Attention aux erreurs de frappes...

Autres Ecoles - PSI

Algèbre

1185. IMT. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $z = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$.

a) Donner le module et un argument de $z^k - 1$.

b) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \left| z^k - 1 \right| = 2 \operatorname{cotan}\left(\frac{\pi}{2n}\right)$.

1186 . T P E . On se donne trois réels distincts a_1, a_2, a_3.

Soit φ l'application de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $\varphi(P) = (P(a_1), P(a_2), P(a_3))$.

a) Montrer que φ est un isomorphisme.

b) On note $(e_k)_1^3$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $L_k = \varphi^{-1}(e_k)$.

Montrer que $(L_k)_1^3$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Expliciter les L_{k}.

1187. CCINP. a) Rappeler la formule du déterminant de Vandermonde.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On souhaite montrer que la famille $((X+k)^n)_0^n$ est libre.

Soient $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ tels que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k (X+k)^n = 0$.

b) Montrer que pour tout $p \in [\![0, n]\!]$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k (X+k)^p = 0$.

c) Montrer que pour tout $p \in [\![0, n]\!]$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \alpha_k k^p = 0$. Conclure .

1188. CCINP. Soient E un e-v de dimension finie et p, q deux endomorphismes de E.

On suppose que $p+q = \text{id}$ et $rg(p)+rg(q) \leqslant \dim E$. Montrer que p et q sont des projecteurs.

1189. IMT Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$.

Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g \circ f = f$.

a) Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont des projecteurs.

b) Que peut-on dire des rangs de $f, f \circ g$ et $g \circ f$?

c) Montrer que $f \circ g$ est un projecteur sur $\operatorname{Im}(f)$ parallèlement à un sev contenant $\operatorname{Ker}(g)$.

d) On suppose désormais que l'on a en outre $g \circ f \circ g = g$.

Que peut-on dire des rangs de f et g ?

e) Montrer que $E = \operatorname{Im}(f) \oplus \operatorname{Ker}(g)$.

1190. ENSEA. Soieat E un espace vectoriel et $(f_1, f_2, \ldots, f_n) \in \mathcal{L}(E)^n$.

On suppose que $f_1 + f_2 + \cdots + f_n = \mathrm{id}$ et que $f_i \circ f_j = 0$ pour tous i et j distincts.

a) Montrer que les f_i sont des projecteurs.

b) Montrer que $E = \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant n} \operatorname{Im} f_i$.

1191. ENSEA. Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associée à M.

b) Montrer qu'il existe $A \in M_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbf{R})$ telles que $M = AB$.

c) Montrer que $BA = I_2$.

1192. Navale Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les $A \in M_n(R)$ égales à leur comatrice.

1193. CCINP Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et, pour $1 \leqslant i, j \leqslant n, E_{i,j}$ la matrice de $M_n(\mathbb{R})$

dont tous les coefficients sont nuls sauf celui en position (i, j) qui vaut 1 .

a) Si $1 \leqslant i, j, k, \ell \leqslant n$, calculer $E_{i,j} E_{k,\ell}$.

b) Soit f une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour tout couple (A, B) de $M_n(\mathbb{R})^2$,

on ait $f(AB) = f(BA)$. Montrer que f est colinéaire à la trace.

c) Soit g un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ tel que $g\left(I_n\right) = I_n$ et, pour tout couple (A, B)

de $M_n(\mathbb{R})^2$, $g(AB)=g(BA)$. Montrer que g conserve la trace.

1194. TPE Soient E un espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E.

a) Montrer que pour tout entier $k \in \mathbb{N}, \operatorname{Im}\left(f^{k+1}\right) \subset \operatorname{Im}\left(f^k\right)$.

b) Montrer que s'il existe un entier p tel que $\operatorname{Im}\left(f^p\right)=\operatorname{Im}\left(f^{p+1}\right)$,

alors pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Im}\left(f^p\right)=\operatorname{Im}\left(f^{p+k}\right)$.

c) En déduire que $\operatorname{Im}\left(f^n\right)=\operatorname{Im}\left(f^{n+1}\right)$.

1195. IMT. Soient u, v, w trois suites vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$u_{n+1}=4u_n-3v_n-3w_n$, $v_{n+1}=3u_n-2v_n-3w_n$, $w_{n+1}=3u_n-3v_n-2w_n$.

Exprimer u_n, v_n, w_n en fonction de n, v_0, u_0, w_0

1196. IMT. Déterminer les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathrm{R})$ telles que $M^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1197. St Cyr Montrer que la matrice $A=\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a+b & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$ est diagonalisable

et trouver ses élements propres.

1198. IMT. On rappelle que si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(K)$ dont les colonnes sont notées

$C_1, \ldots, C_n$, alors pour tout $X=(x_1, \ldots, x_n)^T \in K^n, AX=\displaystyle\sum_{j=1}^n x_j C_j$.

a) Déterminer le rang de la matrice $Z=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Calculer C_1+C_5. En déduire un élément propre de Z.

c) Calculer $C_1+C_5-C_3$. En déduire un élément propre de Z.

d) Achever la réduction de Z.

1199. CCINP. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Soit g un endomorphisme de R^3 tel que $g \circ g = f$.

a) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f.

L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

b) On note e_1 et e_3 des vecteurs propres de f associés aux valeurs propres 1 et 3 .

Montrer que $g(e_1)$ et $g(e_3)$ sont aussi des vecteurs propres de f associés à 1 et 3 resp.

c) En déduire que e_1 et e_3 sont des vecteurs propres de g.

d) L'endomorphisme g est-il diagonalisable ?

e) Déterminer l'ensemble des valeurs possibles pour le spectre de g.

1200. T P E . Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{pmatrix}$ où $a, b, c \in \mathbb{R}^3$

a) Déterminer un polynôme annulateur de degré 3 de M.

b) La matrice M est-elle inversible ?

c) Est-elle diagonalisable ?

d) Montrer que les valeurs propres de M^2 sont négatives ou nulles.

1201. CCINP. Soient E un espace vectoriel de dimension n, ℓ une forme linéaire non nulle

sur E et a un vecteur de E non nul.

On pose $f : x \in E \mapsto \ell(a)x - \ell(x)a$.

a) Montrer que f est un endomorphisme de E.

b) Calculer $f(a)$.

c) Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$.

d) Calculer $f(\mathrm{Ker}(\ell))$.

e) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

f) On suppose $\ell(a) = 0$. Calculer f^2 ; en déduire un polynôme annulateur de f.

Retrouver le résultat de la question e)).

1202. CCINP. Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $u^3 = id$ et $u \neq id$.

a) Montrer que 1 est valeur propre de u.

b) Montrer que $\operatorname{Ker}(u - \mathrm{id}) \oplus \operatorname{Ker}\left(u^2 + u + Id\right) = \mathbb{R}^3$.

c) Montrer qu'il existe une base dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1203 . IMT Soient $E = \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $e_1 = cos$, $e_2 = sin$, $F = Vect(e_1, e_2)$. Pour tout $f \in E$,

On pose : $T_f : t \mapsto (10f(0) - 6f'(0)) \cos(t) + (12f(0) - 7f'(0)) \sin(t)$.

On pose enfin $u : f \mapsto T_f$.

a) Montrer que e_1 et e_2 sont linéairement indépendants.

b) Montrer que w est un endomorphisme de E. Est-il injectif ?

c) Montrer que $v = u \mid F$ est un endomorphisme de F.

d). Donner les valeurs propres de v.

1204. Navale. Soient K un corps, f un endomorphisme de rang r d'un K.espace vectoriel de dimension finie E. Montrer que le polynôme minimal de f est de degré majoré par $r+1$.

1205. Navale. Soient $n \in \mathbb{N}^*, M \in \mathcal{M}_n(C)$.

Montrer que I est la seule valeur propre de M ssi, pour tout $k \in \mathbb{N}^*, \operatorname{tr}\left(M^k\right) = n$.

1206. CCINP. Soit $X \in M_{n,1}(\mathbf{R})$ non nul et $A = XX^T$.

a) Déterminer le rang et le spectre de A.

b) Calculer le polynôme caractéristique de A.

c) Montrer l'égalite $\det\left(I_n + A\right) = 1 + X^T X$.

1207. CCINP. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ et $A = \left(\alpha^{i+j-2}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in M_n(\mathrm{C})$.

a) Si $\alpha \in \mathbb{R}$ montrer que A est diagonalisable.

b) Calculer le rang de A. Ea déduire ses valeurs propres.

c) A quelle condition sur α la matrice A est-elle diagonalisable ?

1208. CCINP, a) Soit $M \in \mathcal{M}_n(C)$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ses valeurs propres.

Montrer que $\operatorname{tr}\left(M^2\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2$.

b) Pour $n \geqslant 3$, on considère la matrice $A \in \mathcal{M}_4(\mathbf{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf ceux situés sur les quatre bords, égaux à 1.

Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de A.

1209. CCINP. Soit $E = C^0([0,1])$. Pour $f \in E$, on définit

$\varphi(f) : [0,1] \to \mathbb{R}$ par : $\varphi(f)(0) = f(0)$ et $\varphi(f)(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t) \mathrm{d}t \mathrm{si} x \neq 0.$

a) Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.

b) Montrer que 0 n'est pas une valeur propre de φ.

c) Montrer que 1 est une valeur propre de φ et trouver l'espace propre associé.

d) Trouver les autres valeurs propres.

1210. CCINP. Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $3u^3 = u^2 + u + \mathrm{id}$.

a) Montrer que u est bijectif.

b) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}, u^k$ est combinaison linéaire de u^2, u et id.

c) Est-il possible que u soit diagonalisable ? non diagonalisable ?

d) Qu'en est-il sur un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel ?

1211. CCINP. Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^*$ qui vérifie $u^3 + u^2 + u = 0$.

a) Déterminer $\operatorname{Ker}(u) \cap \operatorname{Ker}\left(u^2 + u + Id_{\mathbb{R}^n}\right)$.

b) Montrer que $\operatorname{Im}(u) = \operatorname{Ker}\left(u^2 + u + Id_{\mathbb{R}^n}\right)$ puis montrer que $\mathbb{R}^n = \operatorname{Ker}(u) \oplus \operatorname{Im}(u)$.

c) Soit v l'endomorphisme de $\operatorname{Im}(u)$ induit par u.

Que représente le degré du polynôme caractéristique de v par rapport à u ?

d) Montrer que 0 n'est pas valeur propre de v, puis en déduire que le rang de u est pair.

1212. CCINP. Pour $A \in \mathcal{M}_{\mathrm{n}}(\mathrm{K})$, on note $f_A : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto AM$.

a) Montrer que f_A est an endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

b) Montrer que si $A^2 = A$ alors f_A est un projecteur.

c) Montrer que A est diagonalisable si et seulement si f_A l'est.

d) Construire une matrice propre de f_A à l'aide d'un vecteur propre de A.

e) Construire un vecteur propre de A a l'aide d'une matrice propre de f_A.

f) En déduire que $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(f_A)$.

1213. Navale a) Diagonaliser la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Soil $A \in M_n(C), B = \begin{pmatrix} A & 4A \\ A & A \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -A & 0 \\ 0 & 3A \end{pmatrix}$.

