RMSCCINP
PSI *
Année 2022

Année 3.

1346. IMT. Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx)$.

1347. CCINP. Soient E un espace vectoriel de dimension finie, p et q

deux endomorphismes de E tels que $p + q = \mathrm{id}$ et $\operatorname{rg} p + \operatorname{rg} q \leqslant \dim E$.

a) Montrer que $E = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Im} q$.

b) Montrer que p et q sont des projecteurs.

1348. CCINP. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $\Phi : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto (X - a)\,(P' - P'(a)) - 2(P - P(a))$.

a) Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

b) Montrer qu'il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $(X-a)^k$ divise $\Phi(P)$ pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$.

Trouver le plus grand entier k qui vérifie cette condition.

c) Déterminer le noyau et l'image de Φ.

1349. CCINP. $a \in \mathbb{R}$. Calculer le poly caract, et étudier la dz de $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1350. IMT. Soient $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ avec $a_2 \neq 0$ et $A_n = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

On note P_n le polynôme caractéristique de A_n.

a) Calculer P_2 et P_3.

b) Déterminer le rang de la matrice A_n ; en déduire que X^{n-2} divise P_n.

c) Déterminer a, b et c tels que $P_n = X^{n-2}\,(aX^2 + bX + c)$.

1351. IMT. Soit $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $a_{i,j}=ij$ pour $1\leqslant i,j\leqslant n$.

Déterminer les éléments propres de A.

1352. CCINP. a) Montrer que $f : M\mapsto M-M^T$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b) Déterminer le noyau de f et préciser sa dimension. Est-ce que f est bijectif ?

c) Calculer $f(M)$ pour M antisymétrique.

d) Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})=\mathcal{S}_n(\mathbb{R})\oplus\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

e) Étudier la diagonalisabilité de f.

1353. IMT. Soit $A\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Exprimer $\chi_{A^{-1}}$ a l'aide de χ_A.

1354. CCINP. Soit $u\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ non nul tel que $u^3=-u$.

a) Montrer que $\mathrm{Im}\,(u^2+\mathrm{id})\subset\mathrm{Ker}(u)$.

b) En déduire que $\mathbb{R}^3=\mathrm{Ker}\,(u^2+\mathrm{id})\oplus\mathrm{Ker}(u)$.

c) Montrer que 0 est la seule valeur propre réelle possible de u.

En déduire que $\mathrm{Ker}(u)\neq\{0\}$ et que $\mathrm{Ker}\,(u^2+\mathrm{id})\neq\{0\}$.

d) En déduire qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}$.

1355. CCINP. On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}3&-3&2\\-1&5&-2\\-1&3&0\end{pmatrix}$.

a) La matrice A est-elle diagonalisable ? Déterminer ses éléments propres.

b) Déterminer une matrice R telle que $R^2=A$.

c) Montrer que toutes les matrices R telles que $R^2=A$ sont diagonalisables.

1356. IMT : Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{tr}(A)\neq 0$.

Soit $f : X\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\mapsto\mathrm{tr}(X)A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Montrer que f est un endomorphisme. Déterminer son noyau.

b) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ? Quelle est sa trace ?

1357. CCINP. Soient $a, b \in \mathbb{R}^{+*}$ et $u : M \mapsto aM + bM^T$.

a) Montrer que u est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b) Trouver un polynôme annulateur de u de degré deux.

c) Déterminer les éléments propres de u.

d) Calculer $\det(u)$ et $\mathrm{tr}(u)$.

1358. CCINP. Soient E un espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme de E admettant n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. On pose $Z_u = \{v \in \mathcal{L}(E), u \circ v = v \circ u\}$ et, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}, E_k(u) = \mathrm{Ker}\,(u - \lambda_k \text{ id })$.

a) Montrer que Z_u est un espace vectoriel.

b) Montrer que les $E_k(u)$ sont stables par tout $v \in Z_u$.

c) Déterminer les dimensions des $E_k(u)$.

d) Soit $v \in Z_u$. Montrer que tout vecteur propre de u est également vecteur propre de v.

e) Mq il existe une base de E tq, $\forall v \in \mathcal{L}(E)$, on ait : $v \in Z_u$ ssi $\mathrm{Mat}_B(v)$ est diagonale.

f) Déterminer la dimension de Z_u.

g) Montrer que $(\text{id}, u, \ldots, u^{n-1})$ est une famille libre et en déduire une base de Z_u.

