B^2$, a-t-on nécessairement $A = B$?

Sol : hyper classique...

Analyse

1008. Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie.

a) Montrer que les boules de E sont convexes.

b) Soit C une partie convexe de E. On suppose que C est dense dans E. Montrer que $C = E$:

i) dans le cas où $E = \mathbb{R}$;

ii) dans le cas général.

Sol a) Du cours.

b) Au tableau, c'est dur ss faire le dessin...

1009. PYTHON. On pose, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2, N(x, y) = \displaystyle\int_0^1 |x - ty| \text{ dt}$.

a) Vérifier que N est bien une norme sur $\mathbb{R}^2$.

b) Tracer la courbe de la fonction $x \mapsto N(x, 1)$ pour $x \in [-1/2, 3/2]$ avec Python.

c) Calculer $N(x, 1)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

d) En déduire la valeur de $N(x, y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

e) Soit C le cercle unité d'équation $x^2 + y^2 = 1$. Tracer la courbe de $x \mapsto \left(x, \sqrt{1 - x^2}\right)$ pour $x \in [-1, 1]$ avec Python. Estimer les valeurs de sup $N(C)$ et inf $N(C)$ a l'aide du tracé.

f) Déterminer la valeur exacte de sup $N(C)$.

1010. Pour tous entiers naturels non nuls n et p, on pose $L_p(n) = \displaystyle\sum_{h=p+1}^{np} \frac{1}{k}$.

a) Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, la suite $\left(L_p(n)\right)_p$ converge vers limite notée $L(n)$.

b) Montrer que, pour tous $m, n \geqslant 1, L(mn) = L(m) + L(n)$.

c) Montrer que la suite $(L(n))_n$ est strictement croissante.

d) Montrer que, pour tout $n \geqslant 1, L(n) = \ln(n)$.

Sol : Comment se prendre la tête pour rien...

1011. PYTHoN Soit $Q : x \mapsto (x-1)\left(x^2-2\right)^2, f : x \mapsto x - \dfrac{Q(x)}{Q'(x)}$

et enfin $(u_n)_n$ la suite définie par $u_0 = 10$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Ecrire une fonction Python qui prend un entier n en argument et renvoie

les n premiers termes de cette suite. Que peut-on conjecturer sur la limite de cette suite ?

b) Montrer que Q' est scindé à racines simples dans $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

On admet qu'il en est de même pour Q''.

c) Éudier les variations de f.

d) Écrire une fonction Python qui prend un entier n en argument et trace les points

de coordonnées $\left(k, \ln\left(u_k - \sqrt{2}\right)\right)$ pour tout $k \leqslant n$.

Que peut-on conjecturer ?

e) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $c_n > \sqrt{2}$ tel que $u_{n+1} - \sqrt{2} = f'(c_n)\left(u_n - \sqrt{2}\right)$.

f) Montrer que la limite de f' en $\sqrt{2}$ par valeurs supérieures est $1/2$.

g) En déduire la preuve de la conjecture précédente.

1012. PYTHON Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $P_n(x) = x \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{x}{k}\right)$.

a) i) Définir une fonction $\mathrm{P(n,x)}$ qui renvoie la valeur de $P_{\mathrm{n}}(\mathrm{x})$.

ii) Tracer les graphes des $P_n(x)$ pour $x \in [0,1]$ et n variant de 1 à 10. Qu'observe-t-on ?

iii) Définir une fonction $\mathrm{M(n)}$ qui renvoie l'abscisse x_n du maximum de P_n sur $[0,1]$.

Pour k allant de 1 a 5 , afficher $x_n \ln(n)$ avec $n = 10^k$. Qu'observe-t-on ?

b) i) Montrer que P_n admet un maximum sur $[0,1]$, atteint en un unique point noté x_n.

ii) En considérant $x \mapsto \ln\left(P_n(x)\right)$, montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \frac{1}{x_n} \leqslant \frac{1}{1-x_n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$.

iii) Trouver un équivalent de x_n quand n tend vers l'infini.

