RMS Centrale
PSI *
Année 2022

Année 3.

1086. Soient $\omega \in \mathbb{C}$ et $P = X^3 + \omega X^2 - \bar{\omega} X - 1$.

a) Préciser le nombre de racines rélles de P en fonction de ω.

b) Montrer que P admet au moins une racine de module 1 .

c) Vérifier que, pour toute racine z de $P, |z| \leqslant 1 + |\omega|$.

Sol à la va vite :

1087. Soit $(L_0, \ldots, L_n)$ une famille de $\mathbb{R}_n[X]$ vérifiant : $\forall (i,k) \in \{0, \ldots, n\}, L_k(i) = \delta_{i,k}$.

a) Donner la forme factorisée des L_k et exprimer le coeff dominant avec des factorielles.

b) Montrer que $(L_0, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

c) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifiant $\forall k \in \{0, \ldots, n\}, P(k) = k^n$.

Exprimer P de deux manières différentes.

d) Donner une expression simplifiée de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) (-1)^{n-k} k^n$.

e) Donner la dimension de $\mathcal{L}\left(\mathbb{R}_n[X],\ \mathbb{R}\right)$.

Mq $\exists!$, $(n+1)$-uplet $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tq, $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \displaystyle\int_0^n P(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k P(k)$

Sol :

1088. Soit $\Delta : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto P(X+1) - P(X)$.

On pose $Q_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*, Q_n = \displaystyle\frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} (X - k)$

a) Montrer que $(Q_0, \ldots, Q_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Calculer $\Delta(Q_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

c) Préciser $\operatorname{Ker}\Delta$ et $\operatorname{Im}\Delta$.

d) Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ tel que $f \circ \Delta = \Delta \circ f$.

Mq il existe une suite $(u_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tq, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $f(P) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \Delta^n(P)$.

Sol : Classique.

1089. $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ les polynômes tq $P_0 = 1$ et $k \in [1, n]$, $P_k = X(X-1)\cdots(X-k+1)$

a) Montrer que $(P_0, \ldots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Soient $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{N}^*$ et $b_0 = 0$.

On pose $Q = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i X^{b_i}$. On suppose qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q = (1-X)^n P$.

b) Exprimer, pour $k \in [\![0, n]\!]$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i P_k(b_i)$ en fonction de P.

c) $i \in [\![0, n]\!], B_i = (1, b_i, \ldots, b_i^n)$. Exprimer $S = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i B_i$ en fonct de $\mu = (-1)^n n! P(1)$.

Sol : Classique.

1090. a) Soit $u : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto P' \in \mathbb{R}_n[X]$.

Exhiber une base de $\mathbb{R}_n[X]$ dans laquelle la matrice de u n'a que des coeff 0 ou 1.

b) Soit $Q \in \mathbb{R}_n[X]$. Montrer qu'il existe un unique $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P - P' = Q$.

Montrer que, si Q est à valeurs positives, il en est de même pour P.

Sol : Classique.

1091. Soient $a_0, \ldots a_{N-1} \in \mathbb{C}, \theta \in \mathbb{R}$.

$$J=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{N-2} & a_{N-1} \\ a_{N-1} & a_0 & a_1 & & a_{N-2} \\ a_{N-2} & a_{N-1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & \cdots & a_{N-2} & a_{N-1} & a_0 \end{pmatrix}, V=\begin{pmatrix} e^{i\theta} \\ e^{2i\theta} \\ \vdots \\ \vdots \\ e^{Ni\theta} \end{pmatrix}.$$

a) Exprimer A comme polynôme en J.

b) Montrer que J est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que V soit un vecteur propre de J.

c) Montrer que A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

Exhiber $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP$ est diag. En déduire une expression de $\det(A)$.

Sol : Classique.

