1000. a) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \geqslant 2$ simplement scindé sur $\mathbb{R}$.

Montrer que P' est simplement scindé.

b) $8X^8 + 7X^7 + 4X^4 + 3X^3 + 2019X^2 + 2018X + 666$ est-il simplement scindé sur $\mathbb{R}$?

1001. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant tel que $P\left(X^2\right) = P(X)P(X-1)$.

a) Soit ω une racine de P. Montrer que ω^2 est aussi racine de P.

b) Montrer que les racines de P sont soit nulles, soit de module 1 .

c) Montrer que 0 n'est pas racine de P.

d) Déterminer les polynômes solutions.

1002. PYTHON . Soient $x_0, \ldots, x_{n-1}$ des réels distincts, (ordre croissant).

$L_0, \ldots, L_{n-1}$ les polynômes de Lagrange associés.

Soient $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, A_k = L_0 + \cdots + L_k, P_k = A_k - \displaystyle\sum_{i \neq k} \frac{A_k'\left(x_i\right)}{\Lambda_i'\left(x_i\right)} \Lambda_i$. où,

pour $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \Lambda_i = \left(X - x_i\right)\left(X - x_k\right) \displaystyle\prod_{j \neq i, j \neq k} \left(X - x_j\right)^2$.

a) Écrire une fonction Python Lambda $(i, \mathrm{k}, \mathrm{X})$ où $X = \left(x_0, \ldots, x_{n-1}\right)$ et qui renvoie Λ_i.

b) Vérifier que P est bien défini.

Calculer $P_k\left(x_j\right)$ pour tout $j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ et $P_k'\left(x_j\right)$ pour tout $j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ distinct de k.

Montrer que P_k est l'unique polynôme de degré $2n-2$ vérifiant ces conditions.

c) En étudiant les racines de P_k' et les variations de P_k, mq, pour $t \leqslant x_k$, on a $P_k(t) \geqslant 1$.

1003. Soit F un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que toute matrice non nulle de F soit inversible.

a) On suppose $K = \mathbb{C}$.

Montrer que pour tout couple de matrices (A, B) avec A inversible, il existe un

scalaire α tel que $\alpha A - B$ ne soit pas inversible. En déduire que $\dim(F) \leqslant 1$.

b) On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Que peut-on dire de F si n est impair ?

Pour $n = 2$, donner un exemple avec F de dimension 2.

Montrer que, si n est pair, la dimension de F ne peut excéder n.

1004. Soit $S = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que S est diagonalisable et préciser ses valeurs propres.

b) Montrer que S est semblable à une matrice de diagonale nulle.

c) Pour $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on pose $\varphi(M) = \operatorname{diag}(1, 2)M - M \operatorname{diag}(1, 2)$.

Déterminer l'image de φ. Montrer qu'il existe C et D telles que $S = DC - CD$.

1005. a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Montrer l'équivalence entre les assertions suivantes :

(i) A est inversible et A^{-1} est à coefficients dans $\mathbb{Z}$; (ii) $\det(A) \in \{-1, 1\}$.

b) Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = I_2$.

Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, inversible, avec A^{-1} à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

Montrer que toute valeur propre de A est de module 1 .

c) Montrer que l'ensemble des polynômes caractéristiques des matrices

$A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ pour lesquelles il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = I_2$ est fini.

1006. PYTHON. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On s'intéresse au problème $FL(n)$ suivant : étant donnés $a_0, \dots, a_{n-1}, \lambda_0, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{C}$, existe-t-il une matrice dont les coefficients diagonaux sont $a_0, \dots, a_{n-1}$ et les valeurs propres sont $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1}$?

a) Écrire une fonction Python prenant en entrée des complexes

$a_0, \ldots, a_{n-1}, \mu_0, \ldots, \mu_{n-1}, \alpha$ et renvoyant la matrice $\begin{pmatrix} a_0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} & 1 \\ \mu_0 & \cdots & \cdots & \mu_{n-1} & \alpha \end{pmatrix}$.

b) Montrer que le problème $FL(2)$ admet une solution si et seulement si $a_0+a_1 = \lambda_0+\lambda_1$.