1013. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = \displaystyle\int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \sin\left(x^2\right) \mathrm{d}x$.

Donner le signe de u_n en fonction de n.

Montrer que la série $\sum u_n$ converge mais n'est pas absolument convergente.

Sol : Classique :

1014. PYTHON. Pour a réel, on note $\left(u_n(a)\right)_{n \in N}$ la suite définie par $u_0(a) = a$

et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1}(a) = \arctan\left(\frac{u_n(a)}{1+\sqrt{1+u_n(a)^2}}\right)$.

a) Écrire une fonction suite (N, a) . donnant tous les termes $u_n(a)$ pour $n \in [\![0, n]\!]$.

Calculer suite $(3, 0)$ puis sulte $(10, 2.1718)$.

b) Calculer suite((N, a) pour $N = 10$ et a appartenant a $[1, 4, 10, 100]$.

Faire de même avec $2^n u_n(a)$.

c) Conjecture C_1 : convergence et limite de $(u_n(a))$?

Conjecture C_2 : convergence et limite de $(2^n u_n(a))$?

d) Montrer que pour tout x réel, $|\arctan(x)| \leqslant |x|$. La conjecture C_1 est-elle vraie ?

e) Étudier la convergence des séries de terme général $u_n(a), u_n(a)^2, \ln\left(\dfrac{2u_{n+1}(a)}{u_n(a)}\right)$.

f) La conjecture C_2 est-elle vraie ?

g) Comparer avec Python $\arctan(x)$ et $2\arctan\left(\dfrac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}\right)$.

Démontrer le résultat observé.

1015. PYTHON Soit $a, b > 0$ et $(u_n)_n$ la suite définie par $u_0 > 0$ et, pour tout

$n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{n+a}{n+b} u_n$.

a) i) Avec Python, représenter graphiquement les 50 premiers termes de la suite

$(u_n)_n$ avec $u_0 = 1$ et $(a,b) \in \left\{ \left(\frac{1}{2}, 1\right), \left(\frac{2}{3}, 1\right), \left(\frac{3}{2}, 2\right), \left(\frac{5}{3}, 2\right) \right\}$.

Que peut-on conjecturer ?

ii) Avec Python, calculer $\sum_{k=0}^{n} u_k$ pour $n = 10^6, u_0 = 1$ et pour les couples

$(a,b) = \left(1, \frac{7}{6}\right), \left(1, \frac{5}{3}\right), (1,2), (1,3)$. Que peut-on conjecturer ?

b) Soit $\gamma > 0$. On pose, pour tout $n > 0, v_n = \ln(n^\gamma u_n)$ et $w_n = u_{n+1} - u_n$.

i) Déterminer un développement asymptotique à deux termes de w_n.

ii) A quelle condition sur γ la série de terme général w_n converge-t-elle ?

ii) Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que $u_n \sim cn^{a-b}$.

c) On suppose $b - a > 1$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}, z_n = (n+1)u_{n+1} - nu_n$.

Montrer que la série de terme général z_n converge et calculer sa somme.

1016. PYTHON Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs.

On pose $u_0 = 1, u_1 = a_1$ et pour tout $n \geqslant 2, u_n = a_{n-1}u_{n-1} + u_{n-2}$.

On étudie la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{u_n u_{n-1}}$. On note $S_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$.

a) Écrire une fonction qui prend en entrée les p premières valeurs de la suite (a_n)

et retourne les p premières valeurs de (u_n).

b) Ecrire une fonction qui prend en entrée les p premières valeurs de (a_n) et qui calcule S_p.

c) Tracer la ligne brisée retiant les points (n, S_n) pour $1 \leqslant n \leqslant 20$,

lorsque la suite (a_n) est respectivement donnée par :

i) $a_n = 1/2^n$ ii) $a_n = 1/n^2$ iii) $a_n = 1/\sqrt{n}$ iv) $a_n = 1$.

