RMSCCINP
PSI *
Année 2021

Année -2.

1124. IMT. Soient $m, a, b \in \mathbb{R}$. Résoudre le système $\left\{\begin{array}{r} mx+my+mz+\quad t=a \\ x+my+z+mt=b \end{array}\right.$.

1125. ENSEA. Trouver toutes les matrices $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $A^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1126. CCINP. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 4 .

a) Soit u un endomorphisme de E tel que $\operatorname{rg}(u)=2$ et $u^2=0$.

i) Montrer que $\operatorname{Ker}(u)=\operatorname{Im}(u)$.

ii) Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle u est représenté par $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Soit u un endomorphisme de E tel que $\operatorname{rg}(u)=3$ et $u^4=0$.

i) Montrer que $\operatorname{Ker}\left(u^2\right)=\operatorname{Im}\left(u^2\right)$.

ii) Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle u est représenté par $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1127. CCINP. Soient f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $f+f^3=0$

et A sa matrice dans la base canonique.

a) Montrer que A n'est pas inversible.

b) Montrer que $\mathbb{R}^3=\operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Ker}\left(f^2+I_3\right)$.

c) Montrer que $\operatorname{Ker} f$ n'est pas réduit au vecteur nul.

d) Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1128. CCINP, a) Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^{2n}$ tel que $u^2 = 0$ et $\operatorname{rg} u = n$.

i) Montrer que $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Im} u$.

ii) En déduire qu'il existe une base de $\mathbb{R}^{2n}$ dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^{3n}$ tel que $u^3 = 0$ et $\operatorname{rg}\ u = 2n$.

i) Montrer que $\operatorname{Ker}\ u = \operatorname{Im} u^2$.

ii) En déduire qu'il existe une base de $\mathbb{R}^{3n}$ dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} 0 & I_n & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1129. ENSEA. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) La matrice A est-elle diagonalisable ?

b) Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) En déduire l'expression de A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

d) Retrouver cette expression en observant que $A = I_3 + N$, où N est nilpotente.

1130. IMT. Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ a & 0 & c \\ a & b & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calculer le déterminant de A.

b) À quelle condition A est-elle diagonalisable ?

1131. IMT. Soient E un espace vectoriel de dimension trois, (e_1, e_2, e_3) une base de E.

Pour $a \in \mathbb{C}$, soit $f_a \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f_a(e_1) = f_a(e_3) = ae_1 + e_2 - ae_3$ et $f_a(e_2) = 0$.

a) Donner une base de l'image et du noyau de f_a.

b) Donner la matrice de f_a dans la base (e_1, e_2, e_3).

c) Calculer A^2. Qu'en déduire ?

d) Quelles sont les valeurs propres de f_a ?

Cet endomorphisme est-il inversible ? diagonalisable ?

1132. ENSEA. Soit ψ l'application qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe $P + P'$.

a) Montrer que ψ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Soit M_ψ la matrice représentant ψ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Cette matrice est-elle inversible ?

c) Pour $n = 2$, cette matrice est-elle diagonalisable ?

1133. IMT. Soient $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ vérifiant $A_{1,1} + A_{2,1} = A_{1,2} + A_{2,2} = 1$,

et f l'endomorphisme canoniquement associé.

a) Montrer que si $A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ alors $y_1 + y_2 = x_1 + x_2$.

b) Montrer que $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de f et préciser la valeur propre associée.

c) Montrer que, si V est un vecteur propre non colinéaire à $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$,

alors V est un vecteur propre associé à la valeur propre 1.

1134. CCINP. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

a) La matrice A est-elle diagonalisable ? Déterminer ses éléments propres.

b) Trouver une matrice $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$.

c) Les matrices $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $B^2 = A$ sont-elles diagonalisables ?

1135. Navale. a) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que, si A est inversible,

alors $\chi_{AB} = \chi_{BA}$; montrer que ce résultat reste valable pour A quelconque.

Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie n.

On note E_λ et F_λ les sous-espaces propres de $f \circ g$ et $g \circ f$ associés à λ.

b) Soit λ une valeur propre non nulle de $f \circ g$.