Préciser une solution sous cette condition.

c) $FL(3)$ admet-il une solution pour $a_0 = 1, a_1 = -1, a_2 = 0, \lambda_0 = 1, \lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = -3$?

d) Soient $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$. On pose , pour $k \in [\![0, n-1]\!], P_k = \prod_{i=0}^{k-1} (X - a_i)$.

i) Justifier que la famille $(P_0, \ldots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$

puis qu'il existe $\mu_0, \ldots, \mu_{n-1}$ tels que $\prod_{k=0}^{n-1} (X - \lambda_k) = P_n - \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k P_k$.

ii) Écrire une fonction Python prenant $a_0, \ldots, a_{n-1}$ et renvoyant la liste $[P_0, \ldots, P_n]$.

iii) Écrire une fonction Python prenant $a_0, \ldots, a_{n-1}, \lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1}$ et renvoyant les μ_k.

1007. a) Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $\operatorname{tr}(A) = 0$ et $\operatorname{tr}(A^2) \neq 0$.

Montrer que A est diagonalisable.

b) Soient $n \geqslant 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\operatorname{tr}\left(A^k\right) = 0$

pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$ et $\operatorname{tr}(A^n) \neq 0$.

Montrer que A admet une valeur propre non nulle. Montrer que que A est diagonalisable.

Ind. Noter $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ les valeurs propres non nulles distinctes, de multiplicités $n_1, \ldots, n_k$, et considérer une matrice de Vandermonde.

1008. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable telle que la suite $\left(A^k\right)$ converge vers une matrice L.

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ les valeurs propres distinctes de A.

a) Que peut-on dire des λ_i ?

b) Montrer que A admet un polynôme annulateur de degré p.

c) Mq les valeurs propres de A sont racines de tous les polynômes annulateurs de A.

En déduire que $(I_n, A, \dots, A^{p-1})$ est libre.

d) Montrer que, pour $k \in \mathbb{N}$, il existe $P_k \in \mathbb{R}_{p-1}[X]$ tel que $A^k = P_k(A)$.

En déduire qu'il existe $P \in \mathbb{R}_{p-1}[X]$ tel que $L = P(A)$.

1009. PYTHON . On munit $\mathbb{R}^4$ de sa structure euclidienne canonique.

Soit σ la réflexion de $\mathbb{R}^4$ par rapport à l'hyperplan d'équation $x + y + 3z + t = 0$.

a) Soit $x \in \mathbb{R}^4$. Montrer que $\sigma(x) = x - 2\langle x, u\rangle u$ où

$u = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}(1, 1, 3, 1)^T$.

En déduire la matrice P_σ de σ dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

b) Soit $A = \begin{pmatrix} 13 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 6 & 4 \\ 0 & 6 & 9 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 9 \end{pmatrix}$.

Montrer que P_σ est une matrice de passage vers une base de diagonalisation de A.

En déduire les valeurs propres de A.

1010. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, u_k

la forme linéaire sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ définie par $u_k : \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} a_j X^j \mapsto a_k$.

a) Montrer que $(u_0, \dots, u_{n-1})$ est une base de $\mathcal{L}(\mathbb{R}_{n-1}[X], \mathbb{R})$.

b) Soient $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{R}$ distincts et, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$,

v_k la forme linéaire sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ définie par $v_k : P \mapsto P(\alpha_k)$.

Déduire de la question précédente que $(v_0, \dots, v_{n-1})$ est une base de $\mathcal{L}(\mathbb{R}_{n-1}[X], \mathbb{R})$.

c) Montrer qu'il existe une unique famille $(P_n)_{n \geqslant 0}$ de polynômes telle que :

i) pour tout $n \in \mathbb{N}, P_n$ est de degré n ;

ii) pour tout $n \in \mathbb{N}$, le coefficient dominant de P_n est positif ;

iii) pour tous $m, n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{P_n(t)P_m(t)}{\sqrt{t(1-t)}}\mathrm{d}t = \delta_{m,n}$.

1011. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f_n : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(\int_0^1 P(s)s^k \, \mathrm{d}s \right) X^k \in \mathbb{R}_n[X]$.

a) Justifier que f_n est un automorphisme diagonalisable de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Soit M_n la matrice de f_n dans la base canonique.

Soit Y un vecteur colonne. Montrer que $Y^T M_n Y = \displaystyle\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} y_k s^k \right)^2 \, \mathrm{d}s$.

En déduire que les valeurs propres de f_n sont strictement positives.

c) Soit $\lambda_{1,n}$ la plus petite valeur propre de f_n. Montrer que $\lambda_{1,n} \to 0$.