Montrer que B et C sont semblables.

1214 . CCINP. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$.

a) Exprimer le rang de B en fonction du rang de A.

b) Trouver une relation entre χ_B et χ_A.

En déduire le spectre de B en fonction du spectre de A.

c) Déterminer les dimensions des espaces propres de B en fonction de celles

des espaces propres de A.

d) Montrer qxe B est disgonalisable si et seulement si A est diagonalisable et inversible.

1215. *TPE*. On note $E = \mathbb{C}_n[X]$.

Soient F et G deux polynômes n'ayant pas de racine commune.

On suppose que G est de degre $n+1$ et scindé à racines simples ;

on note $a_0, \ldots, a_n$ ses racines.

On note φ l'application qui a $P \in B$ associe le reste de la division euclidienne de F par G.

a) Montrer que φ est un autormorphisme de E.

b) Pour $i \in [0, n]$, en nole $L_i(X) = \prod_{j \neq 1} \left(\frac{X - a_j}{a_i - a_j} \right)$.

Montrer que $(L_0, \ldots, L_n)$ est une base de E.

c) L'endomorphisme φ est-il diagonatisable ?

1216. IMT. Soient B un espace vectoriel muni d'une base $(e_1, \ldots, e_n)$ et v un vecteur de E.

Soit f l'endomorphisme de E tel que $f(e_1) = \cdots - f(e_n) = v$

a) Quel est le rang de f ?

b) Discuter de la diagonalisabilité de f en fonction du vecteur v.

1217, CCINP. Soir w un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie.

On suppose que 0 est racine simple đu polynôme annulateur de u.

a) Montrer que $\operatorname{Ker}(u) = \operatorname{Ker}\left(u^2\right)$.

b) Montrer que si u est nilpotent alors u est nul.

1218. CCP. Soit $u \in \mathcal{C}\left(\mathbb{C}^n\right)$.

a) Montrer que si u est diagonalisable alors u^2 aussi.

b) Montrer que la réciproque est fausse.

c) Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Montrer que $\operatorname{Ker}\left(u^2 - \lambda^2 \text{ id }\right) = \operatorname{Ker}(u - \lambda \text{ id }) \oplus \operatorname{Ker}(u + \lambda \text{ id})$.

d) Montrer que si u est bijectif alors la réciproque du résultat de la question a) est vraie.

1219. CCINP. a) Montrer que si deux matrices U et $V \in M_n(C)$ sont semblables alors

pour tout polynôme $R, R(U)$ est semblable à $R(V)$.

Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(C)$ deux matrices telles que $AB = BA$. On pose $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A \end{pmatrix}$.

b) Pour $P \in C[X]$, exprimer $P(M)$ en fonetion de $P(A), P'(A)$ et B.

c) Montrer que si A est diagonalisable et B est nulle alors M est diagonalisable.

d) Démontrer la réciproque.

1220 . IMT On munit $\mathbb{R}^4$ de sa structure canonique. Déterminer la matrice dans la base canonique de la symétrie orthogonale par rapport au plan P défini par les équations

$$\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x-y+z-t=0 \end{cases}$$

1221. CCINP. a) Calculer, pour $n \in \mathbb{N}, I_n = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} t^n dt$

(distinguer les cas n pair et n impair ; on donne $I_0 = 1$).

b) Montrer que l'application $(P,Q) \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} P(t)Q(t)\mathrm{d}t$ est un ps sur $\mathbb{R}[X]$.

c) Calculer la distance de X^3 à $\mathbb{R}_2[X]$.

1222.CCINP. Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1])$. On pose, pour $f, g \in E$, $< f, g >= \displaystyle\int_0^1 t^2 f(t)g(t)dt.$

a) Montrer que $<,>$ est un produit scalaire.

b) Calculer $\displaystyle\int_0^1 t^n \ln t$ dt pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) Soit $F = \{x \mapsto ax+b \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ et $u \in E$ telle que $u(x) = x \ln x$ pour tout $x \in]0,1]$.

Déterminer le projeté orthogonal de u sur P.

d) Déterminer $\displaystyle\inf_{a,b \in \mathbf{R}} \int_0^1 (at+b-t\ln t)^2 t^2 dt.$

1223, CCINP. Soit $E = C^2([0,1], \mathbf{R})$. Pour $f, g \in E$, on pose $< f, g >= \displaystyle\int_0^1 \left(fg + f'g'\right).$

On considère les sous-ensembles $V = \{f \in E, f'' = f\}, G = \{f \in E, f(0) = f(1) = 0\}$

et $H = \{f \in E, f(0) = ch(1), f(1) = 1\}$.

a) Montrer que la famille (ch, sh) est une base de V.

b) Soient $f \in V$ et $g \in E$. Montrer que $< f, g >= f'(1)g(1) - f'(0)g(0)$.

Calculer $< ch, sh >$, $\|$ ch $\|^2 et$ $\|sh\|^2$.

c) Soient $f \in V$ et $g \in G$. Montrer que $< f, g >= 0$.

d) Soit $f \in H$. Calculer $< f, ch >$ et $< f, sh >$. En déduire le projeté orthogonal de f sur V.

e) Calculer $\inf_{f\in H} \int_0^1 \left(f(t)^2 + f'(t)^2\right)\, \mathrm{dt}$.

1224. CCINP. Soient $(E, <,>)$ un espace euclidien et $(e_1, \dots, e_n)$ une bon de E.

Soit $(u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs de E.

a) Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des nombres réels. Montrer que $\left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i \right\|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 . \sum_{i=1}^{n} \|u_i\|^2$.

b) En déduire que si $\sum_{i=1}^{n} \|w_i\|^2 < 1$ alors la famille $(e_i + u_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est une base de E.

1225. TPE A quelle condition sur les réels p et q la matrice

$A = \begin{pmatrix} p & 0 & q \\ q & 0 & -p \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle orthogonale ? Déterminer les élements propres de A.

1226. CCINP Soit $M \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $(I_n + 2M)/3 \in O_n(\mathbb{R})$.

a) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}^n$, $< Mx, x >= \|x\|^2$.

b) Que peut-on en déduire sur M ?

1227 . CCINP. on dit qu'une matrice carrée réelle est à diagonale propre si ses coefficients diagonaux sont exactement ses valeurs propres répétées avec leur multiplicité.

a) Donner des exemples de telles marices.

b) La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle à diagonale propre ?

c) Soit A une matrice antisymétrique à diagonale propre.

i) Que peut-on dire de ses valeurs propres ?

ii) Montrer qu'il existe $p \geqslant 2$ tel que $A^p = 0$.

iii) Calculer $\left(A^T A\right)^p$.

iv) En remarquant que $A^T A$ est symétrique, montrer que $A = 0$.

d) Donner la dimension de l'espace $A_n(\mathbb{R})$ des matrice antisymétriques.

e) On note E_n l'ensemble des matrices à diagonale propre.

Montrer que si F est un sous-espace vectoriel inclus dans E_n slors $\dim(F) \leqslant \dfrac{n(n+1)}{2}$.

f) Quelle est la dimension maximale d' un sous-espace inclus dans E_n ?

Analyse 1228. Navale. Soit (u_n) une suite complexe telle que

$u_{n+1} = (u_n + |u_n|)/2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Montrer que cette suite converge et déterminer sa limite en fonction de u_0.

1229. TPE. Pour $n \geqslant 2$, on nole $f_n : x \mapsto nx^3 + n^2x - 2$.

a) Montrer qu'il existe un unicque réel $u_n \in [0,1]$ tel que $f_n(x_n) = 0$.

b) Montrer que la suite (u_n) décroit et qu'elle converge. Déterminer sa limite.

c) Déterminer un équivalent de u_n.

1230.MT. On définit, pour $n \in \mathbb{N}^*, d_n = \dfrac{1! + 2! + \cdots + n!}{n!}$

a) Déterminer une relation enire d_{n+1} et d_n.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*; d_n \leqslant 2$.

c) Montrer que (d_n) est convergente. Déterminer sa limite.

1231. ENSEA. Etudier la nature de la série $\sum \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$ selon les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$.

1232. IMT. Nature de la série $\sum (-1)^n \sin\left(\frac{1}{(-1)^n + \sqrt{n}}\right)$?

1233. TPE. a) Pour $n \Rightarrow 1$, montrer que l' équation $x^n + nx = 1$

possède une unique solution positive, que l'on note u_n.

b) La suite (u_n) converge-t-elle ?

c) Déterminer un équivalent simple de u_n.

d) Déterminer la nature de la série $\sum$ n ! $\left(\dfrac{1}{n} - u_n\right)$.

1234. IMT. a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $g_n(t) = \ln(t) - \arctan(t) - n\pi$.

Montrer qu'il existe un unique réel $x_n > 0$ tel que $g_n(x_n) = 0$.

b) Montrer que la série $\sum \frac{1}{x_n}$ converge.

1235. IMT . Soit (a_n) une suite de réels vérifiant $a_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = 1 - e^{-a_n}$.

a) Étudier la convergence de la suite (a_n).

b) Déterminer la nature de la série $\sum (-1)^n a_n$.

c) Déterminer la nature de la série $\sum a_n^2$.

1236 . CCINP. Soit (a_n) une suite positive. Soit (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}^+$ et, pour $n \in \mathbb{N}$.

$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \sqrt{u_n^2 + a_n^2}\right)$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \leqslant a_n/2$.

b) Montrer que si $\sum a_n$ converge alors (u_n) converge.

c) Montrer que la réciproque est fausse. Ind. Considérer $u_n = \frac{n}{n+1}$.

1237, CCINP. Soit $(a_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de réels positifs. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{a_n}{(1+a_1)...(1+a_n)}$.

a) Calculer $u_1 + u_2$. Généraliser.

b) Montrer que la série $\sum u_n$ converge.

c) Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ pour $a_n = 1/\sqrt{n}$.

1238. CCINP, a) Pour $p \in N$, justifer l'existence de $S_p = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^p}{2^n}$.

b) Développer $(n+1)^p$ et en déduire S_p en fonction de $S_0, \ldots, S_{p-1}$.

e) Montrer que, pour tour $p \in \mathbb{N}, S_p \in \mathbb{N}$.

1239. *TPE*. Soit $P \in \mathbb{R}(X]$. On définit $K = \{x \in \mathbb{R} \mid P(x) = \cos x\}$.

a) Montrer que si $\deg(P) \geqslant 1$, alors K est borné.

b) Montrer que si une fonction f défnie et dérivable sur un intervalle I s'annule

un nombre infini de fois, alors sa derivée aussi.

c) Montrer que si K est infini, alors P est constant.

1240. IMT. Justifier l'existence de l'intégrale $I=\int_0^{+\infty} \ln \left(\frac{1+t^2}{t^2}\right) dt$ et la calculer.

1241. ENSEA. On pose $F(x)=\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2}$ dt.

a) Donner le domaine de définition de F et calculer sa dérivée.

b) Montrer que l'on a au voisinage de $+\infty, F(x)=\frac{\cos(x)}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

c) Montrer que $g: t \mapsto \frac{\sin(t)-t}{t^2}$ est prolongeable par continuité sur $[0,1]$.

d) Déterminer un équivalent simple de F en 0 .

e) Montrer que F est intégrable sar $\mathbb{R}^{+*}$ et calculer $\int_0^{+\infty} F$.

