RMS Mines
PSI *
Année 2019

Année -2.

Attention aux erreurs de frappes...

—ⓒ cours.

—♠ dur.

—♢ fondamental.

—♡ j'adore.

Algèbre 631. Soit (E) l'équation d'inconnue $P \in \mathbb{R}_n[X]$ définie par $P(\cos x) = \cos(P(x))$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

a) Trouver les solutions de (E) de degré 0.

b) Trouver les solutions de (E) de degré 1.

c) Résoudre (E).

632. $\diamondsuit$. a) Montrer que $\dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = n(n+1)/2$.

b) Est-ce que l'ensemble des matrices nilpotentes est un espace vectoriel ?

c) Soit $\mathcal{N}$ un sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ composé de matrices nilpotentes.

Montrer que $\dim \mathcal{N} \leqslant n(n-1)/2$.

d) Peut-on avoir $\dim \mathcal{N} = n(n-1)/2$?

633. ⓒ .Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $2 \leqslant k \leqslant n$ et $A_k = \left(a_{ij}^{(k)}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in M_n(\mathbb{R})$

telle que $a_{ij}^{(k)} = 1$ si $i - j = k - 1$, les autres coefficients étant nuls.

a) Calculer $A_k^T A_k$.

Soit p un projecteur de $\mathbb{R}^n$ tel que $p \neq \mathrm{id}$.

b) Démontrer que le rang de p est strictement inférieur à n.

c) Démontrer que p est la composée de deux endomorphismes nilpotents.

634. On note $\mathcal{H}$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ forme des matrices de trace nulle et $\mathcal{N}$

l'ensemble des matrices nilpotentes de $M_n(\mathbb{C})$.

a) Les ensembles $\mathcal{H}$ et $\mathcal{N}$ sont ils des sous-espaces vectoriels ?

b) Montrer que $\mathcal{H} = \mathrm{Vect}(\mathcal{N})$.

635. Soient $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ et $f \in \mathbb{C}[X], P \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k P(X+k)$.

Donner une CNS sur $(a_0, \ldots, a_n)$ pour que f soit un isomorphisme.

636. © .Soient E et F deux espaces vectoriels et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

On dit que $v \in \mathcal{L}(F, E)$ vérifie $(*)$ si $u \circ v \circ u = u$ et $v \circ u \circ v = v$.

a) Montrer que si $v \in \mathcal{L}(F, E)$ vérifie $(*)$, alors $E = \mathrm{Im} v \oplus \operatorname{Ker} u$ et $F = \mathrm{Im}\, u \oplus \operatorname{Ker} v$.

b) Soient E_1 un supplémentaire de Ker u dans E et F_1 un supplémentaire de Im u dans F.

Montrer qu'il existe un unique $v \in \mathcal{L}(F, E)$ vérifiant à la fois $(*)$ et $E_1 = \mathrm{Im}\, v, F_1 = \operatorname{Ker} v$.

637. ♠. Soit S_n l'ensemble des bijections de $[\![1, n]\!]$ dans lui-même.

a) Rappeler le cardinal de S_n.

b) Soit $\sigma \in S_n$. Montrer que l'application $f \mapsto f \circ \sigma$ réalise une bijection de S_n sur S_n.

c) Soit E un espace vectoriel de dimension n et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

On note pour $\sigma \in S_n, f_\sigma$ le seul endomorphisme de E vérifiant $f_\sigma\,(e_i) = e_{\sigma(i)}$ pour tout i.

Montrer que l'application $p = \dfrac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} f_\sigma$ est un projecteur de E

dont on précisera le noyau et l 'image.

638.©. Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$;

a) Montrer que la suite $\left(\operatorname{Ker}\left(u^k\right)\right)_{k \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante pour l'inclusion jusqu'à un

certain rang $r \leqslant n$ au-delà duquel elle est constante.

Que dire de la suite $\left(\operatorname{Im}\left(u^{k}\right)\right)_{k \in N}$?

b) Montrer que $\operatorname{Im}\left(u^{k}\right)$ est stable par u pour tout $k \in \mathbb{N}$.

c) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\operatorname{rg}\left(u^{k}\right)-\operatorname{rg}\left(\mathrm{u}^{k+1}\right)=\operatorname{dim}\left(\operatorname{Im}\left(u^{k}\right) \cap \operatorname{Ker} u\ \right)$

639. Soit $E=\mathcal{M}_{2}(\mathbb{R})$ et D une application de E dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$\forall A, B \in E, D(A B)=D(A) D(B)$ et $D\left(I_{2}\right) \neq D\left(E_{2,1}+E_{1,2}\right)$.

a) Montrer que si $A \in E$ est nilpotente alors $D(A)=0$.

b) Montrer que $A \in E$ est inversible si, et seulement si, $D(A) \neq 0$.

640. ©. a) Soit $M \in \mathcal{M}_{2}(\mathbb{C})$. Pour tout $n \in \mathrm{N}$, on pose $E_{n}=\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{M^{k}}{k!}$.

Montrer que la suite $\left(E_{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

b) Montrer que pour tout $A \in G L_{2}(\mathbb{C})$, il existe $B \in \mathcal{M}_{2}(\mathbb{C})$ telle que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{B^{k}}{k!} \underset{n \rightarrow+\infty}{\longrightarrow} A$.

641. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie.

Un endomorphisme u de E est d'ordre $k \in \mathbb{N} \backslash\{0\}$ si $u^{k}=\mathrm{id}$ et si,

pour tout $i \in\{1, \ldots, k-1\}, u^{i} \neq I d$.

a) Que dire en termes de réduction des endomorphismes d'ordre $k \geqslant 1$?

b) Préciser les ordres possibles pour une matrice carrée de taille 2 à coefficients entiers.

$642, a)$. Soient $A, B \in M_{n}(\mathbb{R})$ telles que $A^{2}=B^{2}=0$ et $\operatorname{rg}(A)=\operatorname{rg}(B)$.

Montrer que les matrices A et B sont semblables.

b) Le résultat subsiste-t-il avec les hypothèses $A^{3}=B^{3}=0$ et $\operatorname{rg}(A)=\operatorname{rg}(B)$?