Faire une conjecture sur le comportement de la série de terme général v_n.

d) On suppose que la série de terme général a_n converge.

Montrer que pour tout $n \geqslant 1$ $u_n \leqslant \prod_{k=1}^{n} (1 + a_k)$.

Quelle est la nature de la série de terme général v_n?

e) On suppose maintenant que la série de terme général a_n diverge.

Quelle est la nature de la série de terme général v_n?

Ind. On pourra étudier la nature de la série de terme général $u_{n-1}\left(u_n - u_{n-2}\right)$.

1017. PYTHON On note $\omega = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*, u_n = \dfrac{\omega^n}{n}$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$.

a) La suite $\left(S_n\right)_n$ semble-t-elle converger ? Si oui, donner une approximation de sa limite S.

b) Soit $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\omega - t}{1+t+t^2}\, \mathrm{d}t$. Justifier l'existence de I.

Par la méthode des rectangles, trouver une valeur approchée de I.

c) Comparer I a S, que peut-on conjecturer ? Démontrer cette conjecture.

d) Donner la valeur exacte de I.

e) On considère une suite de complexes $\left(a_n\right)_{\mathrm{n}\geqslant 1}$ 3 -périodique.

On pose alors $u_n = a_n/n$ et $z_n = u_{3n-2} + u_{3n-1} + u_{3n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Montrer que la série de terme général u_n converge si et seulement si $a_1 + a_2 + a_3 = 0$.

1018.$\heartsuit, \heartsuit$. a) Montrer la divergence de la série harmonique et donner un équivalent

de la n -ieme somme partielle.

b) Soit $\left(u_n\right)_n$ une suite à valeurs strictement positives et α un réel > 0.

On pose, pour tout n, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$. On suppose que $\left(S_n\right)_n$ diverge.

Montrer que la série de terme général $\dfrac{u_n}{S_n^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

c) On suppose maintenant que S_n converge vers S et on note $R_n = S - S_n$.

Montrer que la série de terme général $\dfrac{u_n}{R_{n-1}^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha < 1$.

Sol : J'adore l'exo ! !

1019. a) On considère une suite $\left(u_n\right)$ de limite nulle et p un entier naturel non nul.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n = \sum_{k=0}^{p-1} u_{np+k}$.

Montrer que les séries de termes généraux u_n et v_n sont de même nature et,

que si elles convergent, elles ont la même somme.

b) Montrer que la série de terme général $(-1)^n/(n+1)$ converge.

c) Montrer que la série de terme général $j^n/(n+1)$ converge et calculer sa somme.

Sol : Idée : regrouper par paquets.

A finir...

1020. PYTHON. Soit $P = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n$ un polynôme à coefficients réels de

degré $n \geqslant 1$. On pose, pour $(x,t) \in \mathbb{R}^2, M(x,t) = |P(x)| - \sum_{k=1}^{n} \frac{\left|P^{(k)}(x)\right|}{k!} t^k$.

a) Justifier que pour tout réel x, l' application $t \mapsto M(x,t)$ est strictement décroissante

sur $\mathbb{R}_+$; en déduire qu'il existe un unique réel positif t tel que $M(x,t) = 0$.

On note ce réel $m(x)$.

b) Dans cette question on prend $P = X^2 - 1$.

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}, m(x) = \sqrt{x^2 + |x^2 - 1|} - |x|$.

Étudier la régularité de m.

c) Dans cette question on prend $P = (X-1)(X-2)(X-3)$.

Écrire une fonction en Python qui prend en argument x et renvoie $m(x)$

à la précision 10^{-5}. On pourra utiliser la fonction bisect du module optimize de scipy ; bisect

prend trois arguments : une fonction h à une variable, dont on cherche un zéro, et deux

réels a et b qui sont les bornes de l'intervalle ou l'on cherche le zéro. Tracer le graphe de m.