1242. CCINP. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $f_{\mathrm{n}}: \mathrm{x} \in[-1,1] \mapsto \sin \left(n x . e^{-n x^2}\right)$.

a) Montrer que (f_n) converge simplement sur $[-1,1]$ vers une fonction f.

b) Montrer qu'il y a convergence uniforme sur $[a, 1]$ si $a>0$.

c) Y a-t-il convergence uniforme sur $[-1,1]$?

1243. CCINP a) Montrer que pour tout $t \in\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ on a $|\ln(1+t)-t| \leqslant 2t^2$.

b) Étudier la convergence simple et uniforme sur $\mathbb{R}$ de la série $\sum \text{in}\left(1+\frac{(-1)^n x}{n\left(1+x^2\right)}\right)$.

1244. IMT. Soit (a_n) $n \geqslant 1$ une suie décroissante d'éléments de $\mathbb{R}^{+}$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in[0,1]$, soit $f_n(x)=a_n x^n(1-x)$.

a) Montrer que $\sum f_n$ converge simplement sur $[0,1]$.

b) Montrer que $\sum f_n$ converge normalement sur $[0,1]$ si et seulement si $\sum \frac{a_n}{n}$ converge.

c) Montrer que $\sum f_n$ converge uniformément sur $[0,1]$ ssi $(a_n)_{n \geqslant 1}$ converge vers 0 .

1245. *TPE*. Soit $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!(n+x)}$.

a) Etudier la convergence de la série sur $]0,+\infty[$.

b) Calculer $f(1)$.

c) La fonction f est-elle de classe C^1 ?

d) Exprimer $f(x+1)$ en fonction de $f(x)$.

1246. IMT. Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n^2+1}$.

a) Déterminer le domaine de définition de f.

b) Étudier la continuité de f.

c) Montrer que f est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$.

d) Déterminer la limite ℓ de f en $+\infty$ puis un équivalent de $f(x)-\ell$.

e) Étudier les variations de f.

1247. CCINP. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathrm{N}^*$ on pose $u_n(x) = (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n}$.

b) Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}^+$.

c) Montrer que S est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{*+}$.

d) Calculer S .

1248. CCINP. Pour $x > 0$ et $n \geqslant 2$ on pose $u_n(x) = \frac{\ln(x)}{x^n \ln(n)}$.

a) Déterminer le domaine D de convergence de $\sum u_n$.

b) Montrer que la série $\sum u_n$ ne converge pas normalement sur D.

c) Montrer que, pour $x > 0$ et $n \geqslant 2$, le reste d'ordre n de la série vérifie $|R_n(x)| \leqslant \frac{1}{\ln(n+1)}$.

d) Étudier la continuité de $S = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} u_n$ sur D.

e) Montrer que S est intégrable sur D.

1249. *IMT* a) Donner un équivalent simple de $H_\mathrm{n} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$.

b) Donner le rayon de convergence de $\sum H_n x^n$ puis calculer la somme de cette série entière.

1250. CCINP. a) Montrer que pour tout $n \in \mathrm{N}^*$, $f_n : x \mapsto (chx)^{-n}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

b) Limite de $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n$ quand $n \to +\infty$.

c) Nature des séries $\sum (-1)^n I_n$ et $\sum I_n$. ind : Montrer que $ch(x) \geqslant sh(x)$ sur $\mathbb{R}^+$.

d) Rayon de convergence de la série entière $\sum I_n x^n$.

1251. *IMT*. a) Donner les développements en série entière en 0 des fonctions *cos* et *sh*.

b) Donner le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{x^n}{(2n)!}$.

c) Expliciter la somme $S(x)$ de h série précédente selon le signe de x.

1252. CCINP. Soit (a_n) la suite définie par $a_0 = 1, a_1 = 3$

et, pour $n \geqslant 2, a_n = 3a_{n-2} - 2a_{n-1}$.

a) Exprimer a_n en fonction de n.

b) On propose maintenant une autre méthode.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leqslant 4^n$.

En déduire une inégalité sur le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$.

c) Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{1+5x}{1+2x-3x^2}$. Calculer le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$.

d) En déduire a_n.

1253. CCINP. On considère la série entière $\sum \frac{n!}{1\times 3\times\cdots\times(2n+1)} x^{2n+1}$.

a) Déterminer son rayon de convergence R.

b) Pour $x \in]-R, R[$, on note $f(x)$ la somme de cette série entière.

Trouver une équation differentielle d'ordre 1 à coefficients variables vérifiée par f.

En déduire f.

1254. *IMT*. Soit t une suite vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k u_{n-k}$.

a) La suite u est-elle bien définie ? unique ?

b) On suppose que $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ est de rayon strictement positif.

Trouver une relation entre f^2 et f et en déduire f à l'aide de fonctions usuelles.

c) Développer f en série entière et conclure.

1255. IMT. Soit $f_n : x \mapsto \left(x^2+1\right) \frac{n\exp(x)+x\exp(-x)}{n+x}$.

a) Montrer que (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$ vers une fonction f à déterminer.

b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 f_n$.

1256. Navale. On pose, pour $n \geqslant 2, I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1+t^n}{\sqrt{t}+t^{2n}}\,\mathrm{d}t$.

Montrer que la suite (I_n) est bien définie et calculer sa limite.

1257, CCINP. On pose, pour tout $\in \mathbb{N}, I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^n}$ et $J_\mathrm{n} = \displaystyle\int_0^1 \ln\left(1+t^n\right)\mathrm{d}t$.

a) Donner une relation entre I_n et J_n , on pourra calculer $n(1-I_n))$.

b) En déduire un développement asymptotique de I_n avec une précision de $\dfrac{1}{n}$.

c) Montrer que l'application $F : u \in [0,1] \mapsto \displaystyle\int_0^u \frac{\ln(1+t)}{t}dt$ est bien définie,

puis montrer que $\displaystyle\int_0^1 F\left(t^n\right)dt \to 0$ quand $n \to +\infty$.

d) En déduire un développement asymptotique de J_n avec une précision de $\dfrac{1}{n}$,

puis un développement de I_n en $\frac{1}{n^2}$.

1258. ENSEA. Soit $\Phi : x \mapsto \displaystyle\int_0^\pi cos(x.sin(t))dt$.

Montrer que Φ admet un unique zéro $z \in [0,\pi]$, et que $z > \pi/2$.

1259. *IMT*. Soit $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t}dt$.

a) Montrer que pour tout $x > 0$, l'intégrale $F(x)$ est convergente.

b) Etudier les variarions de la fonction F.

c) Montrer que F est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$.

d) Montrer que, pour tout $x > 0, F(x) \geqslant \dfrac{1}{e}\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{dt}{1+t}$. En déduire la limite de F en 0 .

1260. ENSEA. a) Déterminer le domaine de définition de $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\frac{sh(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

b) Calculer f'.

c) Déterminer la limite de f en $+\infty$. En déduire f.

1261. CCINP. Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{te^{-tx}}{e^t - 1}\,\mathrm{dt}$.

a) Donner le domaine de définition de f.

b) Calculer la limite de f en $+\infty$.

c) On suppose $x > 0$, calculer $f(x-1) - f(x)$.

d) Déterminer une expression de $f(x)$ sous la forme d'une somme de série.

e) Quelle autre méthode aurait-on pu utiliser pour trouver cette expression de $f(x)$?

1262. CCINP. Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2} e^{-xt}\mathrm{dt}$.

a) Montrer que $f(x)$ existe pour $x \geqslant 0$.

b) Montrer que f est contime sur $\mathbb{R}^+$.

c) Montrer que f est đe classe C^2 sur $]0, +\infty[$.

d) Déterminer les limites de f et f' en $+\infty$.

e) Calculer $f'(x)$ et $f(x)$.

f) Justifier l'existence et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{dt}$.

1263. CCINP. On considère la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\,\mathrm{dt}$.

a) Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.

b) On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*, u_n = \displaystyle\int_{n-1}^{n} \ln f(t)\,\mathrm{dt}$. Déterminer la nature de $\sum (-1)^n/\mathrm{u}_n$.

1264.CCINP a) Existence de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x - 1}\,\mathrm{d}x$.

b) Montrer que $I = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^3}$.

1265. IMT. a) Justifier I'existence de $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)\ln(1-x)}{x} dx$.

b) Pour $x \in]0, 1[$, écrire $\dfrac{\ln(x)\ln(1-x)}{x}$ sous forme d'une somme $\sum u_n(x)$.

c) Calculer I.

1266. CCINP. On pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan t)^n \text{ dt}$.

a) Calculer $\lim I_n$.

b) Calculer $I_n + I_{n+2}$ (on fera le changement de variable $u = \tan t$).

c) Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

d) Montrer que la série de terme général $(-1)^n I_n$ converge et calculer sa somme.

1267. TPE. Soit (1) l'équation différentielle $xy' - 2|y| = x$.

On suppose qu'il existe une solution f de (1) définie sur $\mathbb{R}$.

a) Montrer que $f(0) = 0$.

b) Montrer que f est strictement positive sur $]0, +\infty[$.

c) En déduire la forme générale de f.

d) Conclure qu'il n'existe ancune solution de (1) sur R.

1268. CCINP a) Diagonaliser la matrice $A - \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -3 & 5 & -2 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

b) Résoudre le système differentiel $X' = AX$.

1269. *IMT*. Résoudre le système differentiel $\begin{cases} x' = y - z \\ y' = 2x + y + z \\ z' = -2x - y - z \end{cases}$

1270. TPE. Extrema de $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$ sur $\mathbb{R}^2$?

Probabilités

1271. TPE. Une information booléenne est transmise grâce à n relais notés $R_1, \ldots, R_n$.

La probabilité qu'un relai transmette correctement l'information est p.

Les relais sont indépendants.

Calculer la probabilité que l'information transmise par R_n soit la même que celle reçue par R_1. Application numérique : $n = 100$ et $p = 0,999$.

1272. CCP . On considère $2n$ lapins sélectionnés aléatoirement dans un enclos à lapins.

La probabilité qu'un lapin soit mâle est $1/2$. On note M la variable aléatoire égale au nombre de lapins mâles obtenus et C la variable alétoire égale au nombre de couples possibles (un lapin mâle + un lapin femelle).

a) Donner la loi de M.

b) Donner une relation entre C et M.

c) Donner la loi de C.

d) Calculer l'espérance de C.

1273 . St Cyr . Python . On jette un dé jusqu'à obtenir un 5,

on note T la variable aléatoire égale au nombre de lancers.

a) Donner la loi de T, son espérance et sa variance.

b) Ecrire une fonction Python qui simule l'expérience et renvoie T.

c) On jette 4 dés et on retire à chaque fois ceux qui sont tombés sur 5 ,

jusqu'à ne plus avoir de dé. On note N la variable aléatoire associée à ce nombre de lancers.