643. $\diamondsuit$. Soit $u \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^{3}\right)$ non nul tel que $u^{3}=u^{2}$ et $C(u)=\left\{v \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^{3}\right),\ u \circ v=v \circ u\right\}$.

Montrer que $C(u)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^{3}\right)$ et déterminer sa dimension.

644. © Soit $A \in \mathcal{M}_{n}(\mathbb{C})$ et φ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n}(\mathbb{C})$ défini par $M \mapsto M+\operatorname{tr}(A M) A$.

a) Étudier la diagonalisabilité de φ.

b) Calculer $\mathrm{tr}(\varphi)$ et $\det(\varphi)$.

645. Pour $c \in \mathbb{R}$, on note $A(c) = \begin{pmatrix} -c & -1 & c \\ -1 & 1-c & 1 \\ c & -1 & -c \end{pmatrix}$.

a) Déterminer les réels c tels que $A(c)$ ne soit pas diagonalisable.

b) Soit d la plus petite de ces valeurs.

Trouver P inversible telle que $P^{-1}A(d)P$ soit triangulaire.

646. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{pmatrix}$ où $j = e^{2i\pi/3}$.

a) La matrice A est-elle diagonalisable ?

b) Déterminer le nombre de sous-espaces stables par A.

c) Soit $\mathcal{A} = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}), AM = MA\}$.

Déterminer la dimension de $\mathcal{A}$.

647.♠♠. Soient $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $D : E \to E$ vérifiant :

$\forall f \in E, \forall x \in \mathbb{R}, D(f)(x) = xf'(x)$.

a) Montrer que D est un endomorphisme et préciser son noyau.

b) Determiner l'ensemble des valeurs propres de D.

c) Quelle est l'image de D ?

648. a) Soit $x = \cos(2\pi/5)$. Déterminer une équation du second degré dont x est racine

puis déterminer les valeurs de $\cos(2\pi/5)$ et $\cos(4\pi/5)$.

b) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^4 + A^3 + A^2 + A + I_n = 0$.

On suppose que la trace de A est un rationnel. Montrer que 4 divise n.

649.©. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice telle que $A^3 = A + I_n$.

Montrer que $\det A > 0$.

650. Soient $n \in \mathbb{N}$, $(a_0, ..., a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$.

a) Déterminer le polynome caractéristique χ_A de A.

b) Montrer que χ_A divise tout polynôme annulateur de A.

c) Donner une CNS pour que A soit diagonalisable.

651. Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie.

On suppose que $f^2 = -id_E$.

a) Donner un exemple d'un tel endomorphisme.

b) Que dire des valeurs propres de f ?

c) Montrer que la dimension de E est paire.

d) Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale par blocs,

de la forme $\operatorname{diag}(A, \ldots, A)$, où $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

652. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ définie par : $A_{i,i} = 0$ pour tout i et $A_{i,j} = i$ si $i \neq j$.

a) Montrer qu'un réel λ est valeur propre de A si et seulement si $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k+\lambda} = 1$.

b) En déduire que A est diagonalisable.

Lister les valeurs propres de A avec un encadrement le plus précis possible.

c) Déterminer la somme des valeurs propres de A. On note μ_n la plus grande d'entre elles.

Trouver $C \in \mathbb{R}$ tel que $\mu_n \sim Cn^2$ quand n tend vers l 'infini.

653. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$ on pose $u(P) = \dot{n}XP + \left(1 - X^2\right) P'$.

a) Soit $P_k = (X+1)^k$. Calculer $u\left(P_k\right)$ et montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ n & 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ 0 & n-1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & n \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

En utilisant la question précédente, montrer que A est diagonalisable et préciser son spectre.

654. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E tel que,

pour tout $x \in E$, il existe $\lambda_x, \mu_x \in \mathbb{C}$ vérifiant $u^2(x) = \lambda_x u(x) + \mu_x x$.

a) Montrer que u admet au plus deux valeurs propres.

b) Montrer que, pour tout $x \in E$ non nul, $\mathrm{Vect}(x, u(x))$ est stable par u.

Préciser la dimension de ce sous-espace.

c) On suppose que u admet une unique valeur propre α.

Que dire de λ_x et μ_x ?

655. Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et $p \in \mathbb{N}^*$.

Soient $u, v_1, \ldots, v_p$ des endomorphismes de E non nuls, $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ distincts.

On suppose $\forall n \in \{1, \ldots, p\}, u^n = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i^n v_i$.

a) Montrer que : $\forall P \in \mathbb{R}_p[X], P(0) = 0 \Rightarrow P(u) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} P(\lambda_i)\, v_i$.

b) Prouver qu'il existe une base $(L_1, \ldots, L_p)$ de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$ telle que :

$\forall (i,j) \in \{1, \ldots, p\}^2, L_i(\lambda_j) = \delta_{j,j}$.

c) Montrer que $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\} \subset \mathrm{sp}(u) \subset \{0, \lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$.

656.©. Soient p un projecteur d'un espace vectoriel E de dimension n et

$\varphi : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E)$, $g \mapsto (g \circ p + p \circ g)/2$.

Montrer que φ est diagonalisable et préciser ses espaces propres.

657. © . Soit E un espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme nilpotent de E.

a) Montrer que $\det(u + Id) = 1$.

b) Soit v un automorphisme de E tel que $u \circ v = v \circ u$. Montrer que $\det(u + v) = \det(v)$.

c) Soit f un endomorphisme de E qui s'écrit comme somme d'un endomorphisme

diagonalisable d et d'un endomorphisme nilpotent n qui commutent.

Montrer que $\det(f) = \det(d)$.

658. Soit A une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients diagonaux deux à deux distincts.

a) Décrire $C(A)$, l'ensemble des matrices qui commutent avec A.

b) Montrer que $C(A) = \mathbb{R}_{n-1}[A]$, polynômes en A de degré inférieur ou égal à $n - 1$.

c) Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E de dimension n.

On suppose que le polynôme caractéristique de u est scindé à racines simples.

Montrer qu'il existe une base de E constituée de vecteurs propres de u.

En déduire une condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme v

quelconque commute avec u.

d) Que peut-on retrouver ainsi concernant A ?