1021. PYTHON. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-1/x}$ si $x > 0, f(x) = 0$ sinon

a) i) Représenter graphiquement f sur $[-2, 2]$.

ii) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe un polynóme P_n tel que, pour tout $x > 0$,

$f^{(n)}(x) = f(x)\dfrac{P_n(x)}{x^{2n}}$. Donner P_n pour $1 \leqslant n \leqslant 5$.

iii) La fonction f est-elle de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$? Est-elle développable en série entière ?

b) On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}, g(x) = f(x)f(1-x)$ et $h(x) = \alpha^{-1}\displaystyle\int_0^\pi g(t)dt$,

avec $\alpha = \displaystyle\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t$. Tracer g et h sur un intervalle convenable. Sont-elles C^∞?

e) Construire une fonction φ de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$,

telle que $\varphi(x) = 0$ si $|x| \geqslant 1$ et $\varphi(x) = 1$ si $|x| \leqslant 1/2$.

Sol : olivier 2016 ou 17.

1022. PYTHON Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynône non constant,

dont aucune racine n'est de module 1 .

a) Justifier l'existence de $M(P) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \ln\left|P\left(e^{\mathrm{it}}\right)\right| \mathrm{dt}$.

b) Montrer qu'il existe un réel A, un entier naturel s supérieur ou égal à 1, des complexes

$z_{1,\ldots,}z_s$ de modules différents de 1 et des entiers m_k tels que :

$M(P) = A + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} m_k M\left(X - z_k\right)$.

c) Écrire une fonction malher (r, theta) renvoyant la valeur de $M\left(X - re^{i\theta}\right)$.

Quelle est la valeur de $M(2, 50)$?

Pour $r \in \{0.5, 1, 100, 2019\}$ représenter la fct $\theta \mapsto \text{malher}(r, \theta)$ avec un pas de 0.1 pour θ.

Que peut-on conjecturer ?

d) Représenter $r \mapsto$ malher (r, θ) pour r variant de 0 à 3 avec un pas de 0.1 ;

puis $r \mapsto$ malher (r, θ) pour r variant de 1 à 20 avec un pas de 0.1.

Représenter sur un même graphique $r \mapsto 2\pi\ln(r)$, Que peut-on conjecturer ?

e) Démontrer la conjecture faite à la question c).

f) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $X^{2n}-1=\left(X^2-1\right)\prod_{k=1}^{n-1}\left(1-2X\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)+X^2\right)$.

g) Montrer la conjecture de la question d).

1023. PYTHON Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [-1,1]$, on pose $\theta_n(x)=\prod_{k=0}^{n}\left(1-x^{2^k}\right)$.

a) Créer une fonction dessin(n) qui trace les graphes des θ_k sur $[-1,1]$ pour $k \in [\![0,n]\!]$.

b) Établir la convergence sur $]-1,1[$ de la suite (θ_n) vers une fonction θ;

montrer que θ est continue sur $]-1,1[$, vérifie

$\theta(x)=(1-x)\theta\left(x^2\right)$ pour tout $x \in]-1,1[$ et ne s'annule pas sur $]-1,1[$.

c) Trouver toutes les fonctions f continues de $]-1,1[$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifient

$\forall x \in]-1,1[,\ f(x)=(1-x)f\left(x^2\right)$.

d) On admet que θ est développable en série entière : $\theta(x)=\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$.

Donner a_0 et montrer que $a_{2n}=a_n$ et $a_{2n+1}=-a_n$ pour tout n.

e) Créer une fonction coeff (n) qui calcule a_n.