1359. CCINP. Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$.

Pour $P, Q \in E$, on pose $f(P, Q) = P(1)Q(1) + P'(1)Q'(1) + P''(1)Q''(1)$.

a) Montrer que f est un produit scalaire sur E.

b) Déterminer une base orthonormée de E.

c) Exprimer les coordonnees d'un polynôme $P \in E$ dans cette base. Que remarque-t-on ?

1360. CCINP. a) Montrer que $(A, B) \mapsto \operatorname{tr}\left(A^T B\right)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.

b) Montrer que $\mathcal{E}=\left\{\left(\begin{array}{cc} a & b \\ -b & a \end{array}\right) ;(a, b) \in \mathbb{R}^2\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

c) Donner une base orthonormée de $\mathcal{E}^{\perp}$.

d) Déterminer la distance de $\left(\begin{array}{ll} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{array}\right)$ à $\mathcal{E}^{\perp}$.

1361. IMT. Soit $E=\mathbb{R}_n[X]$. On considère $n+1$ nombres réels distincts

$a_0, \ldots, a_n$ et on pose, pour $P, Q \in E, \phi(P, Q)=\displaystyle\sum_{k=0}^n P\left(a_k\right) Q\left(a_k\right)$.

a) Montrer que ϕ définit un produit scalaire sur E.

b) On pose $F=\left\{P \in E, P\left(a_0\right)+\cdots+P\left(a_n\right)=0\right\}$. Déterminer $F^{\perp}$.

c) Soit $P \in E$. Déterminer la distance de P à F.

1362. CCINP. E un eve de dim $3, \mathcal{B}=\left(e_1, e_2, e_3\right)$ une bond,

$e=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(e_1-e_2+e_3\right)$ et D la droite portée par le vecteur e.

On considère la rotation u autour de l'axe D, d'angle $\dfrac{2 \pi}{3}$.

Déterminer la matrice de u dans B.

1363. IMT. Montrer que, pour tout matrice $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), \operatorname{tr}(A)^2 \leqslant \operatorname{rg}(A) \operatorname{tr}\left(A^2\right)$.

1364. CCINP. Soit $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $A^2=A^T$ et $A \neq I_2$.

a) Trouver un polynôme annulateur de A.

b) Mq le spectre d'une matrice est inclus dans l'ensemble des racines

d'un polynôme annulateur. En déduire le spectre de A.

c) Montrer que A est orthogonale.

d) Déterminer $\det(A)$.

e) En déduire les matrices A vérifiant les conditions de l'énoncé.

1365. CCINP. Soient $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme annulateur de A.

a) Montrer que les valeurs propres de A sont des racines de P.

b) Peut-on avoir à la fois $\mathrm{tr}(A) = 0$ et $A^2 + A^T = I_3$?

1366. IMT. a) Mq la matrice d'une proj orthogonale dans une bon est une mat symé.

b) Montrer que toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^2 = A$ et $A^T = A$

est la matrice d'une projection orthogonale dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

c) Que dire de la matrice $M = \dfrac{1}{14}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$?

1367. CCINP, Soient $(E, \langle\rangle)$, un espace cuclidien et $u \in \mathcal{S}(E)$.

a) Montrer l'équivalence : $\forall x \in E\backslash\{0\}, \langle u(x), x\rangle > 0 \Leftrightarrow \mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}^{+*}$.

Un endomorphisme symétrique vérifiant ces conditions est dit défini positif.

b) Si a et b sont deux endomorphismes symétriques définis positifs,

montrer qu'il existe un unique $c \in \mathcal{L}(E)$ tel que $b = a \circ c + c \circ a$.

c) Montrer que c est symétrique défini positif.

1368. CCINP. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A\left(A^T A\right)^2 = I_n$.

a) Montrer que A est inversible.

b) Montrer que A est symétrique.

c) En deduire que $A = I_n$.

Analyse

1369. IMT. Nature de $\sum_{n \geqslant 2} u_n$, où $u_n = \arctan\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right) - \dfrac{\pi}{4}$.