659. Soient $A, B \in \mathcal{M}_{\mathrm{n}}(\mathbb{C})$ et $\beta \in \mathbb{C}^*$ tels que $AB - BA = \beta B$.

a) Montrer que A admet un vecteur propre x puis que la suite de vecteurs $\left(B^k x\right)_k$

est nulle à partir d'un certain rang.

b) En déduire que A et B admettent un vecteur propre commun.

c) On suppose maintenant que $AB - BA = \alpha A + \beta B$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^*$.

Montrer que A et B ont un vecteur propre commun.

660. Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et T l'endomorphisme de E associant à une suite u la suite w définie par :

$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \dfrac{1}{n+1} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k.$

Trouver les eléments propres de T.

661. $\heartsuit, \diamondsuit,$ ©. On considère $E = M_n(\mathbb{C}), A, B \in E$ et les endomorphismes de

$E, u : M \mapsto AM$ et $v : M \mapsto MB$.

a) Montrer que u est un automorphisme si, et seulement si, A est inversible. Que dire pour v?

b) Montrer que u est diagonalisable si, et seulement si, A est diagonalisable.

Que dire pour v?.

c) On suppose A et B diagonalisables.

Montrer que l'application $\varphi : M \mapsto AMB$ est diagonalisable.

Que dire de la réciproque ?

662. © .Soient $A \in M_n(K)$ et $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(K)$.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur A pour que B soit diagonalisable.

663.$\spadesuit$. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. On suppose que la matrice $B = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & A \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

Montrer que A est diagonalisable et que $I_n - A$ est inversible.

664. Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel E de dimension finie.

a) On suppose u inversible.

Montrer que u est diagonalisable si, et seulement si, u^2 est diagonalisable.

b) Dans le cas général, montrer que u est diagonalisable si, et seulement si,

u^2 est diagonalisable et $\mathrm{Ker} u^2 = \mathrm{Ker} u$.

665. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On suppose qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(A)$ est diagonalisable et $P'(A)$ est inversible.

Montrer que A est diagonalisable.

666. Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.

Soit $F \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$ tel que $\forall u \in \mathcal{L}(E), F(u) = f \circ u$.

a) Montrer que F est diagonalisable si et seulement si f l'est.

Dans ce cas, donner une relation entre les dimensions de $E_\lambda(f)$ et $E_\lambda(F)$.

b) Montrer que f et F ont les mêmes valeurs propres.

c) Tout élément de $\mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$ s'écrit-il sous la forme $u \mapsto f \circ$ u?

667. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ possédant n valeurs propres distinctes notées $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

On note $v_1, \ldots, v_n$ des vecteurs propres de M respectivement associés à $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

a) Montrer que M^T est diagonalisable et a les mémes valeurs propres que M.

On note $w_1, \ldots, w_n$ des vecteurs propres de M^T respectivement associés à $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

b) Montrer que, pour tout $(i, j) \in \{1, \ldots, n\}^2$ tel que $i \neq j, \quad w_i^T \cdot v_j = 0$

et pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}, w_i^T \cdot v_i \neq 0$.

c) Pour $k \in \{1, \ldots, n\}$, on note $B_k = \frac{1}{w_k^T - v_k}\left(v_k \cdot w_k^T\right)$.

Montrer que, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}, B_k$ est diagonalisable.

d) Pour $r \in \mathbb{N}$, on pose : $G_r = \displaystyle\sum_{k=1}^n \lambda_k^r B_k$. Déterminer G_r.

668. Soit E un espace euclidien de dimension 4 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ une base

orthonormale de E.

Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur Vect

$(e_1 + e_2 + e_3 + \ e_4, 2e_2 + 3e_4)$ dans la base B.

669. On pose pour tout $k \in \mathbb{N}^*, I_k = \inf\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \left(\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(x^k - ax - b\right)^2 e^{-x}\, \mathrm{d}x\right)$.

Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}, I_k$ existe, est atteint, et calculer sa valeur.

670. Soit E l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour f et g dans E on pose :

$\varphi(f,g)=\displaystyle\int_0^1 \big(f(t)g(t)+f'(t)g'(t)\big)\,\mathrm{dt}.$

a) Montrer que φ est un produit scalaire sur E.

b) Soit $V=\{f\in E \mid f(0)=f(1)=0\}$ et $W=\{f\in E \mid f=f''\}$.

Monter que V et W sont supplémentaires et orthogonaux.

c) Determiner la projection orthogonale de $f\in E$ sur V.

671. a) Existence et calcul de $I_n=\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,\mathrm{dt}.$

b) Montrer que I'application $(P,Q)\mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n(X)$.

c) Pour $k\in\mathbb{N}^*$, on note $\Pi_k=\displaystyle\prod_{i=1}^{k}(X+i)$ et on pose $\Pi_0=1$.

Montrer qu'il existe $p_0,\ldots,p_n\in\mathbb{R}$ tels que $(X-1)\ldots(X-n)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}p_k\Pi_k$. Calculer p_0.

d) Montrer que $P=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}p_kX^k$ est orthogonal à $\mathrm{Vect}\,(X,\ldots,X^n)$.

e) Calculer la distance de 1 à Vect($X,\ldots,X^n$).

f) Calculer la distance de X^n à $\mathrm{Vect}\,\big(1,\ldots,X^{n-1}\big)$.

672. Soit E un espace euclidien et f une application de E dans E vérifiant

$f(0)=0$ et $\forall (x,y)\in E^2, \|f(x)-f(y)\|=\|x-y\|$.

a) Montrer que, pour tout $x\in E$, on a $\|f(x)\|=\|x\|$.

b) Montrer que, pour tout $x\in E$, on a $f(-x)=-f(x)$.

c) Montrer que, pour tous $x,y\in E$, on a $\langle f(x),f(y)\rangle=\langle x,y\rangle$.

d) Montrer que f est un automorphisme orthogonal.

673. Soient $(E,<,>)$ un eve et $(e_i)_1^n$ une base orthonormée de E.

Soit $f\in\mathcal{L}(E)$ tel que : $\forall (x,y)\in E^2, \langle x,y\rangle=0 \Longrightarrow \langle f(x),f(y)\rangle=0$.

a) Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \|f(e_i)\| = c$.

b) Montrer qu'il existe $g \in \mathcal{O}(E)$ tel que $f = cg$.