Montrer que λ est une valeur propre de $g \circ f$ puis que $g\left(E_\lambda\right) \subset F_\lambda$ et $f\left(F_\lambda\right) \subset E_\lambda$.

En déduire que E_λ et F_λ sont de même dimension.

1136. CCINP. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & j^2 & j \\ j^2 & j & 1 \\ j & 1 & j^2 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer les valeurs propres de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?

b) Soit $\Phi : M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}) \mapsto AMA \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

Déterminer l'image de Φ ainsi que ses valeurs propres.

1137. CCINP. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonalisable et de rang 1.

On pose $B = \begin{pmatrix} \alpha A & \beta A \\ \gamma A & 0 \end{pmatrix}$ avec $\alpha + \beta = \gamma, \beta + \gamma \neq 0$ et $\beta\gamma \neq 0$.

a) Exprimer le polynôme caractéristique de B à l'aide de celui de A.

Que peut-on en déduire concernant les valeurs propres de B ?

b) Montrer que, si X est dans le noyau de A, $\begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix}$ est dans le noyau de B.

c) Montrer que $\dim(\operatorname{Ker} B) \geqslant 2\dim(\operatorname{Ker} A)$.

c) Montrer que B est diagonalisable.

1138. CCINP. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ mais pas diagonalisable.

b) Donner les droites stables par A.

c) Donner les plans stables par A.

1139. CCINP. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

a) Donner le rang de A ; en déduire la dimension du noyau.

b) La matrice A est-elle diagonalisable ?

c) Que dire de la multiplicité de la valeur propre 0 ?

d) Montrez que A admet trois valeurs propres $0, \lambda, 1-\lambda$.

e) Donnez un polynôme annulateur de A de degré 3 .

1140. CCINP. Dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, soit une matrice M vérifiant les hypothèses suivantes :

$M^4 = 4M^2$, et -2 et 2 sont des valeurs propres de M.

a) Montrer que $\mathrm{Sp}(M) \subset \{-2, 0, 2\}$.

b) La matrice M est-elle diagonalisable ?

1141. CCINP. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $M^2 + M^T = I_n$.

a) Montrer que, si P est un polynôme annulateur de M,

toute valeur propre de M est racine de P.

b) On suppose dans cette question seulement que M est symétrique.

Montrer que M est diagonalisable puis que $\mathrm{tr}(M)\det(M) \neq 0$.

c) Montrer que M est diagonalisable.

d) Montrer que M est inversible si et seulement si 1 n'est pas valeur propre de M.

1142. CCINP. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

a) Calculer le rang de B en fonction du rang de A.

b) Exprimer χ_B en fonction de χ_A.

c) On suppose que A est inversible et possède n valeurs propres distinctes.

Montrer qu'elle est diagonalisable.

d) Le résultat demeure-t-il vrai pour une matrice A diagonalisable non inversible ?

1143. CCINP. a) Énoncer le théorème de Cayley - Hamilton.

b) Soient A, B, C, dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que $AC = CB$ et que $C \neq 0$.

Montrer que pour tout $P \in \mathbb{C}[X], P(A)C = CP(B)$.

c) Montrer qu'un produit de matrices est inversible ssi tous ses facteurs 1 le sont.

En déduire que A et B ont au moins une valeur propre commune.

d) Réciproquement, si A et B ont une valeur propre commune,

montrer qu'il existe une matrice C non nulle telle que $AC = CB$.

1144. CCINP. Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) = \emptyset$.

a) Montrer que, si P est un polynôme annulateur de A,

alors les valeurs propres de A sont racines de P.

b) Montrer que la matrice $\chi_A(B)$ est inversible.

c) Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Prouver : $AX = XB \Leftrightarrow X = 0$.

d) Montrer que, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

il existe une unique matrice $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $AX - XB = M$.

1145. CCINP. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = BA$ et $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

a) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Exprimer $P(M)$ en fonction de $P(A), P'(A)$ et B.

b) Montrer que M est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable et $B = 0$.