1092.Bel exercice de référence... Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ linéaire telle que

$f\left(I_n\right) = I_p$ et $f(AB) = f(A)f(B)$ pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit $\Phi : M \to \mathrm{tr}(f(M))$.

a) Justifier que, pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \Phi(AB) = \Phi(BA)$.

b) En déduire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\Phi : M \mapsto \alpha\, \mathrm{tr}(M)$.

c) Montrer que n divise p.

d) Montrer que, si A est diagonalisable, alors $f(A)$ est diagonalisable.

e) Dans le cas $n = p = 2$, montrer que f est bijective.

Sol :

1093. Pour $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, on pose $M^* = \bar{M}^T$.

Soient $\mathcal{A} = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}); M^* = -M, \mathrm{tr}(M) = 0\}$ et $\mathcal{G} = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}); M^*M = I_2, \det(M) = 1\}$

a) Montrer que $\mathcal{A}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et préciser sa dimension.

b) L'ensemble $\mathcal{A}$ est-il un $\mathbb{C}$-espace vectoriel ?

c) Caractériser $\mathcal{A} \cap \mathcal{G}$.

d) Une matrice appartenant à $\mathcal{G}$ est-elle diagonalisable ?

Sol :

1094. PYTHON. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On s'intéresse au problème FL (n) suivant : étant donnés $a_0, \ldots, a_{n-1}, \lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{C}$, existe-t-il une matrice dont les coefficients diagonaux sont $a_0, \ldots, a_{n-1}$ et les valeurs propres sont $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1}$?

a) Écrite une fonction Python prenant en entrée des complexes $a_0, \ldots, a_{n-1}, \mu_0, \ldots, \mu_{n-1}, \alpha$ et renvoyant la matrice $\begin{pmatrix} \alpha_0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} & 1 \\ \mu_0 & \cdots & \cdots & \mu_{n-1} & \alpha \end{pmatrix}$.

b) Montrer que le problème FL(2) admet une solution si et seulement si $a_0+a_1 = \lambda_0+\lambda_1$. Préciser une solution sous cette condition.

c) Le probleme $FL(3)$ admet-il une solution pour $a_0 = 1, a_1 = -1, a_2 = 0, \lambda_0 = 1, \lambda_I = 2$ et $\lambda_2 = -3$?

d) Soient $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$. On pose, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, $P_k = \prod_{i=0}^{k-1} (X - a_i)$.

e) Justifier que la famille $(P_0, \ldots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, puis qu'il existe $\mu_0, \ldots, \mu_{n-1}$ tels que $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} (X - \lambda_k) = P_n - \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k P_k$

f) Écrire une fonction Python prenant en entree $a_0, \ldots, a_{n-1}$ et renvoyant $[P_0, \ldots, P_n]$.

g) Écrire une fonction Python prenant en entrée $a_0, \ldots, a_{n-1}, \lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1}$ et renvoyant les μ_k

1095. PYTHON. On munit $\mathbb{R}_3[X]$ du produit scalaire $(P, Q) \mapsto \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t$.

a) Soit P_{X^3} le projeté orthogonal de X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$.

Montrer avec Python que le polynôme $X^3 - P_{X^3}$ est scindé sur $\mathbb{R}$.

b) Écrire une fonction Python qui prend $(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3, (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ et

$Q \in \mathbb{R}_3[X]$ et renvoie $\lambda_1 Q(y_1) + \lambda_2 Q(y_2) + \lambda_3 Q(y_3)$.

c) Déterminer les $(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ tels qu'il existe un unique $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ vérifiant,

pour tout $Q \in \mathbb{R}_3[X]$, $\displaystyle\int_0^1 Q(t)\mathrm{d}t = \lambda_1 Q(y_1) + \lambda_2 Q(y_2) + \lambda_3 Q(y_3)$

d) Calculer dans ce cas les coefficients λ_1, λ_2 et λ_3 avec Python.

Sol : Un élève sera désigné.

1096. Soit E l'ensemble des suites réelles $(u_n)_n$ telles que la série $\sum u_n^2$ converge.

Pour $u = (u_n)_n$ et $v = (v_n)_n$ dans E, on pose $\langle u, v\rangle = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$.

a) Montrer que $\langle,\rangle$ définit un ps sur E.

b) Montrer que si $u \in E$ jamais nulle, alors $1/u$ n'est pas dans E.

c) Trouver une condition nécessaire et suffisante sur α pour que $\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right) \in E$.

d) On note F l'ensemble des suites réelles nulles à partir d'un certain rang.