674. a) Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme T_n tel que,

pour tout $\theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.

b) Calculer T_0,T_1 puis, montrer que, pour tout $n \geqslant 1, T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$.

En déduire le degré et le coefficient dominant de T_n.

c) Montrer que l'application $(P, Q) \mapsto \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ dt est un produit scalaire sar $\mathbb{R}[X]$.

d) Montrer que la famille $(T_n)_n$ est orthogonale pour ce produit scalaire.

675. a) Montrer que l'application $(A, B) \mapsto \operatorname{tr}\left(A^T B\right)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

b) Montrer que l'ensemble V des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

c) Déterminer une base orthonormée de $V^\perp$.

d) Calculer la distance de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ à V.

676. On considère sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'application $(M, N) \mapsto \operatorname{tr}\left(N^T M\right)$.

a) Montrer que cette application est un produit scalaire.

b) Soit H le sous-espace des matrices de trace nulle et J la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1. Calculer la distance de J à H.

677. Soit $a \in \mathbb{R}$. On munit $\mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire défini par $< P, Q >= \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(a) Q^{(k)}(a)$.

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

Calculer $inf\,\{\|P - Q\|, Q \in \mathbb{R}_n[X] \text{ tel que } Q(a) = 0\}$.

678. a) Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. Montrer que l'application $(P, Q) \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$

est correctement définie puis qu'il s'agit d'un produit scalaire sur E.

b) Soit $(P_0, \ldots, P_n)$ l'orthonormalisée de Gram-Schmidt de la base canonique de E.

Calculer $P_{\mathrm{k}}(0)^2$.

c) Soit F le sous-espace de E constitué des polynômes nuls en 0 .

Déterminer $F^{\perp}$ puis la distance du polynôme 1 à F.

679. Soit E un espace enclidien et u un endomorphisme symétrique de E de trace nulle.

Montrer qu'il existe une base orthonormée dans laquelle la matrice de u est à diagonale nulle.

680. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire défini par$\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t) Q(t)$ dt.

a) Montrer que l'on definit un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}_n[X]$ en posant

$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], f_n(P) = \frac{1}{2}\left(X^2-1\right) P'' + X P' - P.$

Que peut-on dire de plus concernant f_n?

b) On pose $T_0 = 1$ puis, pour $j \in [1, n], T_j = X^j - P_{j-1}\left(X^j\right)$ où

P_{j-1} désigne la projection orthogonale sur $\mathbb{R}_{j-1}[X]$.

Montrer que $(T_0, \ldots, T_n)$ est une base orthogonale de vecteurs propres de f_n et

préciser les valeurs propres correspondantes.

681. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $S_n^{+}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de taille n

dont toutes les valeurs propres sont positives.

a) Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$. Montrer que $S \in S_n^{+}(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^t X S X \geqslant 0$.

b) Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $S = A^t A$. Montrer que $S \in S_n^{+}(\mathbb{R})$.

Réciproquement, montrer que toute matrice $S \in S_n^{+}(\mathbb{R})$ peut s'écrire sous la forme

$S = A^t A$ où $A \in M_n(\mathbb{R})$.

c) Soient $U \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\chi_{UV} = \chi_{VU}$.

d) Soient $U, V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, Montrer qu'il existe une suite d'élements de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$

convergeant vers U. En déduire que $\chi_{UV} = \chi_{VU}$.

e) Soient $S, T \in S_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que $S+T \in S_n^+(\mathbb{R})$.

L'ensemble $S_n^+(\mathbb{R})$ est-il un sous-espace vectoriel de $S_n(\mathbb{R})$?

f) Soient $S, T \in S_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que ST est à valeurs propres réelles positives.

A t-on $ST \in S_n^+(\mathbb{R})$?

682. Soit E un espace euclidien et u un endomorphisme de E.

Montrer que deux des propriétés suivantes entraînent la troisième :

(i) u est une isométrie : (ii) $u^2 = -Id$ (iii) pour tout $x \in E, < u(x), x >= 0$.

683. ♠. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique.

On pose $\rho(A) = \max\{|\lambda|, \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\}$ et on note E l'ensemble des vecteurs propres de A de norme 1 (pour la norme euclidienne canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$).

Pour $X \in E$, on pose $F(A, X) = \inf\left\{\mathrm{tr}\left(\left(A - uXX^T\right)^2\right), u \in \mathbb{R}\right\}$

puis $m(A) = \inf\{F(A, X), X \in E\}$.

Montrer que $m(A) = \mathrm{tr}\left(A^2\right) - \rho\left(A^2\right)$.

Analyse

684. Soit E un espace vectoricl normé et A une partie ouverte de E.

Montrer que $\Omega = \bigcup\limits_{\alpha \in A} \bar{B}(a, 1)$ est un ouvert.

685. Soit $E = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ et $\varphi \in E$ telle que $\displaystyle\int_0^1 \varphi(t)\mathrm{d}t \neq 0$.

On pose, pour toute $f \in E$, $N(f) = |f(0)| + \displaystyle\int_0^1 \left|f'(t)\right| \mathrm{d}t$ et

$N_\varphi(f) = \left|\displaystyle\int_0^1 f(t)\varphi(t)\mathrm{d}t\right| + \displaystyle\int_0^1 \left|f'(t)\right| \mathrm{d}t$.

Montrer que N et N_φ sont des normes équivalentes sur E.

686. Soit E un espace vectoriel normé et $f : E \to E, x \mapsto \dfrac{x}{1 + \|x\|}$.

a) Montrer que f est surjective de E sur la boule unité ouverte de E.

b) Montrer que f est lipschitzienne.

687. Soient $(E, \|\|)$ un espace vectoriel normé, A une partie non vide de E et $k \in \mathbb{R}^{+*}$.

Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une application k -lipschitzienne et $g : x \in E \mapsto \inf_{y \in A} \{k\|x-y\| + f(y)\}$.

Montrer que g est bien définie et qu'on peut prolonger f par g sur E.

Montrer que g est k -lipschitzienne.