Ecrire une fonction Python qui simule cette expérience,

et une autre qui donne une approximation de l'espérance de N.

d) Déterminer, pour $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(N \leqslant k)$. En déduire l'espérance de N.

1274. CCINP. On considère deux variables de Poisson indépendantes X et Y,

de paramètres λ et μ.

a) On pose $Z = X + Y$. Question de cours : montrer que $Z \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer et reconnaitre la loi conditionnelle de X sachant que $Z = n$.

1275 .IMT. On considère une pièce équilibrée et on réalise une série de lancers indépendants.

On s'intéresse à l'apparition du deuxième pile.

On note X la variable aléatoire comptant le nombre

de faces avant l'apparition du deuxième pile.

Déterminer la loi de X et calculer son espérance.

1276 . CCINP . Trois individus A_1, A_2, A_3 se présentent dans un bureau de poste comportant

deux guichets. Les individus A_1 et A_2 sont pris en charge dès leur arrivée,

A_3 doit atrendre que A_1 ou A_2 ait fini pour passer à son tour au guichet.

Le temps passé au guichet par A_i est noté $X_i (1 \leqslant i \leqslant 3)$;

on suppose que chaque X_i suit une loi géométrique de paramètre p.

a) On note Y le temps d'attente de A_3 avant son passage au guichet.

Pour $k \in \mathbb{N}$, déterminer $\mathcal{P}(Y > k)$. Donner la fonction de répartition de Y.

b) Soit Z le temps total passé par A_3 à la poste. Donner la loi de Z.

c) Déterminer le temps moyen passé par A_3 à la poste.

1277. IMT. Soil $a > 0$ et X une variable aléatoire A valeurs dans N^* telle que :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}(X = n) = \frac{a}{n(n+1)}$.

a) Trouver la valeur de a.

b) La variable X admet-elle une espérance ? une variance ?

c) Déterminer la fonction génératrice de X.

1278. CCP. Soit $(X_n)_{\mathrm{neN}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes

suivant chacune une loi de Bernoulli de paramètre p.

Soit N une variable aléatoire telle que $N + 1$ suive la loi géométrique de paramètre p.

On pose $Y = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} X_n$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner la loi de $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

b) Soit $x \in]-1,1[$. Calculer, pour $k \in \mathbb{N}^*, \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k}$.

c) Calculer $\mathcal{P}(Y=k)$ et donner la loi de $Y+\mathrm{L}$.

1279. CCINP. On considère une urne contenant des boules numerotées de 1 à n.

On dispose d'un jeton mobile sur un axe gradué de 0 à n; la position initiale da jeton est 0.

On effectue des tirages avec remise dans l'urne et à chaque tirage,

si le numéro de la boule est inférieur ou égal à la position de jeton, on déplace

le jeton d'une graduation vers la gauche, et si le numéro de la boule est strictement

supérieur à la position du jeton, on le déplace d'wne graduation vers la droite.

a) Donner les positions possibles du jeton après p lancers.

b) On note X_p la position da jeton apres p lancers.

Expriner $\mathcal{P}\left(X_{p+1}=0\right)$ en fonction de $\mathcal{P}\left(X_p=1\right)$ et $\mathcal{P}\left(X_{\mathrm{p}+1}=n\right)$ en fonction de $\mathcal{P}\left(X_p=n-1\right)$.

c) Pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$, exprimer $\mathcal{P}\left(X_{p+1}-k\right)$ en fonction de $\mathcal{P}\left(X_{\xi}=k-1\right)$ et $\mathcal{P}\left(X_p=k+1\right)$.

d) Rappeler pourquoi la fonction génératrice d'une variable aléatoire à valeurs dans N existe

au moins sur l'intervalle $[-1,1]$. On note G_p la fonction génératrice de X_p,

pourquoi G_p est-elle polynomiale ?

e) On admet que $G_{p+1}(t)=tG_p(t)+\dfrac{1-t^2}{n}G_p'(t)$ pour tous t et p.

Montrer que $E\left(X_{\mathrm{p}+1}\right)=1+\left(1-\dfrac{2}{n}\right)\mathrm{E}\left(X_p\right)$.

f) Déterminer $E\left(X_p\right)$.

1280. CCP. a) Donner le développement en série entière de $\frac{1}{(1-x)^n}$

pour $n=1$ puis pour $n \in \mathbb{N}^*$.

b) On définit, pour $k \in \mathbb{N}, p_k=\binom{n+k-1}{k} p^n q^k$ avec $p \in]0,1[$ et $q=1-p$.

Montrer que la suite (p_k) définit use probabilité sur $\mathbb{N}$.

c) On définit la loi d'une variable aléntoire X par : $\forall k \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(X=k)=p_k$.

Déterminer la fonction génératrice de X.

d) Calculer l'espérance et la variance de X.

Algèbre PC

1281. CCINP Soit $P=(X+1)^7-X^7-1$.

Montrer que j est racine de P. Déterminer sa multiplicité.

1282. CCINP. Soit $P=X^3+2(4+5i)X^2+(10-i)X+(3-11i)=0$.

Montrer que P possède une racine réelle.

Déterminer les racines de P dans $\mathbb{C}$.

1283. ENSEA. Déterminer les racines complexes de X^2-X+1,

et montrer que X^2-X+1 divise $(X-1)^{n+2}+X^{2n}+1$

1284. *TPE* En factorisant $\sum_{k=0}^{n-1} X^k$ dans C$[X]$, montrer que $\prod_{k=1}^{n-1} sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)=\frac{n}{2^{n-1}}$.

1285. Soit $E=\{P \in \mathbb{R}_n[X]; P(0)=P'(0)=0\}$. Donner $dim(E)$.

1286. *IMT* Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $A+A^{-1}=I_n$. Calculer A^k+A^{-k} pour $k \in \mathbb{N}$.

1287. C C I N P. Soient $A-\begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ et $\Delta=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Soit $X \in M_2(\mathbb{R})$ telle gue $X^2=\Delta$.

Montrer que X et Δ commutent puis que X est diagonale.

b) Résoudre l'équation $M^2=A$ d'inconnue $M \in M_2(\mathbb{R})$.

1288. I M T . On pose $B_{n,k}=X^k(1-X)^{n-k}$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$.

a) Montrer que $(B_{n,k})_0^n$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Donner la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}_n \mid X]$ à cette base.

1289. *TPE* Montrer que $P \mapsto P-P'$ est un automorphisme de $\mathbb{R}[X]$, et donner l'automorphisme réciproque.

1290. CCINP a) Pour $f : \mathcal{M}_{\mathrm{A}}(\mathrm{R}) \to \mathbb{R}$ linéaire non nulle, préciser dim Ker f et rg f.

b) On note $(E_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la base canonique de $M_n(\mathbb{R})$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $A = 0$ ssi, pour tout $(i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2, \operatorname{tr}(AE_{ij}) = 0$.

c) Pour $A \in M_n(R)$, on pose $\varphi_A : M \in M_n(\mathbb{R}) \mapsto \operatorname{tr}(AM) \in \mathbb{R}$.

Montrer que $A \mapsto \varphi_A$ est un isomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})$

1291. HT Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie n.

Montrer que n est pair si et seulement s'il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\operatorname{lm} u = \operatorname{Ker} \mathrm{u}$.

1292. CCINP. Soient E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$

et $f : E \to \mathbb{R}$ linéaire et surjective.

a) Montrer qu'il existe $x_0 \in B$ tel que $E = \operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Vect}(x_0)$.

b) Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il existe un scalaire λ tel que $f \circ \varphi = \lambda f$

si et seulement si Ker f est stable par φ.

1293. CCINP. Soient E un espsce vectoriel et $u, v \in \mathcal{L}(E)$.

a) Montrer que $\operatorname{Ker}(\mathrm{u}) = \operatorname{Ker}(\mathrm{v} \circ \mathrm{u})$ si et seulement si $\operatorname{Im}(\mathrm{u}) \cap \operatorname{Ker}(\mathrm{v}) = \{0\}$.

b) Montrer que si $E = \operatorname{Ker}(v) + \operatorname{lm}(u)$, alors $\operatorname{Im}(v) = \operatorname{Im}(v \circ u)$.

1294. IMT. Soit $A \in M_n(\mathrm{R})$ telle que $A^2 = -I_n$. Montrer que det $A = 1$.

1295. CCINP . Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,

est-ce que A admet une racine carrée réelle ?

1296 . IMT . Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Pour $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$, on pose $M(a,b,c) = aI_3 + bJ + cJ^2$.

a) Montrer que les matrices $M(a,b,c)$, pour $(a,b,c) \in C^3$, commutent entre elles.

b) Montrer que J est diagonalisable. Préciser ses éléments propres.

c) Soit $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$.

Montrer que $M\left(a,b,c\right)$ est diagonaliable et déterminer ses éléments propres.

1297. IMT. Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer rg$M$ et montrer que M est diagonalisable.

b) Calculer M^2 et donner le spectre de M.

1298. CCINP. Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose $M_\alpha = \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & a & a & a \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer le rang de M_a. Qu'en déduire sur ses valeurs propres ?

b) Déterminer valeurs propres et sous espaces propres de M_a.

1299. IMT. Déterminer une condition necéssaire et suffisante sur $(a,b,c,d,e) \in \mathbb{R}^5$

pour que la macrice $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$ soit diagonalisable. Ind. Distinguer $a = e$ et $a \neq e$.

1300. IMT . Soient $\varphi \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & \sin\varphi & \sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & 0 & \sin 2\varphi \\ \sin\varphi & \sin 2\varphi & 0 \end{pmatrix}$.

Donner une condition nécessaire et suffisante sur φ pour que A soit diagonalisable.

1301. CCINP. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in M_{2n+1}(\mathbb{R})$.

a) Calculer M^2.

b) La matrice M est-elle diagonalisable ? En déterminer les éléments propres.

1302. IMT. On considère $\mathbb{C}$ comme $\mathbb{R}$ ev. Soit $f : z \in \mathbb{C} \mapsto iz + (1-i)\overline{z}$.

a) Quelle est la base canonique de $\mathbb{C}$?

b) Montrer que f est $\mathbb{R}$ - linéaire. Donner sa matrice dans la base canonique.

c) L'application f est-elle diagonalisable ?

1303. CCINP. Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $M^4 - 2M^3 + 2M^2 = 0$.

a) Soit λ une valeur propre complexe de M. Montrer que $\lambda^4 - 2\lambda^3 + 2\lambda^2 = 0$.

b) Montrer que $tr(M)$ est un entier naturel pair.

1304. IMT. Soit $f : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto X(X-1)P(-1) + (X+1)(X-1)P(0) + X(X+1)P(1)$.

a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

b) Soient $A = X(X-1), B = (X+1)(X-1)$ et $C = X(X+1)$.

Montrer que (A, B, C) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

c) Déterminer Ker$f$. En déduire une valeur propre et un sous-espace propre associé.

d) Montrer que Im$f = \mathbb{R}_2[X]$.

e) Soit P un vecteur associé à une valeur propre non nulle de f.

Que peut-on dire du degré de P ?

Préciser l'ensemble des valeurs propres et des sous-espsces propres de f.