1146. CCINP. Soit $\mathcal{D}_n$ l'ensemble des matrices A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\chi_A(T) = \prod_{k=1}^{n}(T - a_{k,k})$.

a) Montrer que toute matrice triangulaire est dans $\mathcal{D}_n$.

b) La matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1 est-elle dans $\mathcal{D}_n$?

c) L'ensemble $\mathcal{D}_n$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

d) Montrer que, si M appartient à $\mathcal{D}_n$, alors $M + aI_n$ appartient à $\mathcal{D}_n$ pour tout réel a.

e) Montrer que toute matrice de $\mathcal{D}_2$ est triangulaire.

f) Exhiber un ensemble infini de matrices de $\mathcal{D}_3$ nilpotentes non triangulaires.

1147. CCINP. Soient E un espace euclidien de dimension n, $(e_1, \ldots, e_n)$

une bon de E et $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille de vecteurs de E telle que $\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2 < 1$.

a) Montrer que, pour tous $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, $\left\|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right\|^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2\right)$.

b) En déduire que la famille $(e_1 + x_1, \ldots, e_n + x_n)$ est une base de E.

1148. *CCINP*. Pour P et Q dans $\mathbb{R}_n[X]$ on pose $\psi(P, Q) = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(1)Q^{(k)}(1)$.

a) Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Soit $E = \{P \in \mathbb{R}_n[X]; P(1) = 0\}$.

Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ et préciser sa dimension.

c) Déterminer la distance à E du polynôme constant égal à 1.

1149. CCINP. a) Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $I_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2}\, \mathrm{d}t$.

On distinguera les cas n pair et n impair. Ind. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\, \mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$.

b) Pour P et Q dans $\mathbb{R}[X]$ on pose $\varphi(P, Q) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2}\, \mathrm{d}t$.

i) Montrer que φ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

ii) Déterminer $d\left(X^3, \mathbb{R}_2[X]\right)$.

1150. IMT. Soient $p \geqslant 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^T A = A A^T$ et $A^p = 0$.

En considérant la matrice $B = A^T A$, montrer que $A = 0$.

1151. CCINP. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telles que $M = \frac{1}{3}(A+2B) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

a) Calculer $AB^T + BA^T$. Ind. Calculer MM^T.

b) Montrer que $A = B$.

1152. CCINP. Soient $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $M = \begin{pmatrix} 1 & -C^T \\ C & I_n \end{pmatrix}$.

a) Calculer $M^T M$. En déduire que M est inversible.

b) Montrer que $M^{-1} M^T$ est une matrice orthogonale.

1153. CCINP. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M \neq I_n$, $M^3 = I_n$ et $M^T M = M M^T$.

a) Montrer que $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

b) Déterminer les matrices vérifiant ces hypothèses dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Analyse

1154. CCINP. Soient $a \in \mathbb{R}$ et, pour $P \in \mathbb{R}[X]$, $N_a(P) = |P(a)| + \displaystyle\int_0^1 |P'(t)|\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que N_a est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.

b) Montrer que, si E est un espace vectoriel réel muni d'une norme N,

si $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ converge vers $x \in E$, alors $N(x_n) \to N(x)$.

c) Pour quelles valeurs de a la suite des $P_n = \left(\frac{X}{2}\right)^n$ est-elle convergente pour N_a ?

1155. CCINP. On note $E = \{f \in \mathcal{C}^1([0,1]), f(0) = 0\}$.

On pose, pour toute fonction $f \in E$:

$N(f)=\|f\|_{\infty}+\|f'\|_{\infty}$ et $N'(f)=\|f+f'\|_{\infty}$.

a) Montrer que N et N' sont des normes sur E.

b) Établir, pour tout $x\in[0,1]$: $e^{x}f(x)=\displaystyle\int_{0}^{x}e^{t}\left(f(t)+f'(t)\right)\mathrm{d}t$.

c) Montrer qu'il existe deux réels α et β tels que : $\forall f\in E, \alpha N'(f)\leqslant N(f)\leqslant \beta N'(f)$.