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E de dimension infinie.

e) Que dire de $F + F^\perp$ et de $\left(F^\perp\right)^\perp$?

Sol : "vue" en td.

1097. Soient $n \geqslant 2, a, b \in \mathbb{R}$ et $M \in M_n(\mathbb{R})$ avec des a sur la diagonale et des b en dehors.

a) Donner les conditions sur (a, b) pour que M soit inversible.

b) On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique. Soit $(u_1, \ldots, u_{n+1})$ une famille de vecteurs unitaires telle, que pour tous $i \neq j, \langle u_i, u_j\rangle = \alpha$. Soit enfin $G \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ de coefficients $\langle u_i, u_j\rangle$

c) Montrer que le rang de G est au plus n.

d) Déterminer la valeur de α telle que G soit exactement de rang n.

Sol :

1098. On pose $\Phi : (A, B) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})^2 \mapsto \mathrm{Tr}\left(A^T B\right)$.

a) Montrer que Φ est un produit scalaire.

Montrer que $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux.

Donner l'expression de $S(M)$ symétrie orthogonale de M par rapport à $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$.

b) Soit A une matrice de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.

Soit S_A sa projection orth sur $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ et $\mathrm{Sp}\,(S_A)$ son spectre. Mq $1 \in \mathrm{Sp}\,(S_A) \subset [-1, 1]$.

1099. PYTHON, a) Écrire une fonction Python qui prend un entier n et renvoie

une matrice de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ à coefficients aléatoires dans $[0, 1[$.

Calculer les valeurs propres et des vecteurs propres de quelques-unes de ses matrices.

Que peut-on conjecturer sur la valeur propre maximale ? Sur un vecteur propre associé ?

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique.

Soient $M \in \mathcal{S}_n\left(\mathbb{R}^+\right), \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ses valeurs propres et α leur maximum.

Soit $\Phi : X \mapsto \langle X, MX \rangle$.

a) Justifier l'existence de α. Mq, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \Phi(X) \leqslant \alpha \|X\|^2$ et

qu'il y a égalité ssi X appartient au sous-espace propre de M associé à α.

b) Soit $C = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}); \|X\| = 1 \text{ et } \forall i \in [\![1, n]\!], X_i \geqslant 0\}$.

Montrer que Φ est bornée sur C et admet un maximum $\mu \leqslant \alpha$.

c) Soient X un vecteur propre unitaire de M associé à α et $W \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

dont les composantes sont les valeurs absolues des composantes de X.

Montrer que $W \in C$ et en déduire que $\mu \geqslant |\alpha|$.

d) Conclure que $\alpha \geqslant 0$ puis que M admet un vecteur propre positif et unitaire associé à α.

e) Montrer que, pour tout $i \in [\![1, n]\!], |\lambda_i| \leqslant \alpha$.

1100. Soient $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $S = (s_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

a) Montrer que, pour tous $i, j \in [\![1, n]\!], |a_{i,j}| \leqslant 1$.

b) Montrer que, si S est positive, alors, pour tout $i \in [\![1, n]\!], s_{i,i} \geqslant 0$.

c) Montrer que, si S est positive, alors $\mathrm{tr}(SA) \leqslant \mathrm{tr}(S)$. Étudier la réciproque.

Sol :

Analyse

1101. Soit E l'ensemble des $f \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R})$ telles que $f(0) = f'(0) = 0$.

On pose, pour $f \in E, N(f) = \|f + 2f' + f''\|_\infty$.

a) Soit $h : t \mapsto f(t)e^t$. Montrer que, pour tout $t \in [0, 1], h(t) = \displaystyle\int_0^t (t - u)h''(u)\mathrm{d}u$.

b) Montrer que N est une norme sur E.

c) Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que, pour tout $f \in E, \|f\|_\infty \leqslant aN(f)$.