1305. IMT. Soit $E = \mathbb{R}[X]$. On pose $f : P \in E \mapsto P(1)X - P(3)\left(25 - X^2\right)$.

a) Montrer que f définit un endomophisme de E.

b) Déterminer Ker f et Imf.

c) Déterminer les éléments propres de f.

1306. Navale. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\phi : P \in \mathbb{R}_n[X] \to P - P' \in \mathbb{R}_n[X]$

a) Donner la matrice M de Φ dans la base canonique. La matrice M est-elle diagonalisable ?

b) Montrer que M est semblable à $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n+1}$ où pour tout i, $a_{i,i} = 1$, $a_{i,i+1} = -1$, les autres coefficients étant nuls.

Soit $Q \in \mathbb{R}_n[X]$. Montrer qu'il existe un unique $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P - P' = Q$.

Exprimer P en fonction de Q et de ses dérivées.

1307. CCINP. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ nilpotente.

Montrer que la trace et le déterminant de A sont nuls. Étudier la réciproque.

1308 . CCINP . Soient $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 3$, $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice dont tous les coefficients

sont égaux à 1, $(m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que,

pour $(i,j) \in \{1,..,n\}^2$, $m_{i,j} = 1$ si $j > i$, $m_{i,j} = 2$ si $j < i$, $m_{i,i} = 0$.

Soit, pour $\lambda \in \mathbb{C}, f_\lambda : x \in \mathbb{C} \mapsto \det(\lambda I_n - M + xJ)$.

a) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer que f_λ est polynomiale de degré $\leqslant 1$.

Calculer $f_\lambda(1)$ ex $f_\lambda(2)$. En déduire f_λ.

b) Déterminer χ_{M} . La matrice M est-elle diagonalisable ?

1309 . Navale. Soient A et $B \in M_n(K)$.

a) Soit λ une valeur propre non nulle de AB. Montrer que c'est une valeur propre de BA .

b) Montrer que, si 0 est valeur propre de AB, c'est une valeur propre de BA .

c) En déduire une relation entre $\mathrm{Sp}(AB)$ et $\mathrm{Sp}(BA)$.

d) Soit $E = K[X]$. On considère les endomorphismes f et g

de E définis par $f(P) = XP$ et $g(P) = P'$.

Montrer que 0 est valeur propre de $f \circ g$. Est-ce une valeur propre de $g \circ f$?

1310. CCINP. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ non nulle et $\varphi : X \in M_n(\mathbb{R}) \mapsto X + \mathrm{Tr}(X)A$.

a) Montrer que $\mathrm{Ker}\ \varphi \in \mathrm{Vect}(A)$ puis que φ est bijective si et seulement si $\mathrm{Tr}(A) \neq -1$.

b) Déterminer les valeurs propres de φ.

1311. TPE, On se donme deux matrices A et B non nulles de $M_n(R)$.

Pour $M \in \mathcal{M}_n(R)$, on pose $\varphi(M) = M + (\mathrm{tr}\, AM)B$

a) Montrer que φ est un endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$ et calculer $\dim \mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{id}\ )$.

b) Est-ce que φ est diagonalisable ?

1312. CCINP. Soit Φ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui à une matrice $A=(a_{i,j})$

associe la matrice $\Phi(A)=(a_{n+1-i,n+1-j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

a) Déterminer $\Phi\circ\Phi$.

b) Exprimer $\Phi\left(M^T\right)$ en fonction de $\Phi(M), \Phi(AB)$ en fonction de $\Phi(A)$ et $\Phi(B)$.

c) Montrer que $\Phi(M)$ est inversible si et seulement si M est inversible.

d) Montrer que $\Phi(M)$ est diagonalisable si et seulement si M l'est.

1313. CCINP. Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie,

$n\in\mathbb{N}^*,(e_1,\ldots,e_n)$ une base de E. Soit f l'endomorphisme de E tel que :

$\forall k\in\{1,\ldots,n\}, f\left(e_k\right)=\displaystyle\sum_{i\neq k} e_i$.

a) Montrer que f est diagonalisable.

b) Déterminer les valeurs propres de f.

1314. CCNP. a) Donner un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont toutes

les matrices sont diagonalisables.

b) Donner un sous-espsce vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dont aucune matrice non nulle

n'est diagonalisabie.

c) Déterminer la dimension maximale d'un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

dont toutes les matrices sont diagonalisables.

1315. CCINP. Soient E un $\mathbb{C}$ e-v de dimension $n\geqslant 1$, et $f,g\in\mathcal{L}(E)$.

On suppose que $f\circ g=g\circ f$.

a) Montrer que f admet une valeur propre.

b) Montrer que f et g ont un vecteur propre en commun.

1316. CCINP. Soit $A\in M_n(\mathbb{R})$ telle que $\left(I_n, A, A^2\right)$ est libre et $A^3=xI_{\mathrm{n}}+yA+zA^2$

avec $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. On pose $E=\operatorname{Vect}\left(I_n, A, A^2\right)$. Soit enfin $f: M\in E\mapsto AM$.

a) Montrer que f est un endomorpbisme de E.

b) Donner la matrice de f dans la base $\left(I_{n_1} A_, A^2\right)$ et justifier que $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \operatorname{rg}(f-\lambda \mathrm{id}) \geqslant 2$.

c) On admet que $\chi_f(\lambda)=\lambda^3-z \lambda^2-y \lambda-x$.

Montrer que f est diagonalisable si et seulement si χ_f est scindé à racines simples.

d) Montrer que f et A ont les mémes valeurs propres.

e) On suppose que $\chi_f(X)=\left(X-\lambda_1\right)^{n_1}\left(X-\lambda_2\right)^{n_2}\left(X-\lambda_3\right)^{n_3}$

avec $\lambda_i \in]-1,1[$ pour $i \in\{1,2,3\}$ et $n_1+n_2+n_3=n$.

i) Montrer que la suite $\left(f^k\right)$ converge vers 0 dans $\mathcal{L}(E)$.

ii) Montrer que la suite (A^k) converge vers 0 dans $M_n(\mathbb{R})$.

1317. TPE. Calcuter $\inf\limits_{(a, b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1\left(x^2-a x-b\right)^2 d x$.

1318. CCINP. Soient E un espace euclidien de dimension 3

et (i, j, k) une base orthonormée de E.

Soit $V=(\operatorname{Vect}(i-3 k))^{\perp}$.

Donner la matrice dans la base (i, j, k) de la projection orthogonale sur V.

1319. CCINP . Soit $E=\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$. Soient $h: x \in[0,1] \mapsto x . \ln (x)$, et pour $n \in \mathbb{N}$,

$P_n: x \in[0,1] \mapsto x^n$. Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on pose $f_{a, b}: x \in[0,1] \mapsto x^2 .(\ln (x)-a x-b)^2$.

Soit enfin $F=\operatorname{Vect}\left(P_1, P_2\right)$. On munit E du produit scalaire défini par :

$\forall(f, g) \in E^2,\langle f, g\rangle=\displaystyle\int_0^1 f(t) g(t) \mathrm{d} t$

a) Justifer que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2, f_{a, b} \in E$.

b) Montrer que $h \in E$. Calculer, pour $n \in \mathbb{N},<h, P_n>$.

c) Calculer $\left(P_1, P_2\right),\left\|P_1\right\|$ et $\left\|P_2\right\|$.

d) Trouver $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, tels que $Q_1=\lambda P_1$ et $Q_2=\frac{P_2-\mu P_1}{\left\|P_2-\mu P_1\right\|}$ forme une bon de F.

Donner l'expression de la projection orthogonale de h sur F en fonction de Q_1 et Q_2.

On notera g ce projeté.

e) On propose une autre méthode pour déterminer g.

Chercher $g = aP_1 + bP_2$ tel que $\int_0^1 x(h-g)(x)\mathrm{d}x = 0 - \int_0^1 x^2(h-g)(x)\mathrm{d}x$.

f) Calculer $\inf\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 x^2(\ln(x) - a - bx)^2 dx$.

1320. TPE Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille de vecteurs unitaires d'un espace euclidien E.

On suppose que, pour tout $x \in E, \|x\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle^2$.

Montrer que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de E.

1321. CCINP. Soient $(E, <,>)$ un espace euclidien et $a \in E$ non nul.

On note $f_a : x \in E \mapsto x - 2 < x$, a$>$ a.

a) Déterminer Ker$\,(f_a - Id)$.

b) Calculer $f_a(a)$.

c) Montrer que f_a est diagonalisable.

1322. CCINP Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $a_{i,j} = \dfrac{1}{i+j+1}$.

a) Montrer que A est diagonalisable.

b) On pose. pour $X \in M_{n,1}(\mathbb{R}), \varphi(X) = X^T AX$.

Exprimer $\varphi(X)$ cornme l'intégrale d'une fonction positive.

1323, CCINP. Soients $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2, E = \mathbb{R}_n[X\ |, \alpha \in \mathbb{R}$.

On pose, pour $(P, Q) \in E^2, < P, Q >= \sum\limits_{k=0}^{n} P^{(k)}(\alpha)Q^{(k)}(\alpha)$.

a) Montrer que $<,>$ est un produit scalaire sur E.

b) Soit $f : P \in E \mapsto f(P) = (X - \alpha)P'(\alpha)$.

Montrer que f est un endomorphisme symétrique de E.

1324, CCINP. On munit $\mathbb{R}^3$ de son produit scalaire canonique $<,>$, .

Soit $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ définie par

$u(x) =< a, x > b+ < b, x > a$ où a et b sont unitaires et libres de $\mathbb{R}^3$.

a) Montrer que u est un endomorphisme symétrique. Que peut-on en déduire ?

b) Donner $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$. Montrer que u n'est pas une projection orthogonale.

1325. IMT. Soient $(E, <,>)$, un espace euclidien, $u \in \mathcal{O}(E)$.

a) Que peut-on dire des éventuelles valeurs propres de u ? Justifier.

b) Une isométrie vectorielle a-t-elle toujours une valeur propre réelle ?

c) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{O}(E)$.

Préciser la nature géométrique de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquemnent associé à A.

1326. CCINP. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant 2n+1} \in \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ où $a_{n+1,i} = a_{i,n+1} = 1$

pour $i \in \{1, \ldots, 2n+1\}$, les autres coefficients étant nuls.

Montrer que A est diagonalisable. Diagonaliser A.

1327. CCINP. Soient $(E, <,>)$, un espace euclidien, $g \in \mathcal{O}(E\}$ et $f = \mathrm{id} - g$.

Montrer que $\mathrm{Im} f \subset (\mathrm{Ker} f)^{\perp}$, puis l'égalité.

1328. CCINP. Soient $A \in M_{5,10}(\mathbb{R})$ et $B = A^T A$.

a) Déterminer le format de la matrice B.

b) La matrice B est-elle diagonalisable ?

c) Montrer que 0 est valeur propre de B.

1329.CCINP . Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $a_{i,i+1} = a_{i+1,i} = 1$ pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$

les autres coefficients étant nuls.

a) Soil $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $rg\,(A - \lambda I_n) \geqslant n-1$.

b) En déduire que A possède n valeurs propres distinctes.