1156. IMT. a) Montrer que, pour $n\in\mathbb{N}^{*}, l'$ équation

$x-\ln x=n$ admet une unique solution $x_n\in]\,0,1]$.

b) Montrer que $x_n\to 0$ puis que $x_n\sim e^{-n}$.

c) Obtenir un développement asymptotique de x_n.

1157. IMT. a) Montrer que, pour $n\in\mathbb{N}^{*}$, l'équation $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}x^{k}=1$

admet une unique solution dans $[0,1]$. On la note a_n.

b) Montrer que la suite (a_n) est décroissante et minorée par $1/2$.

c) Montrer que la suite (a_n) converge et déterminer sa limite.

1158. IMT. Déterminer la nature de la série de terme général $\sin\left(\pi(\sqrt{2}+1)^{n}\right)$.

1159. CCINP. a) Montrer que, pour x dans un domaine D à préciser, $\tan(2x)=\dfrac{2\tan x}{1-\tan^{2}x}$.

b) Montrer que $\pi=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n}}{2n+1}(\sqrt{2}-1)^{2n+1}$.

1160. Navale. Déterminer la nature de la série de terme général $\ln\left(1+\frac{(-1)^{n}}{\sqrt{n(n+1)}}\right)$.

1161. CCINP. Soit (u_n) la suite définie par $u_0\in]\,0,\pi\,[$ et, pour $n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=\sin u_n$.

a) Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

b) Montrer que la série de terme général u_n^{3} converge. Ind. Considérer $u_{n+1}-u_n$.

c) Montrer que la série de terme général u_n^{2} diverge. Ind. Considérer $\ln(u_{n+1})-\ln(u_n)$.

1162. ENSEA. Soit, pour $n \geqslant 2, u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$.

a) Montrer que $u_n = v_n - \dfrac{1}{n} + \dfrac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} + o\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ avec $v_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

b) Déterminer la nature des séries $\sum v_n$ et $\sum u_n$.

c) Montrer que $v_n \sim u_n$. Conclusion ?

1163. CCINP. Soient (a_n) une suite positive et (u_n) la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}^{+*}$ et,

pour $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{u_n + \sqrt{u_n^2 + a_n^2}}{2}$.

a) Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \leqslant \dfrac{a_n}{2}$.

b) Montrer que, si la série de terme général a_n converge, alors la suite (u_n) converge.

c) La réciproque est-elle vraie ? Ind. Considérer $u_n = \dfrac{n}{n+1}$.

1164. IMT. On cherche les applications f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant (*) :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \dfrac{f(x+n) - f(x)}{n}$.

a) Soit f vérifiant (*).

i) En considérant des valeurs particulières de n, montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f'(x+1)$.

ii) Montrer que $\displaystyle\int_x^{x+1} f'(t)\mathrm{d}t$ ne dépend pas de x, puis que f' est constante.

b) Donner toutes les solutions du problème posé.

1165. CCINP. On cherche les fonctions $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant la condition (E) :

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x)f(y) = \displaystyle\int_{x-y}^{x+y} f(t)\mathrm{d}t$.

b) Soit $F : (x, y) \mapsto \displaystyle\int_{x-y}^{x+y} f(t)\mathrm{d}t$.

Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$ et calculer $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}$.

c) Soit f une solution de (E). Calculer $f(0)$ et $f''(x)f(y) - f(x)f''(y)$.

En déduire l'ensemble des solutions de (E).

1166. IMT. Justifier l'existence puis calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} (1 - t\arctan(1/t))\mathrm{d}t$.

1167. ENSEA. Soient $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\mathrm{d}x$ et $J = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\cos x)\mathrm{d}x$.

a) Justifier l'existence de I et de J.

b) Montrer que $I = J$.

c) Calculer $I + J$; en déduire la valeur de I.