1024. PYTHON Soit $E=\left\{f \in C^0([0,1]) \mid f(0)=0, f(1)=1\right\}$.

Pour toute fonction $f \in E$, on définit $g=\varphi(f)$ par : $g(x)=f(3x)/2$ si $0 \leqslant x \leqslant 1/3$,

$g(x)=1/2$ si $1/3<x<2/3$ et $g(x)=\frac{1}{2}(1+f(3x-2))$ si $2/3 \leqslant x \leqslant 1$.

a) Montrer que $g \in E$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, \varphi^n(f) \in E$ (où $\varphi^n=\varphi \circ \cdots \circ \varphi$).

b) i) Écrire une fonction en python qui renvoie $\varphi(f)$.

ii) Ecrire une fonction iter (n, f) qui renvoie $\varphi^n(f)$.

iii) Tracer les courbes des fonctions $\varphi^n(f)$ pour les premières valeurs de n et $f: x \mapsto x$.

iv) Méme question avec $f: x \mapsto \sin(\pi x/2)^2$, Que peut-on remarquer ?

c) Montrer que φ est $1/2$ -lipschitzienne.

d) Montrer que la série $\sum\left(\varphi^{n+1}(f)-\varphi^n(f)\right)$ est normalement convergente.

En déduire la convergence uniforme de la suite $(\varphi^n(f))_{n\in N^*}$.

e) Montrer que la limite de cette suite ne dépend pas de la fonction f. On la note f_∞.

f) Montrer que f_∞ est l'unique fonction de E qui vérifie $\varphi(f_\infty) = f_\infty$.

1025. Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ et $(u_n)_n$ la suite définie par $u_0 = 1$ et,

pour tout $n \in \mathbb{N}, \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n+a}{n+b}$.

a) Montrer que, pour tout $n, u_n > 0$.

b) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n = \ln\left(n^{b-a}u_n\right)$.

i) Étudier la convergence de la série de terme général $v_{n+1} - v_{\mathrm{n}}$.

ii) En déduire une CNS pour que la série de terme général u_n converge.

On supposera dans la suite de l'exercice que cette condition satisfaite.

c) Déterminer le rayon de convergence de la série entière de coefficients u_n.

d) On note f la somme de la série entière précédente. Calculer $f(1)$.

Sol : a) Rec immédiate.

1026.a) Donner le développement en série entière de la fonction exponentielle.

Montrer que pour tout $z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)$.

b) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et nulle en dehors d'un segment.

Montrer l'existence de $g : z \in \mathbb{C} \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{\mathrm{t}z}\mathrm{d}t$.

c) Montrer que g est développable en série entière.

1027. PYTHON a) Écrire un fonction qui prend en entrée un entier n et retourne

une valeur approchée de $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^n}$.

b) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

c) On pose $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} I_k$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{I_k}{k}$.

Représenter les suites (s_n) et (S_n) pour n compris entre 1 et 100 . Conjectures ?

d) Prouver ces conjectures et donner la valeur de la somme le cas échéant.

1028. On considère la suite $(I_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n}$.

a) On définit les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_n \geqslant 1$

par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n), v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$.

Montrer qu'elles convergent vers la même limite.

b) Montrer que pour tout $n \geqslant 1, I_{n+1} = \left(1 - \dfrac{1}{3n}\right) I_n$.

c) Montrer qu'il existe des réels α et β tels que $\ln(I_n) = \alpha \ln(n) + \beta + o(1)$.

d) Montrer que la série de terme général I_n converge.

Sol : a) Exo

1029. On donne $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$. Soit $a > 0$ et $\xi \in \mathbb{R}$.

Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} e^{-i\xi x}\, \mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$, Ind. On pourra dériver par rapport à ξ.

Sol : on a fait en cours ?

1030. PYTHON a) Pour $x \in]-1,1[$ on pose $I(x) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \ln\left(1 - 2x\cos\theta + x^2\right) \mathrm{d}\theta$.

Émettre une conjecture sur les valeurs de la fonction I.

b) Pour $n \in \mathbb{N}^*, x \in]-1,1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $u_n(\theta) = \dfrac{x^n \cos(n\theta)}{n}$.

i) Montrer que la série de terme général $\theta \mapsto u_n(\theta)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

ii) Montrer que la fonction $f_x : \theta \mapsto \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n \cos(n\theta)}{n}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

iii) En déduire que $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \ln\left(1 - 2x\cos\theta + x^2\right) \mathrm{d}\theta = -2 \sum_{n\geqslant 1} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^n \cos(n\theta)}{n}\, \mathrm{d}\theta$

et justifier la conjecture de la question a).