1330.TPE. Soit $A \in M_n(R)$ antisymétrique. Montrer que $(I_n + A)$ est inversible.

1331. CCINP Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^t AA = I_n$.

a) Montrer que A est symétrique.

b) Montrer que $A = I_n$

1332. IMT Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + A^T = I_n$.

a) Montrer que $A = I_n - (A^T)^2$.

b) Montrer que $(A - I_n)\left(A^2 + A - I_n\right) = 0$.

c) Montrer que 1 n'est pas valeur propre de A.

d) En déduire que A est symétrique.

Analyse-PC

1333.CCINP. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $(i, j), a_{i,j} > 0$ et,

pour tout i, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$.

On admet que $rg\,(A - I_n) = n - 1$.

Si $X = (x_1, \ldots, x_n)^T \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, on pose $\|X\| = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$.

a) Déterminer $\operatorname{Ker}(A - I_n)$.

b) Montrer que, pour tout $X \in M_{n,1}(\mathbb{R}), \|AX\| \leqslant \|X\|$.

c) Soit λ une valeur propre de A. Montrer que $|\lambda| \leqslant 1$.

d) On pose $B = A + I_n = (b_{i,j})$. Montrer que, pour tout i, $b_{i,i} > \displaystyle\sum_{j \neq i} b_{i,j}$.

e) Montrer que B est inversible.

f) Montrer que (A^p) converge vers une matrice R, et que R est semblable à diag $(1, 0, \ldots, 0)$.

1334. CCINP. Pour $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $\|A\| = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}|$.

On admet que c'est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On note aussi $\rho(A)$ le plus grand module des valeurs propres de A.

a) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On pose $A=\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix}$. Calculer $\|A\|$ et $\rho(A)$.

b) Montrer que, si A et B sont dans $\mathcal{M}_n(\mathrm{C})$, alors $\|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|$.

c) Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\rho(A) \leqslant \|A\|$

d) Soient $A \in M_n(C)$ et $k \in \mathbb{N}$, Montrer que $\rho\left(A^k\right)=\rho(A)^k$.

e) Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. On suppose A diagonalisable.

Montrer que $\left(A^k\right)$ tend vers 0 si et soulement si $\rho(A)<1$.

1335. CCINP . Donner un équivalent de $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n^2}{n^2+k^2}$.

1336. CCINP a) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \ln n$.

On pose $u_1=\dfrac{1}{2}$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1}=\dfrac{1+u_n^2}{2}$ et $v_n=1-u_n$.

b) Montrer que, pour tout n, $u_n \in [1/2, 1[$.

c) Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{v_{n+1}}-\dfrac{1}{v_n}=\dfrac{1}{2-v_n}$, et en déduire que $v_n \leqslant \dfrac{2}{n+3}$.

d) Montrer que $\dfrac{1}{v_n} \leqslant \ln(n+2)+\dfrac{n+2}{2}$.

e) En déduire un développement asymptotique à deux termes de $\mathrm{u_n}$.

1337. IMT . Soit (u_n) la suite définie par $u_0>0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}=\arctan(u_n)$.

a) Montrer que la suite (u_n) converge et détermirer sa limite.

b) On pose, pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$: $v_n=\dfrac{1}{(u_{n+1})\alpha}-\dfrac{1}{(u_n)\alpha}$.

Déterminer α pour que la suite (v_n) converge vers une limite réelle non nulle.

c) On admet le théorème de Césaro. Déterminer un équivalent de u_n.

1338. CCINP. a) Nature, suivant $a \in \mathbb{R}$, de la série de terme général $u_n=\ln\left(1+\dfrac{1}{n^a}\right)$?

b) Nature de la série de terme général $v_n=\ln\left(\dfrac{\mathrm{sh}(1/n)}{\sin(1/n)}\right)$?

1339.IMT. Nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n\ln^3(n)}$?

1340. TPE Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{n^2+3n+3}\right)$. Ind. Utiliser tan $(a-b)$.

1341. IMT. Soient $\alpha \geqslant 0$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{1}^{n} k^{\alpha}$. Etudier la nature de $\displaystyle\sum \frac{1}{S_n}$.

1342.IMT. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{n+1}$.

a) Déterminer la limite de la suite (u_n).

b) Déterminer la limite de la suite (v_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = nu_n$.

c) Quelle est la nature des séries $\sum u_n$ et $\displaystyle\sum (-1)^n v_n$?

1343. IMT. Soit u la suite définie par $u_0 \in]\,0,1\,[$ et, pour $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

a) Etudier la suite u.

b) Donner la nature des séries $\sum (-1)^n \mathrm{u}_n, \sum u_n^2$, et $\sum u_n$.

1344. TPE. Soit u la suite définie par la relation $u_{n+1} = \sin u_n$, avec $u_0 \in]\,0,1[$.

a) Montrer que u converge et donner sa limite.

b) Calculer $\lim \dfrac{u_{n+1}-u_n}{u_n^3}$. En déduire la nature de $\displaystyle\sum u_n^3$.

c) Donner la nature $\sum \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$. En déduire la nature de $\sum u_n^2$

1345. CCINP Soit (S_k) la suite de $\mathbb{R}[X]$ définie par $S_0 = 1$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*, S_k = \displaystyle\prod_{i=0}^{k-1}(X-i)$.

a) i) Calculer S_1, S_2, S_3. Quel est le degré de S_n ?

ii) Montrer que pour tout $m \in N$, la famille $(S_0, S_1, \ldots, S_m)$ est une base de $\mathbb{R}_m[X]$.

iii) Calculer $S_k(n)$ pour $(k,n) \in \mathbb{N}^2$.

b) Soit $P \in \mathbb{R}_m[X]$. On écrit $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} a_k S_k(X)$.

i) Montrer que $\forall n \geqslant m$, $\dfrac{P(n)}{n!} = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} \frac{a_k}{(n-k)!}$.

ii) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(n)}{n!}$ converge et exprimer sa somme en fonction des a_k.

c) Montrer la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{n!}$ pour $p \geqslant 2$

et calculer sa somme.

1346. CCINP On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*, u_n = \dfrac{\ln n}{n}, v_n = (-1)^n u_n, S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_n$,

$T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k$, $H_{\mathrm{n}} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \cdot$.

On admet que $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$ svec $\gamma \in \mathbb{R}$.

Etudier les variations de $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$.

b) Comparer u_x et $1/n$. Nature de $\sum u_n$ et $\sum v_n$?

c) Montrer que $S_{2n} - S_n = \ln(2)\ln(n) + \dfrac{(\ln(2))^2}{2} + o(1)$.

d) Exprimer $S_{2n} + T_{2n}$ à l'aide de S_n et de T_n. En déduire une expression de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$.

1347. *IMT*. Soit (u_n) une suite réelle à termes strictement positifs.

Soit (x_n) la suite définie par $x_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \sqrt{x_n^2 + u_n}\right)$.

a) On suppose que la série $\sum u_n$ converge. Montrer que la suite (x_n) converge.

b) On suppose que la suite (x_n) converge. Montrer que la série $\sum u_n$ converge.

1348.IMT. Soient $a, b > 0$. Trouver $\displaystyle\lim_{0^+} \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$.

1349. IMT . Soit $E = \mathcal{C}^0([-\pi, \pi], \mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on pose $\Phi(f) : x \mapsto \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} sin(x+t)f(t)dt$.

a) Montrer que Φ est un endomorphisme de E.

b) Calculer $\Phi(\sin)$ et $\Phi(\cos)$.

c) Déterminer $\ker \Phi$ et $Im\Phi$.

1350. CCINP. Déterminer les fonctions $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tq $\forall x \in \mathbb{R}, \forall a > 0$, $2af(x) = \displaystyle\int_{x-a}^{x+a} f$.

1351. CCINP. Soit E l'espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Soit φ l'application qui à $f \in E$ associe la fonction $g = \varphi(f)$ définie sur $\mathbb{R}$

par $g(x) = f'(x) - xf(x)$.

a) Montrer que φ est un endomorphisme de E.

b) Résoudre $y'(x) - xy(x) = 0$. En déduire $\mathrm{Ker}(\varphi)$. L'application φ est-elle injective ?

c) Montrer que φ est surjective.

1352. CCNIP Soit $f : x \mapsto \sqrt{\frac{1}{x} - \lfloor \frac{1}{x} \rfloor}$.

a) Montrer, pour $x \in \mathbb{R}^*$, $|f(x)| \leqslant |x|$.

b) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On note encore f son prolongement.

c) La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

d) En quels points de $\mathbb{R}^+$ l'application f est-elle continue ?

1353. CCINP. Montrer que $f : t \mapsto \dfrac{\ln(t)\ln(1-t)}{t}$ est intégrable sur $]0, 1[$.

1354. *IMT*. Soit $a > 0$. Donner la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^a}\, \mathrm{d}x$.

1355. CCINP. Montrer l'existence de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{(1 + x^2)^2} dx$. Calculer I.

1356. CCINP. Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}$ l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)^n}$

converge-t-elle ? Donner alors sa valeur.

1357. CCINP. On admet que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t$ converge et vaut $\dfrac{\pi}{2}$.

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : t \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \dfrac{1 - \cos^n(t)}{t^2}$ et $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t$.

a) Montrer que f_n est prolongeable par continuité en 0 .

b) Montrer que u_n existe et que $u_1 = \dfrac{\pi}{2}$.

c) Montrer que, pour tout $s \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(st)}{t^2}\, \mathrm{d}t$ converge et vaut $\dfrac{\pi}{2}|s|$. En déduire la valeur de u_2

1358. CCINP. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_k = \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{x - \frac{1}{2} - \lfloor x \rfloor}{x}\, \mathrm{d}x$.

a) Calculer I_k .

b) On pose $J_n = \displaystyle\int_1^n \frac{x - \frac{1}{2} - \lfloor x j}{x} dx.$

Montrer que $J_n = n + \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln(n+1) - \ln n!$.

c) Montrer que $\ln n! = n \ln n - n + \ln n + \frac{1}{2} \ln 2\pi + o(1)$.

d) Montrer que $(J_n)_{n \geqslant 1}$ converge et donner sa limite.

e) Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x - \frac{1}{2} - \lfloor x \rfloor}{x}\, \mathrm{d}x$ converge et donner sa valeur.

1359. CCINP Soit $f \in C^2(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$ telle que $\forall x > 0, f(x+1) = x f(x)$ et $f''(x) > 0$.

a) Énoncer le théorème de Rolle.

b) i) Expliciter $f(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

ii) Montrer qu'il existe $\alpha \in]1, 2[$ tel que $f'(\alpha) = 0$.

En déduire les variations de f sur $]0, +\infty[$.

c) i) Montrer que f est de signe constant sur $]0, +\infty[$; déterminer son signe.

ii) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

d) Préciser la nature des intégrales suivantes :

i) $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t) \mathrm{d}t$ ii) $\displaystyle\int_0^1 f(t) \mathrm{d}t$, iii) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{f(t)} \mathrm{d}t$.

1360. Navale. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose $f_n : x \mapsto n^\alpha x^2 e^{-nx}$ et $g_n : x \mapsto n^\alpha x \sin x e^{-n\pi}$

pour $n \in \mathbb{N}^*$. Étudier la convergence simple et uniforme des suites (f_n) et (g_n) sur $\mathbb{R}^+$.