1012. a) Mq les valeurs propres d'une matrice symétrique réelle sont toutes réelle.

Que dire des valeurs propres réelles des matrices antisymétriques réelles ?

b) Soit S l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M^2 + M^T = I_n$.

Montrer que les matrices de S sont diagonalisables et symétriques.

Analyse

1013. a) La matrice $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Est-elle limite d'une suite de matrices diagonalisables ?

b) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

Mq P est scindé sur $\mathbb{R}$ ssi il existe $c > 0$ tel que, pour tout $z \in \mathbb{C}, |P(z)| \geqslant c|\operatorname{Im}(z)|^n$.

c) Soit (A_k) une suite de matrices diagonalisables sur $\mathbb{R}$ convergeant vers $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$.

1014. PYTHON. Soient $a, b > 0, u_0, u_1 > 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \dfrac{u_{n+1} + a}{u_n + b}$.

a) Représenter, pour différentes valeurs de u_0, u_1, a, b, les valeurs successives de (u_n).

b) Exprimer u_{n+3} en fonction de u_n et u_{n+1}.

c) Montrer qu'il existe une constante M ne dépendant que de a et b telle que,

pour tout $n \geqslant 3, u_n \leqslant M$.

Montrer que la suite (u_n) est minorée.

Posons, pour tout $n, \alpha_n = \sup\{u_k, k \geqslant n\}$ et $\beta_n = \inf\{u_k, k \geqslant n\}$.

d) Justifier que les suites (α_n) et (β_n) sont bien définies et qu'elles convergent.

e) Soient α_∞ et β_∞ les limites des suites (α_n) et (β_n).

Montrer que $\alpha_\infty \leqslant \dfrac{\alpha_\infty + a}{\beta_\infty + b}$ et $\beta_\infty \geqslant \dfrac{\beta_\infty + a}{\alpha_\infty + b}$.

En déduire $\alpha_\infty = \beta_\infty$.

1015. Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*, P_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(X - k)$.

a) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n$.

b) Montrer que P_n' admet une unique racine dans $]0, 1[$. On la note λ_n.

c) Simplifier $\dfrac{P_n'}{P_n}$.

d) En déduire un équivalent de λ_n quand $n \to +\infty$.

1016. a) Montrer que deux matrices semblables ont même trace.

Que dire de la réciproque ?

Même question en remplaçant trace par déterminant puis par polynôme caractéristique.

b) Soit $G = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}),\ \det A = 1\}$.

Déterminer une condition suffisante sur les traces pour que deux matrices

$A, B \in G$ soient semblables.

c) Soit $\varphi : \mathbb{R} \to G$ de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifiant $\varphi(0) = I_2$ et $\varphi'(0) = A$.

Montrer que $\operatorname{tr} A = 0$.

1017. a) Justifier la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

b) Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telle qu'existe un réel $C > 0$ tel que,

pour tout $t \in \mathbb{R}, |f(t)| \leqslant \dfrac{C}{1+t^2}$.

Justifier l'existence, pour tout $h > 0$, de $S(h) = h \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f(nh)$.

c) On fixe $h > 0$ et l'on considère $\varphi_h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}; t \mapsto f\left(\left\lfloor \dfrac{t}{h} \right\rfloor h\right)$.

Montrer que $S(h) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi_h(t)\mathrm{d}t$.

d) Montrer que $S(h)$ tend vers $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ quand h tend vers 0 .

1018. PYTHON. Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*, f_n : x \mapsto \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$.

a) Tracer $f_{10}, f_{100}, f_{1000}$ et exp ; que peut-on conjecturer ?

Établir cette conjecture. La prouver.

c) Montrer que, pour $x \in \mathbb{R}^+$ et $n \in \mathbb{N}^*, x \geqslant \ln(1+x) \geqslant x - \dfrac{x^2}{2}$ et $e^x \geqslant \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$.

a) Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}^+$.

Montrer que la suite (f_n) converge uniformément sur $[a,b]$ vers exp et, plus précisément, que $\|f_n - \exp\|_{\infty,[a,b]} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$.

1019. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n n}{n^2 + x}$.

a) Établir la convergence simple de la série de terme général $u_n(x)$ sur $\mathbb{R}^+$ et, pour $a > 0$, sa convergence uniforme sur $[0,a]$.

b) Soit (a_n) une suite croissante de réels positifs ou nuls.

i) Montrer que $0 \leqslant (-1)^n \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k \leqslant a_n$.

ii) Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

1020. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soient $u_n(x) = (-1)^n \dfrac{x^n}{1 - x^n}$ et $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$.

b) Montrer que f est la somme d'une série entière sur $]-1,1[$.