1031. On note $E = C^0([a,b],\mathbb{R})$.

a) Montrer que l'application $(u, v) \mapsto \int_a^b u(x) v(x) \mathrm{d} x$ est un produit scalaire sur E.

b) Soit $K :] a, b]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

Pour $f \in E$, on définit la fonction $g=T(f)$ par :

$\forall x \in[a, b], g(x)=\int_a^b K(x, y) f(y) \mathrm{d} y \cdot$. Montrer que T est un endomorphisme de E.

Sol .

1032. Pour $x \in \mathbb{R}^{+}$, on note $F(x)=\int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2}$ et $G(x)=\int_0^1 \frac{e^{-\left(t^2+1\right) x}}{t^2+1} \mathrm{~d} t$.

a) Montrer que $I=\int_0^{+\infty} e^{-t^2}$ dt existe.

b) Montrer que G existe et qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$. Calculer $G(0)$.

c) Montrer que pour $x>0, G^{\prime}(x)=-2 F(x) F^{\prime}(x)$ et en déduire la valeur de I.

1033. Soit $I=\int_0^{+\infty} \frac{\sin (t)}{t} \mathrm{~d} t$. On pose $f: x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin (t)}{t} e^{-x t} \mathrm{~d} t$.

a) Prouver la convergence de I.

b) Déterminer le domaine de définition de f.

c) La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $10,+\infty[$?

d) Déterminer l'expression de f sur $] 0,+\infty[$.

e) Étudier la continuité de f en 0 .

f) Montrer que $I=\pi / 2$.

1034. On considère l'équation différenticlle $(E):\left(1+x^2\right) y^{\prime \prime}+x y^{\prime}-y=0$.

a) Justifier qu'il existe une unique solution de (E) sur R vérifiant $y(0)=\sqrt{2}$ et $y^{\prime}(0)=0$.

b) Déterminer les solutions de (E) développables en séries entières.

c) En posant $x=\operatorname{sh}(t)$, résoudre (E).

Sol : a)

1035. PYTHON. On considère l ' équation différentielle (E) : $\left(1+x^2\right) y^{\prime \prime}+x y^{\prime}-y / 4=0$.

a) Existe-t-il une solution y de (E) sar $]-1,1[$ vérifiant $y(0)=0$ et $y'(0)=\sqrt{2}$?

Si oui, est-elle unique ?

b) Si une telle solution existe, la représenter graphiquement à l'aide de Python.

c) Déterminer les solutions de (E) développables en série entière.

d) Soit $f_1 : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une solution de (E) développable en série entière

telle que $a_0 = 0$ et $a_1 = \sqrt{2}$. Quel est le rayon de convergence de cette série ?

1036. PYTHON. Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \dfrac{1-e^{-t}}{t}$ si $t \neq 0$ et $f(0) = 1$.

Soit $H : x \mapsto \sin(x) \displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\cos(t)\mathrm{d}t - \cos(x) \int_0^{x} f(t)\sin(t)\mathrm{d}t$.

On note enfin $(\mathcal{E})$ l'équation différentielle $y'' + y = f$.

a) Montrer que H est définie sur $\mathbb{R}$ et tracer son graphe sur $[0, 10]$.

b) Soit a un réel. Montrer qu'il existe une unique solution g_a de (ε) telle que $g_a(0) = a$ et

$g_a'(0) = 0$. Tracer les graphes de g_a et $g_a - H$ sur $[0, 10]$ pour $a = 1, 2$ et 5.

c) Soit a un réel.

Montrer qu'il existe une unique solution h_a de $(\mathcal{E})$ telle que $h_a(0) = 0$ et $h_a'(0) = a$.