1361. CCINP. Soit, pour $n \geqslant 1, f_n : x \mapsto \dfrac{(-1)^n}{n + x^2}$.

Étudier la convergence simple/uniforme/normale sur $\mathbb{R}$ de $\sum f_n$.

1362. *IMT*. On veut déterminer les fonctions $f \in C^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ telles que $(*)$:

$\forall x \in \mathbf{R}^{+*}, f(2x) = f(x) + x \ln x$.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, soit $u_k : x \mapsto \dfrac{1}{2^k} \ln\left(\dfrac{x}{2^k}\right)$.

a) Montrer que $\sum u_k$ converge simplement sur $]0;+\infty[$. On note $S=\sum_{k=1}^{+\infty} u_k$.

b) Soit $f \in C^0\left(\mathbb{R}^{+}, \mathbb{R}\right)$ vérifiant $(*)$.

Exprimer f en fonction de $f(0)$ et de S.

c) Conclure.

1363. CCINP. Montrer l'existence de $f: x \in]0,+\infty[\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{ch} n x}$,

puis déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

1364. CCINP. Soit $f: x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n^2 x}$.

a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ mais qu'il n'y a pas convergence normale sur $\mathbb{R}^{+*}$.

b) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

c) Montrer que $f-1$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et exprimer son intégrale

à l'aide de $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}$.

d) Montrer que f n'est pas intégrable sar $\mathbb{R}^{+*}$.

e) Montrer que, pour $x \in \mathbb{R}^{+*} \cdot \int_0^{+\infty} e^{-t^2 x} \mathrm{~d} t \leqslant f(x) \leqslant 1+\int_0^{+\infty} e^{-t^2 x} \mathrm{~d} t$.

f) En admettant que $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} \mathrm{~d} u=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, donner un équivalent de f en 0.

. 1365. CCINP Pour $x>0$ et $n \geqslant 2$, on pose $u_n(x)=\prod_{k=2}^n\left(1-\frac{1}{k^x}\right)$.

a) Soit $t>-1$. Montrer que $\ln (1+t) \leqslant t$.

b) Montrer que, si $x>0$, la suite $\left(u_n(x)\right)_{n \geqslant 2}$ converge.

On note u (x) sa limite. Quelle est la valeur de $u(x)$ lorsque $x \in]0,1]$?

c) Soit $a>1$. Montrer que $\sum \ln \left(1-\frac{1}{k^x}\right)$ est normalement convergente sur $]a,+\infty[$.

En déduire que u est continue sur $]1,+\infty[$.

d) Montrer que u est continue sur $j 0,+\infty[$.

1366. CCINP. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{n^n}{n!} x^n$.

1367. CCINP. Soient (a_n) et (b_n) dans $\mathbb{R}^{N^*}$ définies par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \ln(n)$ et $b_n = \ln(n!)$.

Déterminer les rayons de convergence de $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$.

1368. IMT. Soit $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{sh(n)}{n(n+1)} x^n$.

a) Donner un équivalent de sh(n).

b) Donner le domaine de définition de f.

1369. TPE On pose $g(x) = \int_0^{\frac{1}{2}} e^{x \sin t}\, \mathrm{d}t$.

Montrer que g est développable en série entière autour de 0 sur $\mathbb{R}$,

et exprimer les coefficients de ce développement à l'aide des intégrales $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\, \mathrm{d}t$.

1370. CCINP Soient $\varphi : t \mapsto e^{e^t - 1}$ et $(\mathrm{p_n})_{n \geqslant 0}$ la suite réelle définie par $p_0 = 1$

et, pour $n \in \mathbb{N}$, $p_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) p_k$.

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{p_m}{n!} x^n$.

a) On admet que $\varphi(t) \underset{t \to 0}{=} 1 + t + t^2 + \frac{5}{6} t^3 + o\left(t^3\right)$. Donner $\varphi^{(n)}(0)$ pour $n \in \{0, 1, 2, 3\}$.

b) Calculer p_1, p_2, p_3. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}, p_n \leqslant n$.

c) Montrer que le rayon de convergence de f est > 0.

d) Montrer que $f'(x) = e^x f(x)$. En déduire que, pour $n \in \mathbb{N}, p_n = \varphi^{(n)}(0)$.

e) Montrer que p_n est égal au nombre de partitions d'un ensemble à n éléments.

1371. CCINP. On définit $(u_n)_n \geqslant 0$ par $u_0 = 1$ et, pour

$n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = (n+1) u_n + (-1)^{n+1}$, puis l'on pose, pour $n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{u_n}{n!}$

a) Calculer $v_0 \ldots, v_3$.

b) Exprimer v_{n+1} à l'aide de v_n et de n.

c) En déduire que $(v_n)_{n\geqslant 0}$ converge, et donner sa limite.

d) Donner le rayon de convergence de la série entiere $\sum_{n\geqslant 0} v_n x^n$. On note S sa somme.

e) Donner une équation différentielle verifiée par S.

1372. *IMT*. Soit, pour $n \in \mathbb{N}, I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{du}{1+u^n}$.

a) Calculer I_0, I_1 et I_2.

b) Déterminer la limite de (I_n).

1373. CCINP, On pose, pour $n \in \mathbb{N}^* : I_n = \int_0^{+\infty} e^{-t^n}\mathrm{dt}$.

Justifier l'existence de I_n et déterminer la limite éventuelle de la suite (I_n).

1374. CCINP, a) Énoncer le théorème de convergence dominée.

b) Déterminer la limite de $I_n = \displaystyle\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\,\mathrm{d}x$.

c) Enoncer le théorème de continuité des intégrales à paramètres

et le démontrer à partir du théoreme de convergence dominée.

1375. CCINP. Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\mathrm{dt}$.

a) Déterminer le domaine de définition de F.

b) Calculer $F(1/2)$. Ind. Poser $t = u^3$.

1376. CCINP Soient $D = \mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$ et $I : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \ln\left(x^2 - 2x\cos(\theta)+1\right) d\theta$.

a) Soit $x \in D$. Montrer que $\theta \in [0;\pi] \mapsto \ln\left(x^2-2x\cos(\theta)+1\right)$ est définie et continue.

En déduire que I est đéfinie sur D.

b) Soit $x \in D\backslash\{0\}$. Montrer que $I(1/x) = I(x) - \pi\ln\left(x^2\right)$.

c) Montrer que I est paire.

d) Soit $\theta \in \mathbf{R}$. Montrer $X^4 - 2X^2\cos\theta + 1 = \left(X^2+2X\cos(\theta/2)+1\right)\left(X^2-2X\cos(\theta/2)+1\right)$.

e) En déduire que, pour $x \in D, I\left(x^2\right) = 2I(x)$.

1377. CCINP. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(xt)}{t\,(1+t^2)} \mathrm{d}t$.

Montrer que f est continue, puis de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

1378. IMT. Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sh}(tx)}{t} e^{-t}\, \mathrm{d}t$.

a) Déterminer le domaine de définition D de f. Montrer que f est de classe C^1 sur D.

b) Donner une expression de f' puis une expression de f.

1379. *IMT*. On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} e^{x \sin t}\, \mathrm{d}t$.

a) Montrer que f est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

b) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$, la limite de $\frac{f(x)}{x}$ quand $x \to +\infty$.

c) Donner l'allure de la courbe représentative de f.

1380. CCINP. Soit $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

a) Montrer que la suite (H_n) est croissante et déterminer sa limite.

Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{1-(1-u)^x}{u} du$.

b) Montrer que F est définie et croissante sur $\mathbb{R}^+$.

c) Calculer, pour $x \in \mathbb{R}^+, F(x+1)-F(x)$ et en déduire $F(n)$ en fonction de H_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

d) Montrer que $\forall x \geqslant 0, \ln(1+x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x - 1}{\ln t}\, \mathrm{d}t$.

e) En déduire que $F(x) \underset{+\infty}{\sim} \ln(1+x)$.

1381. Soient $g : (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*} \mapsto \dfrac{\sin(xt)}{e^t - 1}$ et $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} g(x,t) \mathrm{d}t$.

a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer la limite de $t \mapsto g(x,t)$ quand $t \to 0$.

b) Déterminer le domaine de définition D de f.

c) Montrer que f est de classe C^1 et expliciter f'.

d) On fixe $x \in D$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*, u_n : t \mapsto \sin(xt)e^{-nt}$.

Montrer que la série $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

e) Soit $x \in D$. Exprimer $f(x)$ sous forme de somme.

1382. IMT. Soit $F : t \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{x\,(1+x^2)}\mathrm{d}x$.

a) Préciser le domaine de définition D de F. Montrer que F est continue sur D.

c) L'application F est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?

d) Calculer F.

1383. CCINP, Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$.
On pose $\widehat{f} : u \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2i\pi ux}dx$.

a) Montrer que $\hat{f}$ est définie sur $\mathbb{R}$ et bornée.

b) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

c) On suppose que $x \to xf(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

d) Soient $t > 0$ et $\hat{f}_t : u \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi tx^2}e^{-2i\pi ux}dx$.
Montrer que $\hat{f}_t$ est définie sur $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

e) Trouver une équation différentielle d'ordre 1 vérifiée par $\hat{f}_t$.

1384. *IMT*. a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\int_0^1 x^{3n+1}dx$.

b) Montrer la convergence et calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+2}$.

1385. TPE. Montrer l'égalité $\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{e^t - 1}\ \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.

1386. IMT. a) Calculer $\int_0^1 t^n (\ln t)^n\ \mathrm{d}t$ pour $n \in \mathbb{N}$.

b) Montrer que $\int_0^1 t^{-t}\ \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-n}$.

1387. CCINP. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(x)\sin(nx)\mathrm{d}x$ et $b_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\ \mathrm{d}x$.

a) Justifier l'existence de a_n et de b_n. Calculer a_0, a_1, a_2 .

b) Calculer $\left|1+e^{ix}\cos x\right|$ et montrer que $1+e^{ix}\cos x \neq 0$.

c) Montrer que (b_n) tend vers 0 . On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k$.

d) Montrer que $S_n = \operatorname{Im}\left(\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{1+e^{ix}\cos x} - \int_0^{\pi/2} \frac{\left(-e^{ix}\cos x\right)^{n+1}}{1+e^{ix}\cos x}\,\mathrm{d}x\right)$.

e) Montrer que $\sum(-1)^n a_n$ converge et calculer sa somme.

f) Montrer que, pour tout $n, a_n \geqslant 0$. Ind. On pourra intégrer par parties.

1388. CClNP. Soit $I = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^2}dt$.

a) Montrer que I est convergente.

b) Montrer que $I = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)^2}$.

1389. CCINP. On donne $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$. Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+e^x}\,\mathrm{d}x$.

1390. *IMT*. a) Justifier, pour $n \in \mathbb{N}$, l'existence de $I_n = \int_0^1 t^n(\ln t)^2\,\mathrm{dt}$. Calculer I_n.

b) On pose $I = \int_0^{+\infty} \frac{(\ln t)^2}{1+t^2}\,\mathrm{dt}$. Montrer la convergence de cette intégrale.

c) Justifier la convergence de la série $\sum \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$ et montrer que $I = 4\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$.