688. Soient $(\alpha, \beta) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$. Soient $(a_n)_{n \geqslant 1}$ et $(b_n)_n \geqslant 1$ les suites définies par

$a_1 = b_1 = 1$ et, pour $n \geqslant 1, a_{n+1} = a_n + \beta b_n, b_{n+1} = \dfrac{n}{n+1}\left(\alpha a_n + b_n\right).$

a) Justifier que $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \lim\limits_{n \to +\infty} b_n = +\infty.$

b) On suppose dorénavant que la suite $\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)_{n \geqslant 1}$ est monotone à partir d'un certain rang.

Montrer qu'elle est convergente et déterminer sa limite.

c) En déduire que $b_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}} a_n.$

689. Soit $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs convergeant vers une limite $r > 0$.

Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les suites définies par $a_0 = b_0 = 1$ et, pour

$n \geqslant 0,\ a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{2} b_n, b_{n+1} = r_n\left(4a_n + b_n\right).$

a) Justifier que $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \lim\limits_{n \to +\infty} b_n = +\infty.$

On pose $q_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ et on suppose à partir de maintenant que la suite

(q_n) est monotone à partir d'un certain rang.

b) Établir que, pour tout entier $n, q_{n+1} = 1 + r_n + \dfrac{r_n}{q_n}.$

c) Montrer que la suite (q_n) est convergente.

d) En déduire qu'il existe $k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $b_n \underset{n \to +\infty}{\sim} k a_n$ et donner, en fonction de r,

la valeur du réel k.

690.© . Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $x_n > 0$ tel que $x_n^n + x_n = 3$

puis déterminer la limite de la suite (x_n) ainsi définie.

691. Soit $c \in \mathbb{R}^{+*}$. On considère l'équation (E) d'inconnue $x \in \mathbb{R}, x \sin x - c \cos x = 0$.

On note pour tout $n \in \mathbb{N}, I_n =]\, n\pi, n\pi + \dfrac{\pi}{2}[$.

a) Montrer que (E) possède une unique solution x_n dans chaque I_n

et que l'ensemble des x_n coincide avec

l'ensembie des solutions positives de (E).

b) Donner un développement asymptotique à trois termes de x_n.

692. Soit f une fonction continue et décroissante de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$.

On considère une suite de réels (r_n) strictement décroissante, convergeant vers 1

et l'on pose $f_n = r_n f$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que f (resp. f_n) admet un unique point fixe ℓ (resp. ℓ_n).

b) Etudier la convergence de la suite (ℓ_n).

693. On s'intéresse aux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $u_n \neq u_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

On dit qu'une telle suite est lentement convergente lorsqu'elle est convergente

et qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ et $p > 0$ tels que : $\forall n \geqslant N, \left|\dfrac{u_{n+1} - u_n}{v_n - u_{n-1}}\right| \geqslant p$.

a) Soit $q \in \mathbb{C}^*$ tel que avec $|q| < 1$.

Montrer que toute suite géométrique de raison q est lentement convergente.

b) Montrer que la suite définie par $t_n = 1/n!$ n'est pas lentement convergente.

c) Montrer que pour toute suite lentement convergente on a nécessairement $p \in]0, 1[$.

694. © .Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \cos\left(n^2\pi \ln\left(\dfrac{n-1}{n}\right)\right)$.

695. Déterminer selon les valeurs des réels a et b la nature de la série

de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n^a + (-1)^n n^b}$.

696. Soit $a > 0$. Déterminer la nature des séries de termes généraux :

$$u_n = n^a / \prod_{k=1}^{n}\left(1+a^k\right), v_n = \arccos\left(\frac{n^a}{1+n^a}\right), w_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(\ln(1+x))dx.$$

697. Soit $u_n = (\mathrm{ch}(1/n) - 1)^{\mathrm{sh}(1/\mathrm{n})}$.

a) Déterminer, si elle existe, la limite de u_n quand n tend vers l' infini.

b) Déterminer la nature de la série de terme général $u_n - 1$.

698. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^{+*})^N$ une suite telle que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{\alpha}{n} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$..

On pose $b_n = \ln(n^\alpha u_n)$ et $a_n = b_{n+1} - b_n$.

Déterminer la nature de la série $\sum a_n$. En déduire qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $u_n \sim \dfrac{\lambda}{n^\alpha}$.

699. ♠. Soit $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sigma(3n) = 4n$ et

$\forall n \in \mathbb{N}, \sigma(3n+1) = 4n+2$, $\sigma(3n+2) = 2n+1$

a) Montrer que σ est bijective.

b) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ et $v_n = u_{\sigma(n)}$.

Montrer que les séries de terme généraux respectifs u_n et v_n sont convergentes

et calculer leurs sommes.

700. Soit l'équation $(E) : \forall x \geqslant 0, x^2 f(x) = 2\displaystyle\int_0^x t f(x-t)\mathrm{d}t$, d'inconnue $f \in C^0(\mathbb{R}_+)$.

a) Montrer que toute solution f est nécessairement de classe C^∞.

b) Trouver une équation différentielle d'ordre 2 vérifiée par f.

c) En déduire toutes les solutions de (E).

701. Soit F l'ensemble des fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ telles que $f(1) = 1$ et $f(0) = 0$.

a) Montrer que, pour tout $f \in F$, $\displaystyle\int_0^1 \left|f'(t) - f(t)\right| \mathrm{d}t \geqslant e^{-1}$.

b) Montrer que $\displaystyle\inf_{f\in F} \int_0^1 \left|f'(t) - f(t)\right| dt = e^{-1}$.

702. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*, M_n(f) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

Montrer que $M_n(f) = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t + \dfrac{f(1)-f(0)}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

703. Soit $y \in \mathbb{R}$. Calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^2y^2)}$.

704. Soit $y \in \mathbb{R}$. Justifier l'existence et calculer $I(y) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+ixy)}$.

705. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$. Étudier la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\exp\left(\frac{\sin^2 t}{t^\alpha}\right) - 1\right) \mathrm{d}t$.

706. Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

b) Établir que $g : t \mapsto \dfrac{\sin t - t}{t^2}$ est bornée sur $\mathbb{R}^{+*}$.