Déterminer le plus petit a satisfaisant cette condition.

Sol :

1102. a) Soient $P \in \mathbb{C}[X], A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Montrer que, si A est semblable à B, alors $P(A)$ est semblable à $P(B)$.

b) Soit $(B_k)_{k \geqslant 0}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui converge vers $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On suppose que, pour tout $k \in \mathbb{N}, B_k$ est semblable à une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dz.

Montrer que A est semblable à B.

c) Est-ce encore vrai si A n'est pas diagonalisable ?

1103. PYTHON. Soit (u_n) definie par $u_0 \in [0, \pi]$ et, pour $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin\left(\frac{u_k}{n+1}\right)$.

a) Ecrire un programme Python qui prend un entier n et qui renvoie les n premières valeurs : de cette suite. Discuter sa complexité en temps et en mémoire.

b) Montrer que, pour $x \in [0, \pi], x - \dfrac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x$.

c) On considère $v_n = \dfrac{1}{n+1} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

i) Montrer que $u_n \in [0, \pi]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

ii) Montrer que $v_n - \dfrac{\pi^3}{6(n+1)^2} \leqslant u_{n+1} \leqslant v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

En déduire que $-\dfrac{\pi^3}{6(n+1)^3} \leqslant v_{n+1} - v_n \leqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

iii) En déduire la convergence de (u_n).

Sol :

1104. $a \in \mathbb{R}^{+*}$. Soit (u_n) la suite $u_0 = a$ et, pour $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$.

a) Étudier la convergence de la suite (u_n).

b) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière de terme général $u_n x^n$.

c) Démontrer le théorème de Cesàro (énoncé rappelé).

d) À l'aide la suite auxiliaire $\left(\dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}\right)$, étudier la convergence de $\sum u_n x^n$ en $\pm R$.

Sol :

1105. PYTHON. Soient $a > 0$ et $b \geqslant 0$.

Soit $(u_n)_{n \geqslant 0}$ la suite définie par $u_0 > 0$, $u_1 > 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \dfrac{u_{n+1} + a}{u_n + b}$.

a) Avec Python, tracer les premiers termes de(u_n) pour différentes valeurs de u_0, u_1, a et b.

b) On suppose dorénavant $b > 0$. Exprimer u_{n+3} en fonction de a, b, u_{n+1} et u_r.

Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$ est bornée.

c) On pose, pour $n \in \mathbb{N}, \alpha_n = \sup\{u_k, k \geqslant n\}$ et $\beta_n = \inf\{u_k, k \geqslant n\}$.

Justifier que les suites (α_n) et (β_n) sont bien définies puis qu'elles sont convergentes.

On note α_∞ et β_∞ leurs limites.

d) Montrer que $\alpha_\infty \leqslant \dfrac{\alpha_\infty + a}{\beta_\infty + b}$ et $\beta_\infty \geqslant \dfrac{\beta_\infty + a}{\alpha_\infty + b}$ puis que $\alpha_\infty = \beta_\infty$.

e) Conclure.

Sol :

1106. a) Montrer que $f : y \mapsto y^5 + y$ réalise une bijection de $\mathbb{R}^{+*}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Soient v la réciproque de f et $u : x \mapsto (v(x))^5$.

b) Montrer que $u(x) = x + o(x)$ quand $x \to +\infty$.

c) Mq il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tq $u(x) = x + \alpha x^{\frac{1}{5}} + \beta x^{-\frac{3}{5}} + o\left(x^{-\frac{3}{5}}\right)$ quand $x \to +\infty$.

En déduire un développement asymptotique de v en $+\infty$.

Sol :

1108. Soient $u, v \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}^{+*})$ et, pour $n \in \mathbb{N}, I_n = \displaystyle\int_0^1 u(t)^n v(t)\mathrm{d}t$.