1168. CCINP. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a \in [0, 1]$. Pour $x \in]0, 1]$, on pose $f_n(x) = \dfrac{1 - e^{-nx}}{x^a\,(1 + x^2)}$.

a) Montrer que (f_n) converge simplement vers une fonction que l'on précisera.

b) Existe-t-il des valeurs de a pour lesquelles il y a convergence uniforme sur $]0, 1]$?

c) Montrer que l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$ est convergente pour tout $a \in [0, 1]$.

d) Pour $a \in [0, 1\,[$, montrer que la suite (I_n) converge et déterminer sa limite.

e) Qu'en est-il pour $a = 1$?

1169. CCINP. Soit $F : x \mapsto -\displaystyle\int_0^x \frac{\ln(1 - t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

a) Déterminer le domaine de définition de F.

b) Montrer que, pour tout $x \in [0, 1], F(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$.

c) Montrer que, pour tout $x \in [0, 1], F(x) + F(1 - x) = \dfrac{\pi^2}{6} - \ln(1 - x)\ln(x)$.

On admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et on pourra procéder par intégration par parties.

1170. CCINP. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}, a_n = \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1 + t^2}{2}\right)^n\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

b) Montrer que la série $\sum(-1)^n a_n$ converge.

c) On note respt R et f le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum a_n x^n$.

i) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \geqslant \dfrac{1}{2n+1}$.

ii) En déduire la valeur de R.

iii) Trouver une équation différentielle vérifiée par f.

1171. CCINP. Soit f définie sur $I =]0,1[$par $f(x) = \dfrac{\ln x}{x-1}$..

a) Vérifier que f est prolongeable par continuité en 1.

b) Justifier l'intégrabilité de f sur I.

c) Donner, au voisinage de 1 , un développement de f en série entière.

d) Calculer l'intégrale de f sur I.

1172. CCINP. Soient $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+xt)}{t}\,\mathrm{d}t$ et D son domaine de définition.

a) Montrer que $]-1,1[\subset D$.

b) Trouver un développement en série entière de F.

c) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$.

d) Fournir une expression simple de F' sur $[0,1[$.

e) Proposer une autre méthode pour aboutir à ce résultat.

1173. CCINP. On souhaite montrer l'égalité $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t^2)\ln(1-t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n(2n-1)^2}$.

a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t^2)\ln(1-t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

b) Donner le développement en série entière de $\ln(1-t)$ et transformer le problème en un problème d'interversion intégrale/somme.

c) Calculer l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^1 \ln\left(t^2\right) t^{2n-2}\,\mathrm{d}t$.

d) En déduire l'égalité demandée.

1174. ENSEA. Déterminer les solutions de $xy'' - (x+1)y' + y = 0$ dse.

1175. CCINP. On considère l'équation différentielle $(E) : \left(x^2-1\right)y'' + 2xy' - 2y = 0$.

a) Déterminer les solutions polynomiales de (E).

b) Trouver une équation différentielle (E^*) vérifiée par $x \mapsto z(x) = xy(x)$.

c) Chercher a, b et c tels que $\dfrac{2-4x^2}{x\left(x^2-1\right)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x-1} + \dfrac{c}{x+1}$.

d) Résoudre (E^*) ; en déduire toutes les solutions de (E).

1176. CCINP. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

a) La matrice A est-elle diagonalisable ?

b) Montrer que A est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

c) Donner les solutions du système différentiel $\left\{\begin{array}{l} x' = -x-4y \\ y' = x+3y. \end{array}\right.$

1177. IMT. On considère le système

$(S) : \left\{\begin{array}{l} x' = y - z \\ y' = z - x \\ z' = x - y \end{array}\right.$ avec les conditions initiales $x(0) = \ 1$ et $y(0) = z(0) = 0$.

a) Existence et unicité des solutions de (S).

b) Montrer que si (x, y, z) est une solution,

alors $x+y+z$ et $x^2+y^2+z^2$ sont des fonctions constantes.

Que peut-on en déduire pour la trajectoire ?

c) Résoudre (S).

1178. CCINP. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $f(x,y) = xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ si$(x,y) \neq (0,0), f(0,0) = 0$.

a) Montrer que f est continue.

b) Exprimer les dérivées partielles de f.

c) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.

d) Calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. Qu'en déduire ?