En déduire que $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\ln x$.

d) Montrer que f est intégrable sur R^{+*} et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f = \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u$.

707. Soit $\alpha \in [0,1[$ et $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+^*$ continue par morceaux

telle que $f(x+1)/f(x) \to \alpha$ lorsque $x \to +\infty$.

Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

708.a) Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x$ est convergente puis,

à l'aide d'une minoration usuelle de l'exponentielle, montrer que $I > 1/10$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique réel u_n

tel que $\displaystyle\int_{1/n}^{u_n} e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{10\mathrm{n}}$.

Montrer que la suite (u_n) est convergente.

c) Montrer que $\left(u_n - \dfrac{1}{n}\right) e^{-u_n^2/2} \leqslant \dfrac{1}{10n} \leqslant \left(u_n - \dfrac{1}{n}\right) e^{-1/2n^2}$.

En déduire un équivalent de u_n quand n tend vers l'infini.

709. Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \ln\left(1+e^{-nx}\right)$.

a) Déterminer le domaine de définition I de f.

b) Montrer que f est continue et strictement décroissante sur I.

c) Montrer que f admet en $+\infty$ une limite finie que l'on déterminera.

d) Trouver un équivalent de f en 0. On donne : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

710. a) Montrer que la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+n^2x}$ est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$.

b) Trouver les limites de f en 0 et en $+\infty$, puis des équivalents de f en 0 et en $+\infty$.

711. Soit $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \dfrac{e^x}{4} + \dfrac{3e^{-x}}{4} + \dfrac{xe^x}{2}$.

a) Justifier que f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

b) On note alors $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 2, a_n \neq 0$ et que $\dfrac{1}{a_n} \in \mathbb{N}$.

712. Déterminer le rayon de convergence puis calculer la somme de la série entière

$\sum \dfrac{x^n}{(2n)!}$ en discutant selon le signe de x.

713. On considère la suite $(a_n)_n$ définie par $a_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n t \text{ dt}$.

a) Étudier les variations de la suite $(a_n)_n$ puis sa limite.

b) Déterminer une relation de récurrence entre a_{n+1} et a_{n-1}.

c) Justifier la convergence de la série de terme général $(-1)^n a_n$

d) Montrer que la série entìre de coefficient a_n a un rayon de convergence supérieur

ou égal à 1 puis montrer que la somme de cette série est solution de l 'équation

différentielle $\left(1-x^2\right) y' - xy = 1$.

714.a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note p_n le nombre de partitions de $\{1, \ldots, n\}$.

On pose $p_0 = 0$.

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, p_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_k$.

b) Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{p_n}{n!} x^n$

est supérieur ou égal a 1.

c) Calculer la somme de cette série entière.

715. a) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière de coefficients $(-1)^n \ln(n)$.

b) On note S la somme de cette série, Calculer $(x+1)S(x)$.

c) En déduire que S admet une limite finie en R que l'on calculera.

716. Une involution d'un ensemble X est une application $f : X \to X$ telle que $f \circ f(x) = x$

pour tout $x \in X$. On note I_n le nombre d'involations de $[\![1, n]\!]$.

a) Calculer I_1, I_2, I_3.

b) Montrer que, pour tout $n, I_{n+2} = I_{n+1} + (n+1)I_n$.

Que peut-on en déduire sur le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{I_n}{n!} x^n$?.

c) On note $S(x)$ la somme de cette série entière.

Calculer $(1+x)S(x)$ puis en déduire une expression de I_n sous forme de somme.

717. ©. Soient $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \cdots + \frac{1}{n}\right) x^n$ et $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n) x^n$.

a) Donner le rayon de convergence de f puis calculer $f(x)$.

b) Donner le rayon de convergence de g.

c) Montrer que $f(x) \sim g(x)$ quand $x \to 1$.

d) Montrer que $g(x)$ converge quand $x \to -1$ Ind. Considérer $(1-x)g(x)$.

718. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On pose $g(x) = \int_0^1 f(xt) \ln(t)\, \mathrm{dt}$.

a) Monter que g est définie sar $\mathbb{R}$ et calculer $g(0)$.

b) Monter que g est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer $g'(0)$.

719. On pose, pour tout réel $x > 1, F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\operatorname{sh} t}{t}\, \mathrm{d}t$.

a) Vérifier que la fonction F est bien définie.

b) Déterminer le comportement asymptotique de F en $+\infty$.

c) Calculer $F(x)$.

720. Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+t^x)}$.

a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}^+$. Calculer $f(0)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Calculer $f(x)$.

721. On considère les fonctions définies pour $x > 0$:

$$f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2} dt, g : x \mapsto \left(\int_\alpha^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t\right) \cos x - \left(\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\, \mathrm{d}t\right) \sin x.$$

a) Vérifier que les intégrales dans l'expression de g sont convergentes.

b) Montrer que f et g vérifient l ' équation différentielle : $y'' + y = \dfrac{1}{x}$.

c) Montrer que $f = g$ et établir l'égalité $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$.

722. Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(tx) \mathrm{d}t$.

a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que f est solution d'une équation différentielle.

c) En déduire f.

723. Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \ln(t) \ln(1-t^x)\, \mathrm{d}t$.

a) Déterminer le domaine de définition de f.

b) Écrire f comme somme d'une série de fonctions.

c) Déterminer la limite de f en 0 .

724. Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{x} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-tx}}{1+t^2}\, \mathrm{d}t$.

a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Trouver un équivalent simple de f en $+\infty$.

c) Trouver un équivalent simple de f en 0 .

725. Soient $\beta \in \mathbb{R}^{++}$ et $I_\beta : x \in \mathbb{R} \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)e^{-\beta t}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que I_β est de classe $\mathcal{C}^2$ et que I_β est solution de l'équation différentielle (E) :

$y'' - y = \dfrac{-\beta}{\beta^2 + x^2}$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose : $F_\beta(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\beta e^{-t}}{\beta^2+t^2}\,\mathrm{d}t$ et $J_\beta(x) = \dfrac{1}{2}\left(e^x F_\beta(x) + e^{-x} F_\beta(-x)\right)$.

b) Montrer que J_β vérifie (E) puis que $J_\beta = I_\beta$.

c) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} F_{\frac{1}{n}}(x) = 0$ si $x > 0$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} F_{\frac{1}{n}}(0) = \frac{\pi}{2}$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} F_2(x) = \pi$ si $x < 0$

726. Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(tx)}{t\left(t^2+1\right)}\mathrm{d}t$.

a) Déterminer le domaine de définition de f puis montrer que f est impaire.

b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.

c) Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,0,1\}$. Trouver des réels a et b pour que, pour tout $T > 0$,

$\dfrac{1}{(1+T)\left(1+x^2T\right)} = \dfrac{a}{1+T} + \dfrac{b}{1+x^2T}$.