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}, I_{n+1}^2 \leqslant I_n I_{n+2}$.

b) En déduire que la suite $\left(\dfrac{I_{n+1}}{I_n}\right)$ converge et que sa limite ℓ vérifie $0 < \ell \leqslant \|u\|_\infty$.

c) Soit (x_n) une suite de limite γ. Montrer que $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x_k \to \gamma$. En déduire que $I_n^{\frac{1}{n}} \to \ell$.

d) Minorer (I_n) puis montrer que $I_n^{\frac{1}{n}} \to \|u\|_\infty$.

Sol :

1109. PYTHON. Soit $f : x \to \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}$.

a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}^{+*} \backslash \{1\}$.

b) Avec Python, tracer la courbe représentative de f sur $\{0, 3]$.

Si f admet une limite finie en 1 , la comparer avec $\ln 2$.

c) Mq $x \ln 2 \leqslant f(x) \leqslant x^2 \ln 2$ pour $x \in]1, 2]$. On pourra écrire $\dfrac{1}{\ln(t)} = t \dfrac{1}{t \ln(t)}$.

d) En déduire que f admet une limite à droite en 1 . Que dire pour la limite à gauche ?

e) Soit $\tilde{f}$ le prolongement continue de f sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Avec le tracé précédemment obtenu, $\tilde{f}$ semble-t-elle dérivable en 1 ?

f) Tracer cette tangente avec Python.

Sol : Hyper classique de sup.

1110. PYTHON. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto \dfrac{(-1)^n}{n!(n+x)}$. Soit $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$.

a) Montrer que la séric $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^{+*}$.

b) Écrire une fonction somme (n, x) qui renvoie la n-ième somme partielle de cette série.

c) Calculer a 10^{-7} près la valeur de $S(1)$. Comparer cette valeur à la valeur exacte.

d) Établir une conjecture concernant la fonction $x \mapsto xS(x) - S(x+1)$.

e) Vérifier cette conjecture puis montrer que $S(n+1) = o(n!)$.

f) Etudier la continuité de la fonction S.

Sol :

1113. PYTHON. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On s'intéresse aux ss-ens de segments $[A_i A_j]$ avec $i < j$, où $A_0, \ldots, A_{n-1}$ sont les points d'affixes les racines n-ièmes de l'unité, et où les extrémités sont toutes distinctes.

Soit M_n le cardinal de ces ss-ensembles. Par exemple, $M_3 = 4$ et les quatre sous-ensembles sont $\varnothing, \{[A_0, A_1]\}, \{[A_0, A_2]\}$, et $\{[A_1, A_2]\}$. Par convention, $M_0 = 1$.

a) Calculer M_4 et M_5.

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $M_{n+1} = M_n + \sum_{k=0}^{n-1} M_k M_{n-1-k}$.

c) Calculer avec Python la liste des n premiers termes de la suite (M_k).

Vérifier expérimentalement que $M_n \leqslant 3^n$.

d) Montrer que $M : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} M_n z^n$ a un rayon de convergence $R \geqslant 1/3$.

e) Montrer que $M(z) = 1 + zM(z) + z^2 M(z)^2$, et en déduire une expression de $M(z)$.

Vérifier avec Python.

Sol :

1114. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur$]-A, A[$ tq , pour tout $n \in \mathbb{N}, f^{(n)} \geqslant 0$.

a) Montrer que f est développable en série entière.

b) Montrer que $exp \circ f$ est développable en série entière.

Sol :

1115. Soit $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n \, \mathrm{d}t$.

a) Montrer l'existence de I_n pour tout $n \geqslant 2$.

b) Étudier la convergence de la suite $(I_n)_{n \geqslant 2}$.

c) Montrer que $I_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \int_0^{\pi} \left(\frac{\sin u}{u + k\pi}\right)^n$ du. En déduire que $I_n > 0$.

Sol .

1116. Python. On pose, pour $n \geqslant 2, I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)\cdots(x+n)} \mathrm{d}x$.

a) Calculer à l'aide de Python les valeurs I_n et $I_n n! \ln(n)$ pour $n \in [\![2, 30]\!]$. Conjecture ?

b) Montrer que la suite (I_n) converge et préciser sa limite.

c) Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{(x+1)\cdots(x+n)}$

d) On admet l'existence de $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{x+k}$.