1391. CCINP. Résoudre $y^n - 4y' + 13y = 0$.

1392. ENSEA. Résoudre l'équation différentielle $x'' + 6x' + 9x = 2te^{-3t}$.

1393. *IMT* Résoudre $|x|y' + (x-1)y = x^2$.

1394. *IMT* Résoudre $\left(x' = x - 8y + te^{-t}; y' = 2x + y + e^{-2t}\right)$.

a) Donner une base de l'espace des solutions. On cherchera des solutions de la forme $t \mapsto t^r$.

b) Résoudre $t^2x'' - 2tx^x + 2x = 1 + t^2$ sur $]0, +\infty[$.

1396. *IMT*. Soit (E) l' équation différentielle $\left(1-x^2\right)y" - 2xy' + 2y = 0$.

a) Pour quelles valeurs de α la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est-elle solution sur un intervalle de longueur strictement positive ?

b) Résoudre (E) sur $]0,1[$.

c) Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.

1397. *TPE*. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{\pi} \cos(x \sin t)\ \mathrm{d}t$.

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et que $\forall x \in \mathbb{R}, xf''(x) + f'(x) + xf(x) = 0$.

1398. CClNP. Soit $f : t \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{(n!)^2}$.

a) Montrer que le rayon de convergence de f est infini.

b) Montrer que f est solution de l'équation différentielle $(E) : ty'' + y' - y = 0$.

1399. CCINP. a) Calculer les parties réelles et imaginaires de $\dfrac{1}{x+i}$ (avec $x \in \mathbb{R}$).

b) En déduire les solutions de 1 'équation $(E) \quad y' + \dfrac{1}{2(x+i)} y = 0$.

c) On pose $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{ixt} e^{-t}}{\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t$.

i) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.

ii) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer sa dérivée à l'aide d'une intégrale.

d) Montrer que f est solution de l' équation (E).

e) Soit $I : \alpha \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha t} \sin(t)}{\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t$.

Montrer que I est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$. Exprimer I en fonction de f. En déduire le signe de I.

1400. CCINP, a) Résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation differentielle $tx' - x = 0$.

Dans la suite, on considere une fonction f satisfaisant sur $]0,+\infty[$ à l'identite

$tf'(t) - |1 - f(t)| = 1$.

b) Montrer que f est strictement croissante.

c) On suppose par l'absurde que f est minorée par 1 . Donner la limite de f en 0 et conclure.

d) Montrer que f ne peut étre majorée par, 1.

e) Montrer qu'il existe un unique $t_0 > 0$ tel que $f(t_0) = 1$.

f) Résoudre l' équation donnée.

1401. *IMT*. Soit (E) l'équation differentielle $(1-x)y' - y = \dfrac{1}{1-x}$.

a) Résoudre (E) sur $]-\infty; 1[$.

b) Justifier que les solutions de (E) sont développables en série entière au voisinage de 0.

c) Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de rayon de convergence > 0 et solution de (E).

Comment retrouver les coefficients a_n?

1402, CCINP. a) Montrer que $\dfrac{e^{-1/t}}{t} \underset{t \to 0^+}{\longrightarrow} 0$.

En déduire l'existence de l'application $h : x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{e^{-1/t}}{t}\, \mathrm{d}t$.

b) On considère sur $\mathbb{R}^{+*}$ l'équation différentielle $(E) : x^2 y' + y = x$.

Montrer que l'ensemble des solutions est $\left\{x \mapsto \lambda e^{1/x} + e^{1/x} h(x), \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.

c) Montrer que $e^{1/x} h(x) = x \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{1+xu} du$.

Ind. Effectuer le changement de variable $t = \dfrac{x}{1+ux}$.

d) Montrer que $g : x \mapsto x \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{1+xu} du$ est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$.

1403. CCINP, Soit, pour $n \in \mathbb{N}, u_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n t \, \mathrm{d}t$.

Soit (E) l'équation differentielle $\left(x^2 - 1\right) y'' + 3xy' + y = 0$.

On admet que, pour $n \in \mathbb{N}, (n+2)u_{n+2} = (n+1)u_n$.

a) Montrer que $u_n \to 0$ quand $n \to +\infty$.

b) Déterminer le rayon de convergence de $\sum u_{2n} x^{2n}$ et de $\sum u_{2n+1} x^{2n+1}$.

On pose $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_{2n} x^{2n}$ et $g : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_{2n+1} x^{2n+1}$.

c) Vérifier que f et g sont solutions de (E) sur $]-1, 1[$.

d) Soit $x \in]-1,1[$. Montrer que $g(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{x\cos t}{1-x^2\cos^2 t}\,\mathrm{dt}$.

1404. CClNP. Soit $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ definie par $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}$.

a) Montrer que f se prolonge par continuité en $(0,0)$.

b) La fonction f ainsi prolongée est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

1405. $CCINP$. Étudier les extrema locaux et globaux de $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^3 + y^3 - 3xy$.

1406. IMT. Soit $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$. Déterminer les extrema de f sur $\mathbb{R}^2$.

Géométrie-PC

1407. TPE. Tracer l'arc paramétré $(x(t) = 2\cos t - \sin t; y(t) = (2\cos t - \sin t)\,\sin\,t$.

Probabilités-PC

1408. CCINP. Au péage d'une autoroute, 12 guichets sont ouverts.

Les voitures qui se présentent à ce péage se répartissent aléatoirement sur ces guichets, indépendamment les unes des autres. On note X le nombre de voitures arrivant au péage au cours d'une journée et on supppose que X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On note Y le nombre de voitures se présentant au guichet numéro 12.

a) Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant que $(X = n)$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Déterminer la loi de Y ainsi que son espérance.

1409. Navale. Dans un jeu de pile ou face, la probabitité d'obtenir Pile est $p \in]0,1[$.

Soit $r \in \mathbb{N}^*$. On note X le nombre de lancers nécescaires pour obtenir r fois Pile.

Donner la loi de X.

1410. CCINP. Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ.

Déterminer la loi, l 'espérance et la variance de $Y = (-1)^X$.

1411. CCINP Soit X une variable aléatoire à valeurs dans 1'ensemble $\{x_0, \dots, x_n\}$, où les x_i sont des réels distincts. On pose $p_i = \mathcal{P}\,(X = x_i)$.

a) On suppose $n=2$ et $x_i=i$. Calculer les p_i en fonction de $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{E}\left(X^2\right)$.

b) Dans le cas général, calculer les p_i en fonction des $\mathbf{E}\left(X^k\right), k=1\ldots,n$.

1412. *IMT*. Soient $a\in\mathbb{R}$ et $p\in]0,1[$. On pose $q=1-p$.

Soient X et Y deux variables aléatoires entières telles que

$\mathcal{P}(X=k,Y=n)=\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right)a^np^kq^{n-k}$ si $k\leqslant n$, et 0 sinon.

Déterminer la valeur de a, les lois de X et Y.

Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Ind. Utiliser le développement en série entière de $(1-x)^{-(k+1)}$ pour calculer $\displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty}\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right)x^{n-k}$.

1413. Navale. Une pièce tombe sur pile avec la probabilité 2/3. Soit X la variable aléatoire dénombrant les lancers nécessaires à l'obtention de deux piles consécutifs.

a) Calculer $\mathcal{P}(X=2),\mathcal{P}(X=3),\mathcal{P}(X=4)$.

b) Calculer $\mathcal{P}(X=n)$ pour $n\geqslant 2$.

1414. CCINP. On lance une infinité de fois une pièce équilibrée.

On note P_n l'événement « on obtient pile au n-ième lancer» et

F_n l'événement « on obtient face au n-ième lancer» .

On note Y la variable aléatoire donnsnt le premier rang d'apparition de la séquence PPF (le rang est le rang du face), Y étant égal a 0 si cette séquence n'apparait jamais.

On pose $B_n=P_{n-2}\cap P_{n-1}\cap F_n$ si $n\geqslant 3$, $U_n=\displaystyle\bigcup_{n\geqslant 3}B_n$, et $u_n=\mathcal{P}\left(U_n\right)$, avec $u_1=u_2=0$.

a) Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est monotone, et en déduire qu'elle converge. On note ℓ sa limite.

b) Calculer $\mathcal{P}\left(B_n\right)$. Montrer que B_n,B_{n+1} et B_{n+2} sont deux à deux incompatibles.

Calculer u_3,u_4 et u_5.

c) Montrer que $U_n\cap B_{n+1}=U_{n-2}\cap B_{n+1}$. Exprimer $\mathcal{P}\left(U_n\cap B_{n+1}\right)$ en fonction de u_{n-2}.

d) Montrer que $u_{n+1}=u_n+\dfrac{1}{8}\left(1-u_{n-2}\right)$ et calculer ℓ.

e) Calculer $\mathcal{P}(Y=0)$. Commenter.

1415. a) Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}$.

b) Soit X une variable aléatoire à valeurs đans $\mathbb{N}^*$ tq $\mathcal{P}(X=n)=\dfrac{1}{n(n+1)}$ pour $n\in\mathbb{N}^*$.

Montrer que $\mathbf{E}(X)=+\infty$ et que $\mathbf{E}(\ln X)<+\infty$.

1416. Soit (X_k) une suite de variables aléatoires i i d. telle que, pour tout k,

$\mathcal{P}\left(X_k=1\right)=\mathcal{P}\left(X_k=-1\right)=\frac{1}{2}$. On pose, pour $n\in\mathbb{N}^*, S_n=X_1+\cdots+X_n$.

a) Soit $k\in\mathbb{N}^*$. Calculer $\mathbf{E}\left(\sin\left(X_h t\right)\right)$ et $\mathrm{E}\left(\cos\left(X_k t\right)\right)$.

b) Montrer que, pour $n\in\mathbb{N}^*, \mathbf{E}\left(\cos\left(S_n t\right)\right)=(\cos t)^n$.

1417. CCINP. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et de même loi

qui admettent une espérance et une variance. On suppose que $X(\Omega)\subset\mathbb{N}$.

a) Calculer $\mathrm{E}(X-Y)$ et exprimer $\mathrm{V}(X-Y)$ en fonction de $\mathrm{V}(X)$.

b) i) Montrer que $\mathcal{P}(X=Y)=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\mathcal{P}(X=k)^2$.

ii) Calculer $\mathcal{P}(X=Y)$ si X et Y suivant une loi uniforme sur $\{1,2,\ldots,n\}$.

c) Dans cette question, X et Y suivent une loi géométrique de paramétre $p\in]0,1[$.

i) Calculer $\mathcal{P}(X=Y)$.

ii) Déterminer la loi de $Z=X-Y$.

d) Rappeler l'inegalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire canonique dans $\mathbb{R}^n$.

Montrer que, si $X(\Omega)\subset\{1,2,\ldots,n\}$, alors $\mathcal{P}(X=Y)\geqslant\frac{1}{n}$.

e) Montrer que $\mathcal{P}(X=Y)\geqslant 1-2\mathbf{V}(X)$.