1370. CCINP. a) Montrer que $\tan(2a) = \dfrac{\tan(a)}{1-\tan^2(a)}$.

On précisera le domaine de validité de cette formule.

b) Donner le développement en série entière de arctan sur $]-1;1[$.

c) Montrer que $\dfrac{\pi}{8} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{(\sqrt{2}-1)^{2n+1}}{2n+1}$.

d) Trouver une majoration de l'erreur d'approximation de π par

$$S_N = 8\sum_{n=0}^{N}(-1)^n \frac{(\sqrt{2}-1)^{2n+1}}{2n+1}$$

1371. IMT. Trouver un équivalent de $\displaystyle\sum_{k\leqslant n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ en utilisant :

i) une comparaison série-intégrale,

ii) les sommes de Riemann.

1372. CCINP. On donne $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\ \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

a) Nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n} \int_n^{+\infty} e^{-t^2}\ \mathrm{d}t$?

b) En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n \int_0^1 e^{-n^2t^2}\ \mathrm{d}t$.

1373. IMT. Soit $f : x \mapsto x + \ln(1+x)$.

a) Mq f est un bijection de son ensemble de définition sur un intervalle à préciser.

On note g la bijection réciproque.

b) Donner $g(0)$ et $g'(0)$.

c) Montrer que g admet un développement limité à tout ordre en 0 .

d) Calculer le développement limité de g a l'ordre 3 en 0 .

1374. IMT. a) Justifier la convergence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\ \mathrm{d}x$ et de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\ \mathrm{d}x$.

b) On pose, pour $n \in \mathbb{N}, a_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ et $b_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^3}\,\mathrm{d}x$.

Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*, a_n = \dfrac{(-1)^n}{n\pi} - 2b_n$.

c) Montrer la convergence de la serie de terme général a_n.

1375. CCINP. $a > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \mapsto nx\left(x^2 + a\right)\exp\left(\dfrac{-x}{nx+1}\right)$.

a) Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur $[0,1]$.

a) Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur $[0,1]$.

b) Étudier la convergence uniforme de (f_n) sur $[0,1]$ selon la valeur de a.

c) Soit $h > 0$. Montrer la convergence uniforme de (f_n) sur $[h,1]$ pour tout a.

1376. CCINP. Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}, f_n : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \dfrac{x^n e^{-x}}{n!}$.

a) Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$.

b) La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}^+$? Ind. Stirling est rappelée.

c) Montrer que $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$.

d) Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$. Montrer que $\sum f_n$ converge normalement sur $[0,a]$.

e) Montrer qu'il n'y a pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$.

1377. CCINP. Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan(nx)}{n^2}$.

a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.

b) Donner la limite de f en $+\infty$. Ind. : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

c) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.

d) Calculer la limite de f' en 0 .

e) Donner l'allure du graphe de f.

1378. CCINP. Considérons la suite de fonctions (f_n) définie par $f_n : x \mapsto xe^{-\sqrt{n|x|}}$.

a). Déterminer le domaine de convergence simple de la suite (f_n).

b) Calculer $\|f_n\|_\infty$. Qu'en déduire ?

c) Déterminer le domaine D de convergence simple de la série de terme général f_n.

A-t-on convergence normale sur D ?

d) Soit $a > 0$. Étudier la conv unif de la série de terme général f_n sur $D \backslash [-a, a]$.

1379. IMT. Déterminer le rayon de convergence et la somme de $\sum \frac{x^n}{2n+1}$.

1380. CCINP. a) Soit $x \in [0, 1[$.

Trouver a, b et $c \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $t \in [0, 1]$, $\frac{1}{(1+t^2)(1+tx)} = \frac{at+b}{1+t^2} + \frac{c}{1+tx}$.

b) Déterminer le rayon de convergence de la série entière de coefficient $u_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\, \mathrm{d}t$.

c) Calculer la somme $S(x)$ de cette série entière pour $x \in]-R, R[$.

d) Étudier la limite de S en $-R$.

1381. CCINP. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \in]\,0, 1] \mapsto \frac{1-e^{-nx}}{x^a(1+x^n)}$ et $I_n = \int_0^1 f_n(t)dt$.

a) Étudier la convergence simple de (f_n). On notera f la fonction limite.

b) Existe-t-il des valeurs de a pour lesquelles (f_n) converge uniformément ?

c) Soit $a \in [0, 1]$, montrer la convergence de l'intégrale I_n.

d) Soit $a \in [0, 1\,[$, déterminer la limite de (I_n).

e) Qu'en est-il pour $a = 1$?