Montrer que $a_k = (-1)^{k-1}\dfrac{1}{(k-1)!}\begin{pmatrix} n-1 \\ k-1 \end{pmatrix}$ pour $k \in [\![1, n]\!]$

e) Calculer $a_1 + \cdots + a_n$.

f) Exprimer I_n comme somme.

g) Montrer que, pour $x \notin [-n, -1]$, $\dfrac{f_n'(x)}{f_n(x)} = -\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x+k}$.

En déduire que $\dfrac{-1}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}} \displaystyle\int_0^1 f_n'(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t \leqslant \dfrac{-1}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}} \displaystyle\int_0^1 f_n'(t)\mathrm{d}t$.

Sol.

1117. PYTHON. Soit E les fcts $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cies et bornées avec la norme $\|\|_\infty$.

Pour $f \in E$, on pose $\Phi(f) : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \arctan(xt)\frac{f(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que Φ est un endomorphisme de E.

b) Soit g l'image par Φ de la fonction constante égale à 1.

Avec Python, tracer g sur le segment $[0, 5]$ et émettre une conjecture sur la limite de g.

c) Calculer la limite de g en $+\infty$.

d) Étudier la dénivabilité de g et calculer sa dérivée.

e) Calculer $g(x) + g(1/x)$. On pourra utiliser Python pour intuiter le résultat.

Sol : Alerte rouge, exo tombé tous les ans (entre autre Dorian M).

Deux élèves seront désignés et je relirai avec grand soin !

1120. Considérons une fonction $F : t \mapsto (x(t), y(t))$ de classe $\mathcal{C}^1, 2\pi$-périodique, telle que sa restriction à $[0, 2\pi\ [$ est injective et telle que F' ne s'annule pas.

Notons C le support de F.

a) Montrer que $\mathcal{C}$ est inclus dans un disque centré sur l'origine et de rayon $R > 0$.

b) Montrer qu'il existe $P, Q \in C$ tels que $\|PQ\| = \sup\{\|AB\|; A, B \in C\}$.

Montrer que les tangentes à C en P et Q sont orthogonales à la droite (PQ).

Sol :

1121. Soit $D = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0, x + y + z = \frac{\pi}{2}\right\}$.

On définit $f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto \sin(x)\sin(y)\sin(z)$ et on note g la restriction de f à D.

b) En paramétrant D grâce à ses deux premières variables,

déterminer l'ensemble A des triplets de D en lesquels g atteint son maximum.

c) Soient $(a, b, c) \in A$ et $M = g(a, b, c)$. On pose $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = M\}$.

Montrer que D est inclus dans le plan tangent à V en (a, b, c).

Sol attention, je n'ai pas encore cherché...

1122. Soient $\varphi : (x, y) \mapsto (xy, x + y)$ et $V = \left\{(x, y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2, y > x > 0\right\}$.

a) Montrer que $\varphi(V) = \left\{(p, s) \in (\mathbb{R}^{+*})^2, s^2 > 4p\right\}$ et que V est un ouvert.

Justifier que φ est de classe $\mathcal{C}^1$.

On admet que φ réalise une bijection de V sur $\varphi(V)$ et que sa réciproque est de classe $\mathcal{C}^1$.

b) Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant l'équation (E) $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) - y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2 - y^2$.

Montrer que $g = f \circ \varphi^{-1}$ vérifie $\dfrac{\partial g}{\partial s}(p, s) = s$.

c) Mq une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ est solution de (E) ssi il existe une fonction

$K : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f : (x, y) \mapsto \dfrac{1}{2}(x + y)^2 + K(xy)$.

Sol

1123. PYTHON. On pourra utiliser les commandes suivantes :

import numpy as np import matplotlib.pyplot as plt

from mpltoolkits.mplot3D import Axes3D

On considère la fonction $f : (x, y) \mapsto (2x^2 + 3y^2)\, e^{-\left(x^2+y^2\right)}$ définie sur $\mathbb{R}^2$.