Probabilités

1179. IMT. On estime qu'il y a une chance sur 10^6 pour qu'un élève soit un génie.

On dispose d'un échantillon de 500000 élèves.

Soit X le nombre d'élèves qui sont des génies.

a) Quelle est la loi de X ?

b) Par quelle autre loi peut-on approcher X ?

1180. CCINP. Une urne contient N boules, r blanches et $N-r$ noires.

On effectue des tirages successifs sans remise, jusqu'à épuisement des boules blanches.

Soit X le nombre de tirages nécessaires.

a) Identifier la loi de X et donner son espérance pour $r=1$ et pour $r=N$.

b) Dans la suite, r est quelconque, compris entre 1 et N.

i) Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire X ?

ii) Montrer que, pour de telles valeurs de $k, \mathbf{P}(X=k) = \begin{pmatrix} k-1 \\ r-1 \end{pmatrix} / \begin{pmatrix} N \\ r \end{pmatrix}$.

c) Soient p et q dans $\mathbb{N}^*$. Trouver une relation liant $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} p-1 \\ q-1 \end{pmatrix}$.

En déduire que $\mathbf{E}(X) = \dfrac{r(N+1)}{r+1}$.

1181. CCINP. Dans une urne contenant n tickets dont p gagnants,

un joueur tire avec remise p tickets.

a) Calculer la probabilité $P(n,p)$ pour que le joueur tire au moins un ticket gagnant.

b) On suppose $p=\sqrt{n}$. Calculer la limite lorsque p tend vers l'infini de $P\left(p^2,p\right)$.

On donne $n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$.

c) Reprendre les questions précédentes lorsque le joueur tire p tickets sans remise.

1182. CCINP. On dispose d'une urne qui contient trois jetons numérotés $1,2,3$, et dans laquelle on effectue des tirages avec remise. Soient Y la variable aléatoire correspondant au numéro du tirage où l'on obtient pour la première fois un chiffre différent du premier chiffre obtenu et Z la variable aléatoire correspondant au numéro du tirage où l'on obtient pour la première fois un troisième chiffre.

a) Déterminer la loi de Y.

b) Quelle est la loi de $Y-1$? En déduire l'espérance et la variance de Y.

c) Déterminer la loi de (Y,Z).

d) En déduire la loi de Z.

1183. CCINP. Une urne contient a boules blanches et b boules noires.

On réalise n tirages avec remise.

a) Soit B_i l'événement «on tire i boules blanches». Calculer $\mathbf{P}\left(B_i\right)$.

b) Montrer que $\displaystyle\sum_{i=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2i}x^{2i}=\frac{(1+x)^n+(1-x)^n}{2}$.

c) Calculer la probabilité de tirer un nombre pair de boules blanches.

1184. a) Soient $c\in\mathbb{R}^+$et X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que,

pour $k\in\mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(X=k)=\dfrac{c}{k(k+1)}$.

Trouver a, b tels que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+1}$.

En déduire la valeur de la constante c.

b) Jacques et Isabelle jouent à un jeu.

Si X prend une valeur paire k, Isabelle donne k euros à Jacques ;

si X prend une valeur impaire k, Jacques donne k euros à Isabelle.

Déterminer l'espérance de gain de Jacques.

1185. CCINP. On considère deux variables aléatoires X_1 et X_2 indépendantes

et suivant toutes deux la loi binomiale de paramètres n et $1/2$.

Pour tout $\omega \in \Omega$ on pose $M(\omega) = \begin{pmatrix} X_1(\omega) & 1 \\ 0 & X_2(\omega) \end{pmatrix}$.

Il s'agit de déterminer la probabilité que $M(\omega)$ soit diagonalisable.

a) En développant de deux manières le polynôme $(1+X)^{2n}$,

montrer l'égalité $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

b) Conclure.

1186. CCINP. Soit $p \in]0,1[$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$ on pose $p_k = p^2 k(1-p)^{k-1}$.

a) Montrer que $(p_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ définit une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^*$.

b) Soit X une variable aléatoire telle que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbf{P}(X = k) = p_k$.