1021. a) Rappeler le développement en série entière de $\ln(1+x)$. Montrer : $\ln 2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k 2^k}$.

Pour $x \in]0,1[$ et $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $E_k(x) = \lfloor 2^k x \rfloor - 2 \lfloor 2^{k-1} x \rfloor$.

b) Justifier que, pour $x \in]0,1[$ et $k \in \mathbb{N}^*$, $E_k(x) \in \{0,1\}$.

c) Montrer que, pour $x \in]0,1[$, $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{E_k(x)}{2^k}$..

1022. a) Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ pour $x \neq 0$.

Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et calculer toutes ses dérivées en 0 .

Existe-t-il un voisinage de 0 sur lequel la fonction φ coinncide avec sa série de Taylor ?

b) Soit E l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ qui coincident sur un voisinagé de 0 avec leur série de Taylor en 0 . Montrer que E est un espace vectoriel et que E

est stable par produit.

1023. a) Montrer la convergence de Ia suite de terme général $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$.

b) On pose $a_1 = -1$ et, pour $n \geqslant 2, a_n = -\frac{1}{n} - \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$.

Déterminer les rayons de convergence des séries entières

$$f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n) x^n \text{ et } g : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n.$$

c) Que peut-on dire de $g(1)$? En déduire un équivalent simple de f en 1.

1024. PYTHON. Soient $n \in \mathbb{N}^*, A_0, \ldots, A_{n-1}$ les points du plan complexe d'affixe les racines n-ièmes de l'unité, M_n le nombre d'ensembles de segments disjoints ayant pour extrémités ces points (par exemple, avec $n = 4, \{[A_0, A_2], [A_1, A_3]\}$ est un tel ensemble). On vérifie que $M_3 = 4$ avec les ensembles de segments : $\emptyset, \{[A_0, A_1]\}, \{[A_1, A_2]\}$ et $\{[A_0, A_2]\}$. Par convention, on pose $M_0 = M_1 = 1$.

a) Déterminer M_4 et M_5.

b) Justifier que, pour $n \in \mathbb{N}^*, M_{n+1} = M_n + \sum_{i=0}^{n-1} M_i M_{n-1-i}$.

c) Écrire un programme Python renvoyant la liste des $M_0, \ldots, M_n$.

Vérifier que $M_n \leqslant 3^n$ pour $n \leqslant 20$.

On note, pour tout $z \in \mathbb{C}, M(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} M_n z^n$.

d) Soit z de module strictement inférieur à $\frac{1}{3}$.

Montrer que cette somme est bien définie puis que $M(z) = 1 + zM(z) + z^2 M(z)^2$.

e) Calculer $M(z)$.

1025. Soit $a_n = \int_0^{+\infty} e^{-t} (\sin t)^{2n} \, \mathrm{d}t$.

a) Montrer que la suite (a_n) est bien définie et déterminer sa limite.

b) Trouver une relation entre a_n et a_{n-1}.

c) Soit $b_n = \sqrt{n}a_n$. Établir la convergence de la série de terme général $\ln\left(\dfrac{b_n}{b_{n-1}}\right)$.

1026. PYTHON. Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t+1}\,\mathrm{d}t$.

a) Tracer la courbe représentative de F à l'aide de Python.

Que peut-on conjecturer sur le domaine de définition, les variations et limites de F ?

b) Démontrer ces conjectures.

c) Montrer que F est solution d'une équa diff d'ordre 1 à coefficients constants.

En déduire que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son domaine de définition.

1027. Soient f une fonction continue sur $[0,1]$, à valeurs positives ou nulles et,

pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \int_0^1 t^n f(t)\mathrm{d}t$.

a) Justifier la convergence de $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n u_n$ et montrer que $S = \displaystyle\int_0^1 \frac{f(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

b) Montrer : $S = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 \left(\frac{1-t}{2}\right)^n f(t)\mathrm{d}t$ et $\ln(2) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{p+1}(p+1)}$.

c) Soit $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}$.

i) Trouvez un encadrement de $\ln(2) - S_n$.

ii) Trouvez un équivalent de $\ln(2) - S_n$.

iiii) Comment obtenir un développement asymptotique de $\ln(2) - S_n$?