Tracer les graphes de h_{a} et $h_{\mathrm{a}} - H$ sur $[0, 10]$ pour $a = 1, 2$ et 5 .

d) Émettre une conjecture sur H et la prouver.

e) Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-xt}}{1+t^2}$ dt. Montrer que F est solution de (ε).

f) Donner l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée à (E).

g) Que peut-on dire de $H - F$? Et de l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$?

1037. PYTHON Soient $\alpha > 0, v \in \mathbb{R}$ et (S) le système différentiel $\begin{cases} x"(t) = -\alpha x'(t) \\ y''(t) = -\alpha y'(t) - 1 \end{cases}$

a) Tracer la solution de (S) telle que $x'(0) = y'(0) = v$ et $x(0) = y(0) = 0$,

pour différentes valeurs de α et v. Interpréter qualitativement.

b) Résoudre le système. Montrer que la courbe solution a pour équation

$y=f(x)$, où $f: x \mapsto x\left(1+\dfrac{1}{\alpha v}\right)+\dfrac{1}{\alpha^2} \ln \left(1-\dfrac{\alpha x}{v}\right)$.

1038. On note S_C l'ensemble des fonctions $f \in C^0([0,+\infty[\times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[\times \mathbb{R}$ et qui vérifient, pour tout $t>0$ et $x \in \mathbb{R}, 1'$ équation

$(C): \partial_1 f(t, x)+f(t, x) \partial_2 f(t, x)=0$

Soit u une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ et croissante.

a) Soit $t \in \mathbb{R}^+$ et $x \in \mathbb{R}$. Montrer $\exists! a(t, x)$ tel que $x=a(t, x)+\operatorname{tu}(a(t, x))$.

On admet que la fonction $(t, x) \mapsto a(t, x)$ est continue sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[\times \mathbb{R}$.

b) Soit $f:(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \mapsto u(a(t, x))$.

i) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}, f(0, x)=u(x)$.

ii) Montrer que $f \in S_C$.

Probabilités

1039. PYTHON. On effectue des tirages dans une urne contenant initialement deux boules rouges et une boule noire. A chaque étape, on tire au hasard une boule dans l'urne puis on la replace dans l'urne et on ajoute une boule supplementaire de la même couleur.

On note X_k la variable aléatoire valant 1 si la boule tirée au k -ième tirage est rouge et 0 sinon. On note S_n le nombre de boules rouges tirées après n tirages.

On convient de poser $S_0=0$.

a) Écrire une fonction simulant n tirages et renvoyant la liste $\left[S_0, \ldots, S_n\right]$.

b) Ecrire une fonction renvoyant $\mathbf{E}\left(S_n\right)$ pour n allant de 0 à 20 .

Tracer la ligne brisée représentant $\mathbf{E}\left(S_n\right)$ en fonction de n.

c) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in[0, n]$. Déterminer lą loi conditionnelle de X_{n+1} sachant que $S_n=k$.

d) Déterminer une relation entre $\mathbf{E}\left(S_{n+1}\right)$ et $\mathbf{E}\left(S_n\right)$.

e) En déduire $\mathrm{E}(S_n)$ en fonction de n.

f) Déterminer la loi de X_k.

1040. a) Soient $B, C \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ non nuls. Déterminer le rang de la matrice BC^T.

b) Soit $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul. Montrer que l'ensemble E des colonnes $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que BC^T soit nulle ou non diagonalisable est un espace vectoriel.

Préciser sa dimension.

c) Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi donnée par $\mathcal{P}(X_1 = -1) = \mathcal{P}(X_1 = 1) = \frac{1}{2}$ et X la colonne de coordonnées $X_1, \ldots, X_n$ Soit $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ la colonne de coefficients tous égaux à 1 .

Déterminer la probabilité que la matrice BX^T soit nulle ou non diagonalisable.