Justifier l'existence et déterminer la valeur de $\mathbf{E}(X-1)$ puis de $\mathbf{E}((X-1)(X-2))$.

c) En déduire l'existence et la valeur de $\mathbf{E}(X)$ et de $\mathrm{V}(X)$.

1187. CCINP. a) Pour $r \in \mathbb{N}^*$, donner le développement en série entière au

voisinage de 0 de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ et de $x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)^r}$, ainsi que le rayon de convergence.

b) Soient $p \in]0,1[$ et $q = 1 - p$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $p_k = \begin{pmatrix} k+r-1 \\ k \end{pmatrix} p^r q^k$.

Montrer que la suite $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définit bien une loi de probabilité sur $\mathbb{N}$.

c) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que : $\forall k \in \mathbb{N}, \mathbf{P}(X = k) = p_k$.

Déterminer la fonction génératrice de X.

d) En déduire l'espérance et la variance de X.

1188. CCINP. Un secrétaire doit joindre par téléphone n clients. Il les appelle un par un, les appels étant indépendants, et la probabilité qu'un client donné décroche est p. Soient $q = 1-p$ et X la variable aléatoire égale au nombre de clients joints après une série d'appels.

a) Déterminer la loi de X. Préciser $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{V}(X)$.

Le secrétaire passe ensuite des appels aux clients qui n'ont pas été joints lors de la première vague d'appels. Soient Y et Z les variables aléatoires égales au nombre de clients joints lors de la deuxième vague d'appels et au nombre total de clients joints.

b) i) Exprimer Z à l'aide de X et Y. Préciser les valeurs possibles pour la variables Z.

ii) Calculer $\mathbf{P}(Z = 0)$. Montrer que $\mathbf{P}(Z = 1) = npq^{2n-2}(1 + q)$.

iii) Soient $k \in [\![0, n]\!]$ et $h \in [\![0, k]\!]$.

Exprimer $\mathbf{P}(Y = h \mid Z = k)$.

iv) Soit $s \in [\![0, n]\!]$. Montrer que $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n-k \\ s-k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ k \end{pmatrix}$ pour tout k.

Montrer que $\mathbf{P}(Z = s) = \begin{pmatrix} n \\ s \end{pmatrix} (1 - q^2)^s (q^2)^{n-s}$ En déduire la loi de Z.

1189. CCINP. Soient $(p_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'éléments de $[0,1], (X_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes, telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, X_n$ suit la loi de Bernoulli de paramètre p_n. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*, \bar{p}_n = \dfrac{p_1 + \cdots + p_n}{n}$. Soit $\varepsilon > 0$.

a) Montrer que $\mathbf{P}\left(\left|\frac{X_1+\cdots+X_n}{n} - \bar{p}_n\right| \geqslant \varepsilon\right) \to 0$.

b) On suppose que $\bar{p}_n \to p$. Montrer que $\mathbf{P}\left(\left|\frac{X_1+\cdots+X_n}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \to 0$.

1190. CCINP. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$, de même loi, admettant un moment d'ordre deux, telles que $Z = X + Y + 1$ suive la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.

a) Déterminer l'espérance et la variance de X en fonction de p.

b) Déterminer la fonction génératrice de X. En déduire la loi de X.

1191. IMT. Soit $f : t \mapsto \dfrac{t}{2 - t^2}$.

a) Développer f en série entière, préciser le rayon de convergence.

b) Donner la loi d'une variable aléatoire X dont la fonction génératrice est f.

c) Calculer l'espérance de X.

d) Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y = \frac{X}{2}$.

; 1192. CCINP. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\{0, \ldots, n\}$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

telle que pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}, \mathbf{P}(X = k) = \frac{a}{k+1} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$.

a) Soit $k \in \{1, \ldots, n\}$. Déterminer α tel que $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} n-1 \\ k-1 \end{pmatrix}$.

b) Déterminer a.

c) Calculer l'espérance de X.

d) Calculer la variance de X.