1028. Soit $A : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$.

a) Supposons, dans cette question, qu'il existe $S : \mathbb{R} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $S^{-1}(t)A(t)S(t) = A(0)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $B : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ continue telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}, A'(t) = B(t)A(t) - A(t)B(t)$.

b) Supposons, dáns cette question, qu'il existe $B : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ continue telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}, A'(t) = B(t)A(t) - A(t)B(t)$. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}, A(t)$ est semblable à $A(0)$.

1029. a) Déterminer le nombre de solutions de $xe^{-x} = \lambda$ en fonction de $\lambda \in \mathbb{R}$.

b) Trouver les extrema de $f : (x, y) \mapsto xye^{-x-y}$ sur $\mathbb{R}^2$.

c) Déterminer les λ tels que l'ensemble $\left\{(x, y) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^2, f(x, y) = \lambda\right\}$ est non vide.

1030. Soient $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et $S(g) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = g(x, y)\}$.

a) Montrer que $S(g)$ n'a que des points réguliers.

b) On cherche les fonctions g telles que ∇g soit constamment orthogonal à $(2, 1)$ ou, ce qui revient au même, telles que $(E) 2\dfrac{\partial g}{\partial x} + \dfrac{\partial g}{\partial y} = 0$.

i) Montrer que l'endomorphisme $u : (x, y) \mapsto (x - 2y, y)$ de $\mathbb{R}^2$ est inversible.

ii) Pour h de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, on pose $f = h \circ u^{-1}$.

Calculer les dérivées partielles de f. En déduire les solutions de (E).

1031. Soient $n \in \mathbb{Z}$ et (E_n) l'équation différentielle $tu'' + tu' - n^2u = 0$.

a) Déterminer les $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $u_\alpha : t \mapsto t^\alpha$ soit solution de (E_n) sur $\mathbb{R}^{+*}$.

b) Résoudre (E_n) sur $\mathbb{R}^{+*}$.

c) Soient f, g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial g}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{\partial g}{\partial x}$.

On pose $\tilde{f} : (r, \theta) \mapsto f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ et $\tilde{g} : (r, \theta) \mapsto g(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

Relier $\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial r}$ à $\dfrac{\partial \tilde{g}}{\partial \theta}$ puis $\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}$ à $\dfrac{\partial \tilde{g}}{\partial r}$.

d) Montrer qu'il existe $a_n \in \mathbb{C}$ tel que, pour tout $r > 0$, $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(r, \theta)e^{in\theta}\mathrm{d}\theta = a_n r^{|n|}$.

1032. PYTHON. Soient $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (2x^2 + 3y^2)\, e^{-\left(x^2+y^2\right)}$ et,

pour $R > 0$, $D_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leqslant R\}$.

a) Tracer la surface représentative de la fonction f sur $[-2,2]^2$.

b) Montrer que f admet un minimum sur $\mathbb{R}^2$;

déterminer sa valeur et le point en lequel il est atteint.

c) Soit $a>0$. Montrer qu'il existe $R_a>0$ tel que, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2\backslash D_{R_a}, f(x,y)\leqslant a$.

d) Montrer que f admet un maximum M sur $\mathbb{R}^2$. Calculer M.

e) Pour $c\in[0,M]$, soit $\Gamma_c=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, f(x,y)=c\}$.

Tracer Γ_c pour $c\in\{0.3,0.4,0.5,0.6,0.7,0.75,0.8,0.9\}$.

1033. PYTHON. Soit $f:(x,y)\mapsto\frac{1}{2}(\operatorname{ch}(2y)-\cos(2x))$.

Pour $r\in\mathbb{R}^+$soient $\mathcal{B}_r=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, x^2+y^2\leqslant r^2\}, \Omega_r=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, x^2+y^2<r^2\}$ et

$\mathcal{C}_r=\mathcal{B}_r\backslash\Omega_r$.

a) Soit $r>0$. Avec Python, conjecturer les variations de $g_r:\theta\mapsto f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,

la parité de g_r, les points où g_r atteint son maximum.

b) Préciser la nature topologique des parties $\mathcal{B}_r, \Omega_r$ et $\mathcal{C}_r$.

c) Justifier que f admet un minimum sur $\mathbb{R}^2$ atteint en $(0,0)$.

d) Montrer que f admet un maximum, noté $M(r)$, sur $\mathcal{B}_r$.

e) Écrire une fonction Python renvoyant $M(r)$.