1382. CCINP :On pose ; pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{nt}}{(1+e^t)^{n+2}}\, \mathrm{d}t$.

a) Montrer què I_n est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Montrer que, pour tout $n \geqslant 2, I_n = \dfrac{1}{n2^n} + \dfrac{n-1}{n} I_{n-1}$.

c) Posons $J_n = nI_n$. Donner une relation de récurrence vérifíe par $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

d) Calculer J_1 puis etablir pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $J_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$.

e) Montrer que $I_n = \dfrac{1}{n}\left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right)$ et en déduire la limite de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

1383. CCINP. On pose pour $n \in \mathbb{N}$: $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/4} (\tan x)^n \, \mathrm{d}x$.

a) Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.

b) Calculer $I_n + I_{n+2}$.

c) En deduire $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$. Ind. Faire apparaître un télescopage.

d) Prouver la convergence de $\sum (-1)^n I_n$ et calculer sa somme.

1384. CCINP. Soient, pour $n \in \mathbb{N}^*, f_n : x \mapsto \dfrac{1}{(\operatorname{ch} x)^n}$ et $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t$.

a) Justifier que chaque fonction f_n est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

b) Déterminer la limite de la suite (I_n).

c) Nature des séries $\sum I_n$ et $\sum (-1)^n I_n$? Ind. Majorer ch x par e^x.

d) Calculer le rayon de convergence de la série entière de coefficient I_n.

1385. CCINP. On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{te^{-tx}}{e^t - 1} \, \mathrm{d}t$.

a) Donner l'ensemble de définition de f.

b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

c) Calculer $f(x-1) - f(x)$ pour $x \geqslant 1$.

d) Exprimer f sous forme d'une somme d'une série de fonctions.

e) Retrouver ce résultat d'une autre manière.

1386. CCINP. Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt)\mathrm{d}t$.

a) Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

b) Mq f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et qu'elle vérifie une équa diff du premier ordre.

c) On donne : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$. Exprimer f a l'aide de fonctions usuelles.

1387. CCINP. Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(tx)}{t\,(1+t^2)}\mathrm{d}t$.

a) Déterminer le domaine de définition de f ; montrer que f est impaire.

b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.

c) Calculer f.

1388. CCINP. Soit $f : t \mapsto e^t \ln(t)$.

a) Montrer que f est intégrable sur $]0,1]$.

b) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n.n!}$.

1389. CCINP. Soit $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x-1}$.

a) Montrer que f est prolongeable par continuité en 1.

b) Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ est convergente.

c) Montrer que f est dse et calculer le rayon de convergence de cette série.

d) Calculer I.

1390. IMT. Justifier l'existence de $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$ et de $I = \displaystyle\int_0^1 x^x\,\mathrm{d}x$.

Montrer que $I = S$.

Probabilités

1391. IMT. On lance une pièce donnant pile avec probabilité $\dfrac{2}{3}$.

On note X le nombre de lancers nécessaires pour obtenir deux piles consécutifs.

On pose $a_n = \mathbf{P}(X = n)$.

a) Calculer a_1 et a_2.

b) À l'aide de la formule des probabilités totales, montrer : $a_n = \dfrac{1}{3}a_{n-1} + \dfrac{2}{9}a_{n-2}$.

c) Montrer que le jeu se termine presque sûrement.

d) L'espérance de X est-elle finie ? Si oui, la calculer.

1392. CCINP. On effectue n lancers d'un dé equilibré ordinaire. On note, pour $k \in [\![1, n]\!]$, X_k le résultat du k-ième lancer, M_n et m_n les variables aléatoires égales au maximum et minimum des résultats des n lancers. Soit F la fonction de répartition des X_k.

a) Donner la loi des X_k.

b) Exprimer la fonction de répartition F_n de M_n en fonction de F.

c) Étudier la convergence (simple et uniforme) de la suite de fonctions (F_n).

d) Exprimer la fonction de répartition G_n de m_n en fonction de F.