1041. Un démarcheur dispose d'une liste de n correspondants qu'il appelle par vagues successives. Chaque appel est indépendant et identique. La probabilité d'obtenir un correspondant lors d'un appel est $p \in]0,1[$. Lors de la première vague, il appelle les n correspondants : soit X_1 le nombre de correspondants obtenus.

Lors de la deuxième vague, il appelle les $n - X_1$ correspondants absents lors de la première vague : soit X_2 le nombre de correspondants obtenus lors de cette vague d'appels.

Et ainsi de suite.

a) Les variables X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

b) Déterminer la loi de la variable Y_i qui indique le numéro de la vague à laquelle le correspondant numéro i répond, puis les lois des variables X_k.

1042. Soit (X_n) une suite de variable aléatoire mutuellement indépendantes suivant toutes une loi géométrique de paramètre p.

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*, S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$.

a) Soit $\epsilon > 0$. Déterminer la limite de $\left(\mathcal{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}-\frac{1}{p}\right| \geqslant \epsilon\right)\right)_{n \geqslant 1}$.

b) Que vaut $\mathcal{P}\left(S_n=k\right)$ si $k \leqslant n$?

c) Montrer que : $\forall k \geqslant n, \mathcal{P}\left(S_n=k\right)=\left(\begin{array}{c}k-1 \\ n-1\end{array}\right)(1-p)^{k-n} p^n$.

1043. PYTHON Soit $\left(Y_n\right)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi géométrique de paramètre 1/2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, X_n=2^{Y_n}$ puis $\bar{X}_{\mathrm{n}}=\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$.

a) Montrer que X_n n'est pas d'espérance finie.

b) Écrire une fonction Python qui prend un entier n en argument et renvoie une réalisation des n premiers termes de la suite $\left(\overline{X}_k\right)_k$.

c) Que peut-on conjecturer ? Le démontrer.

d) Calculer la loi de la variable $Z_{\mathrm{n}}=\min \left(X_n, 2^n\right)$ puis préciser son espérance et sa variance.

1044. PYTHON Soient X et Y deux variables aléatoires à valeur dans $\mathbb{N}$, dont la loi jointe est donnée par : $\mathcal{P}(X=i, Y=j)=\frac{c e^{-i}}{j^2+3 j+2}$ pour tous $i, j \in \mathbb{N}$.

a) Déterminer la constante c.

b) Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

c) Déterminer la loi de Y.

d) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

e) Soit $Z=5 X+7 Y$. Proposer une fonction en Python permettant de calculer $\mathcal{P}(Z=n)$ puis une fonction calculant la matrice colonne $(\mathcal{P}(Z=j))_{0 \leqslant j \leqslant n}$.

g) Montrez que pour $\mathcal{P}(Z=n)>0$ pour tout $n>23$.

1045. Une puce initialement placée à l'origine d'un plan (O, x, y) fait des sauts aléatoires d'une unité dans les quatre directions possibles. Soit $\left(X_n, Y_n\right)$ ses coordonnées après n déplacements. Calculer $\mathbf{E}\left(X_n\right)$ et $\mathbf{E}\left(X_n^2\right)$.

On pourra introduire $T_n = X_n - X_{n-1}$.

Centrale - PC

Algèbre

1046. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme R_k tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on ait $R_k\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^k + \frac{1}{x^k}$. Donner une expression de R_k.

1047. On pose, pour $p \in \mathbb{N}$, $A_p = ((i+j-1)^p)_{1 \leqslant i,j \leqslant p+1}$ et $B_p = ((i+j-1)^p)_{1 \leqslant i,j \leqslant p+2}$.

a) Montrer que B_p n'est pas inversible. Ind. Utiliser le polynôme $P_i(X) = (X+i)^p$.

b) Calculer $\det(A_p)$ Ind. Calculer BC avec $B = \left(\binom{p}{j-1} i^{j-1}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant p+1}$ et $C = \left((j-1)^{p+1-i}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant p+1}$.