Tracer sur un même graphique la courbe représentative de $r\mapsto M(r)$

et celle de $r\mapsto\operatorname{sh}^2(r)$ sur $[1,4]$.

Conjecturer un résultat puis le démontrer.

Probabilités

1034. Soient X et Y deux va indépendantes suivant la loi uniforme sur $[\![1,6]\!]$.

a) Déterminer la loi de $X+Y$.

b) Déterminer la décomposition en facteurs irr de $1+T+T^2+T^3+T^4+T^5$ dans $\mathbb{R}[T]$.

c) Soient X' et Y' deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $[\![1,6]\!]$.

Montrer que si $X'+Y'$ et $X+Y$ suivent la même loi alors X' et Y' suivent la loi uniforme.

1035. PYTHON. On dispose de n urnes $U_1,\ldots,U_n$ et n boules numérotées de 1 à n, que l'on place indépendamment dans les urnes, chaque boule ayant la probabilité $\frac{1}{n}$ d'être placée dans l'urne U_i pour chaque $i\in[\![1,n]\!]$. On note X_n le nombre d'urnes vides après le placement des n boules.

a) Écrire une fonction Python different qui prend une liste l et qui renvoie le nombre d'éléments distincts de l. Par exemple, different $([1,2,3,1,2])$ renvoie 3 .

b) Écrire une fonction Python simulX (n) et renvoie une simulation de X_n.

c) Pour tout $i\in[1,n]\!]$, on note Y_i la variable aléatoire valant 1 si l'urne U_i est vide,

0 sinon. Déterminer la loi de Y_i, son espérance et sa variance.

d) Montrer que $X_n=Y_1+\cdots+Y_n$. Est-ce que la loi de X_n est binomiale ?

e) Calculer l'espérance de X_n.

f) Écrire une fonction Python esperance X $(n\ )$ et renvoie une valeur approchée de $\mathbf{E}\,(X_n)$.

g) Calculer la covariance de Y_i et Y_j pour $i\neq j$. En déduire la variance de X_n.

1036. Soient X et Y deux va indépendantes de loi géométrique de paramètre p.

Soit $M=\begin{pmatrix} X & Y\\ Y & X\end{pmatrix}$. Soient I,S avec $I\leqslant S$ les valeurs propres de M.

a) Déterminer les expressions de I et S en fonction de X et Y.

b) Quelle est la probabilité que la matrice M soit inversible ?

c) Calculer la covariance de I et S. Ces variables sont-elles indépendantes ?

d) Montrer que, pour tout $k \geqslant 2, \mathbf{P}(S=k)=(k-1)p^2(1-p)^{k-2}$.

1037. Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires indépendantes

suivant la loi uniforme sur $\{-1,1\}$.

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*, S_n = X_1+\cdots+X_n$.

a) Pour $t\in\mathbb{R}$, justifier que $\exp(tX_n)$ admet une espérance et la calculer.

Montrer que $\mathbf{E}(\exp(tX_n)) \leqslant e^{t^2/2}$ pour tout $(n,t)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{R}$.

b) Justifier que $\exp(tS_n)$ admet une espérance et la calculer.

Déterminer la limite de $\mathbf{E}(\exp(tS_n/\sqrt{n}))$ quand n tend vers $+\infty$.

1038. Soit (X_n) une suite i.i.d. de variables aléatoires de Rademacher

c'est-à-dire telle que $\mathbf{P}(X_n=1)=\mathbf{P}(X_n=-1)=\dfrac{1}{2}$.

On pose, pour $n\in\mathbb{N}^*, S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ et $N=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} 1_{S_n=0}$.

a) Donner la signification des événements $(S_n=0), (N<+\infty), (N=+\infty)$.

Exprimer $(N<+\infty)$ et $(N=+\infty)$ à partir des événements $(S_k=0)$.

b) Montrer que $\mathbf{P}(N<+\infty)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbf{P}(S_n=0)\,\mathbf{P}(\forall k\in\mathbb{N}^*, S_k\neq 0)$.

c) On admet que la série $\sum \mathbf{P}(S_n=0)$ diverge. En déduire $\mathbf{P}(N=+\infty)$.

d) Montrer que la série $\sum \mathbf{P}(S_n=0)$ diverge.

Ind. Se ramener à des variables de Bernoulli.