Pour tout $R > 0$, on pose $D_R = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant R\right\}$.

a) Représenter la surface d'équation $z = f(x, y)$ sur $[-2, 2]^2$.

b) Montrer que f admet un minimum sur $\mathbb{R}^2$ et préciser sa valeur.

c) Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$. Mq il existe $R_a > 0$ tq, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \backslash D_{R_a}$, $f(x, y) \leqslant a$.

d) Montrer que f admet un maximum sur $\mathbb{R}^2$ et en donner la valeur.

La fonction f admet-elle d'autres extrema locaux ?

e) Pour tout $c \in \mathbb{R}$, notons $\Gamma_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = c\}$.

f) Tracer les courbes Γ_c pour $c \in \{0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.75, 0.8, 0.9\}$.

g) Déterminer les valeurs de c pour lesquelles la courbe Γ_c

admet une tangente horizontale en un point en dehors de l'axe des ordonnées.

Sol exo fondamental, on en fera qu'un de cette nature.

Probabilités

1124. PYTHON. Deux amis se sont donné rendez-vous a 18 heures.

Ils arrivent en retard de X et Y minutes respectivement.

On suppose que X et Y sont des var aléa ind suivant la loi uniforme sur $\{0, \ldots, 59\}$.

a) À quoi correspond la variable $T = |X - Y|$?

b) Donner la loi de T.

c) Écrire une fonction rdv (n) qui renvoie les résultats de n simulations de T.

d) i) Calculer la valeur exacte de l'espérance de T.

ii) Donner une approximation de l'espérance avec Python, commenter l'écart.

e) On pose $n = 10^5$. Donner une fonction qui renvoie approximativement

la loi de T à l'aide de la fonction rdv. Commenter les écarts.

f) On découpe une heure en N divisions de temps.

Donner un équivalent de la proba que les amis arrivent en même temps lorsque $N \to +\infty$.

Sol :

1125. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes

suivant toutes la loi uniforme sur $\{1, \ldots, N\}$. On pose $S_n = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} (X_k)$ et $T_n = \min\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} (X_k)$.

a) Les variables S_n et T_n sont-elles indépendantes ?

b) Exprimer $\mathbf{E}(T_n)$ a l'aide d'une somme que l'on ne calculera pas.

c) En déduire sa limite quand $n \to +\infty$.

Sol :

1126. a) Soit U une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ admettant une espérance.

Montrer que $\mathbf{E}(U) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(U \geqslant n)$.

b) Soit $(X_k)_{k \geqslant 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$.

On pose, pour $k \in \mathbb{N}$;

$F_k = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \mathbf{P}(X_1 = i)$, et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$.

Exprimer $\mathbf{P}\left(M_n \leqslant k\right)$ en fonction de F_k et de n.

c) On lance trois dés équilibrés à 6 faces.

Quelle est la probabilité que le plus grand résultat soit égal à 4 ?

d) Trois joueurs jouent à pile ou face jusqu'à obtenir pile.

Soit X le nombre de lancers du dernier joueur à obtenir pile.

Calculer $\mathbf{P}(X=n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Sol :

1127. a) Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \boldsymbol{P})$ un espace probabilisé, A, B deux événements.

Rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz, simplifier la covariance de I_A et $\mathbf{I}_B$.

En deduire que $|\mathbf{P}(A \cap B)-\mathbf{P}(A) \mathbf{P}(B)| \leqslant \dfrac{1}{4}$.

b) Munissons l'ensemble $\mathcal{S}_n$ des permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$ de la probabilité uniforme.

Notons pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket, E_i$ l'événement "le point i est fixe".

c) Calculer $\mathrm{P}\left(E_i\right)$ pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $\mathrm{P}\left(E_i \cap E_j\right)$ pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

d) Exprimer la variable aléatoire F égale au nombre de points fixes à l'aide des E_i.

En déduire l'espérance et la variance de F.

Sol , je n'ai pas encore regardé.