En déduire $f'(x)$ pour tout $x \geqslant 0$.

d) Déterminer l'expression de $f(x)$.

727. Soit $a > 1$ et $f : t \mapsto \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\left(t^2+x^2\right)^a}$.

a) Donner l'ensemble de définition D de f.

b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer sa dérivée.

c) Montrer que f est intégrable sur D.

728. a) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$. Montrer : $\displaystyle\frac{x}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{-\left(\frac{k\pi}{n}\right)^2} \leqslant \int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{x}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{-\left(\frac{k\pi}{n}\right)^2}$.

b) On considère $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-\left(1+t^2\right)x^2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

Déterminer le domaine de définition et de dérivabilité de g puis montrer que

$g'(x) = -2e^{-x^2} \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\ \mathrm{d}t.$

c) En déduire $g(x)$ en fonction de $\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}$ dt puis calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt.$

729. Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^x(t+1)} dt.$

a) Déterminer le domaine D de définition de f puis montrer que f est continue sur D.

b) Trouver une relation entre $f(x)$ et $f(1-x)$ pour $x \in D$.

c) Déterminer les limites et des équivalents de f aux bornes de D.

730. a) Soit $g :]0, +\infty[, x \mapsto \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$. Montrer que g est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

b) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(tx)}{t^2\,(1+t^2)} \mathrm{d}t.$

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$. Calculer $f(0)$ et $f'(0)$.

Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leqslant x^2$.

c) On pose $a = \displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t.$

Montrer que f est solution de l'équation différentielle :

$y'' - y = \dfrac{\pi}{2} - ax.$

d) En déduire que $a = \dfrac{\pi}{2}$ et que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{\pi}{2}\left(e^{-x} + x - 1\right).$

731. Soit Γ la fonction de la variable réelle x définie par $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t.$

a) Donner le domaine de définition de Γ.

b) Donner un équivalent en $+\infty$ de $f(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} \ln(\Gamma(u))du$.

c) En déduire un équivalent en $+\infty$ de $\ln(\Gamma(x))$.

732. Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 e^{t^x \ln t}\ \mathrm{d}t.$

a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que f est croissante et continue sur $\mathbb{R}$.

c) Donner une expression de $f(x)$ comme somme de série pour $x > 0$.

d) Étudier la limite de f en $+\infty$.

733. Soit $T : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{itx}-1}{t} e^{-t} \text{ dt}$.

Montrer que T est définie sur $\mathbb{R}$ et calculer $T(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

734. Soit $f :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{1-(1-t)^x}{t} \text{ d}t$

Justifier la définition de f puis donner une expression de $f(x)$ comme somme d'une série.

735. Écrire l'intégrale $\displaystyle\int_a^1 \frac{\ln\left(1-t^2\right)\ln\left(t^2\right)}{t^2} dt$ comme somme d'une série.

736. a) Pour $n \in \mathbb{N}$, justifier l'existence et calculer la valeur de $\displaystyle\int_0^1 t^n \ln(t) \text{ dt}$.

b) Montrer que $t \mapsto e^t \ln(t)$ est intégrable sur $]0, 1]$, puis que $\displaystyle\int_0^1 e^t \ln(t) \text{d}t = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \cdot n!}$.

737. Soit $I : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{1-e^t} \text{ d}t$.

a) Montrer que la fonction I est de classe $\mathcal{C}^1$ sar $\mathbb{R}$.

b) Si $x \in \mathbb{R}$, montrer qu'il existe des réels a et b que l'on exprimera en fonction de x,

tels que $I(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a}{b^2+n^2}$.

c) En déduire la limite de I en $+\infty$.

738. Soit $(a_n) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^{\mathrm{n}}$ un suite croissante de limite $+\infty$.

Montrer l'égalité : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n e^{-a_n t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{a_n}$.

739. a) Résoudre $2y''(x) - xy'(x) - y(x) = 0$ avec les conditions initiales

$y(0) = \sqrt{\pi}$ et $y'(0) = 0$, après avoir justifié l'existence et l'unicité de la solution.

b) En déduire la valeur de $f(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx-t^2} dt$.

740. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $M : \mathbb{R} \mapsto \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une application dérivable sur $\mathbb{R}$.

a) Démontrer que l'application $f : \mathbb{R} \mapsto \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $f(x) = M^T(x)M(x)$

est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner l'expression de $f'(x)$.

b) Soient $A : \mathbb{R} \to \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ continue et $M : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$ solution de l'équation différentielle $M'(x) = A(x)M(x)$. On suppose que $M(0) \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}, M(x) \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

741. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que : $\forall (x, y) \neq (0, 0), f(x, y) = \left(x^2 + y^2\right)^x$ et $f(0, 0) = 1$.

a) Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$.

b) La fonction f admet-elle des dérivées partielles en $(0, 0)$?

c) Déterminer les variations de $h : x \mapsto f(x, 0)$

d) La fonction f admet-elle un extremum en $(0, 0)$?

e) Déterminer tous les extrema de f sur $\mathbb{R}^2$.

Probabilités

742. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires discrètes a valeurs dans $]0, +\infty[$, indépendantes et de même loi. On pose $Y_1 = \dfrac{X_1}{X_1 + X_2}$ et $Y_2 = \dfrac{X_2}{X_1 + X_2}$

a) Démontrer que Y_1 admet une espérance finie et calculer $\mathbf{E}\left(Y_1\right)$.

b) Démontrer que Y_1 admet une variance finie, puis montrer que $\operatorname{cov}\left(Y_1, Y_2\right) = -V\left(Y_1\right)$.

743. Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

Démontrer que $\mathcal{P}(X \geqslant \lambda + 1) \leqslant \lambda$ et que $\mathcal{P}\left(X \geqslant \dfrac{\lambda}{3}\right) \leqslant \dfrac{9}{4\lambda}$.

744. a) Soit X et Y des variables aléatoires réelles admettant un moment d'ordre 2.

Montrer que $(\mathbf{E}(XY))^2 \leqslant \mathbf{E}\left(X^2\right) \mathbf{E}\left(Y^2\right)$.

b) Soit Z une variable aléatoire à valeurs strictement positives, admettant un moment d'ordre 2 et $a \in]0, 1[$.

Montrer que $\mathcal{P}(Z \geqslant a\mathbf{E}(Z)) \geqslant (1 - a)^2 \dfrac{\mathbf{E}(Z)^2}{\mathbf{E}\left(Z^2\right)}$.

745. On considère une pièce non équilibrée, la probabilité d'obtenir pile étant $p \in]0, 1[$.

On se propose d'étudier le procédé d'équilibrage de la pièce suivant :

on lance deux fois la pièce. Si on obtient une fois pile et une fois face,

on arrête l'expérience. Dans le cas contraire, on répète l'expérience.

On note T la variable aléatoire indiquant le nombre de lancers effectués

jusqu'à l'arrêt de l'expérience.

a) Donner la loi de T.

b) Montrer que T est presque sûrement finie.

c) Calculer l'espérance de T.

746. On considère des variables aléatoires X et Y à valeurs dans $[\![1, n+1]\!]$ dont la loi jointe

est donnée par : $\forall (i,j) \in [1, n+1]^2, \mathcal{P}(X=i, Y=j) = \dfrac{1}{2^{2n}} \begin{pmatrix} n \\ i-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ j-1 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer la loi de X.

b) Les variables X et Y sont elles indépendantes ?

c) Soit $M \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ de coefficients $m_{i,j} = \mathcal{P}(X=i, Y=j)$.

La matrice M est-elle diagonalisable ?

d) Exprimer M^2 à partir de M.

e) Préciser le spectre de M.

747. On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires indépendantes,

suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre 1/2.

On pose $Z_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^{n-k} X_k$.

a) Donner la loi de Z_0 puis celle de Z_1.

b) Trouver une relation entre Z_{n+1} et Z_n; en déduire la loi de Z_n.

748. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi donnée par

$\mathcal{P}\left(X_k=1\right)=\mathcal{P}\left(X_{\mathrm{k}}=-1\right)=\dfrac{1}{2}$.

Soit $S_n=X_1+\cdots+X_n$. On fixe $r>0$.

a) Montrer que, pour tout $t>0$, ch $t\leqslant e^{t^2/2}$.

b) Soit $r\in\mathbb{R}$. Montrer que, pour tout $t>0, \mathcal{P}\left(\dfrac{S_n}{n}\geqslant r\right)\leqslant \mathbf{E}\left(\exp\left(t\left(\dfrac{S_n}{n}-r\right)\right)\right)$.

c) Montrer que $\mathcal{P}\left(\dfrac{S_n}{n}\geqslant r\right)\leqslant \exp\left(-\dfrac{nr^2}{2}\right)$.

749. Soit $n\in\mathbb{N}$ avec $n\geqslant 2$. Le joueur A lance $6n$ dés et gagne s'il a au moins n fois

la face 6. Le joueur B lance $6(n+1)$ dés et gagne s'il a au moins $n+1$ fois la face 6.

On cherche à savoir quel joueur a le plus de chances de gagner.

On note X_n la variable aléatoire donnant le nombre de fois que B a eu la face 6

au cours des $6n$ premiers lancers, Y la variable aléatoire donnant le nombre de fois que B

a eu la face 6 au cours des 6 derniers lancers.

Ainsi, $X_{n+1}=X_n+Y$ avec X_n et Y indépendantes.

a) Donner les lois de X_n et de Y.

b) Montrer $\mathcal{P}\left(X_{n+1}\geqslant n+1\right)=\mathcal{P}\left(X_n\geqslant n+1\right)+\displaystyle\sum_{r=1}^{6}\mathcal{P}\left(X_n=n+1-r\right)\mathcal{P}(Y\geqslant r)$.

c) Montrer que $\max\left\{\mathcal{P}\left(X_n=j\right), j\in\{0,\ldots,6n\}\right\}=\mathcal{P}\left(X_n=n\right)$.

d) Conclure.

750. Soient $n\geqslant 2, A_1,\ldots,A_n$ des points distincts du plan.

Chaque couple $\{A_i,A_j\}$ de points distincts est relié avec probabilité p_n.

Un point est isolé s'il n'est relié à aucun autre point.

Soit, pour $i\in\{1,\ldots,n\}, X_i$ la variable de Bernoulli égale a 1 si le point A_i est isolé,

à 0 sinon. On pose $S_n=X_1+\cdots+X_n$.

a) Trouver la loi de X_i et son espérance.

b) Majorer $\mathcal{P}\left(S_n \geqslant 1\right)$.

On suppose qu'il existe $c>0$ tel que $p_n=\dfrac{c\ln(n)}{n}$.

c) On suppose $c>1$. Montrer que $\mathcal{P}\left(S_n=0\right)\to 1$ quand $n\to+\infty$.

d) Soit Z une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ ayant un moment d'ordre 2.

Montrer que $\mathcal{P}(Z=0)\leqslant \dfrac{\mathbf{V}(Z)}{\mathbf{E}(Z)^2}$.

e) On suppose $c<1$. Calculer $\mathrm{E}\left(S_n^2\right)$ et en déduire la limite de $\left(\mathcal{P}\left(S_n=0\right)\right)_{n\geqslant 2}$.

751. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre λ. Quelle est la probabilité que la matrice $\begin{pmatrix} X & 0 \\ X+Y & X \end{pmatrix}$ soit diagonalisable ?

752. Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}$.

On suppose que $|Y|$ suit une loi de Poisson et que $\forall n\in\mathbb{N}, \mathcal{P}(Y=-n)=\mathcal{P}(Y=n)$.

On pose $A=\begin{pmatrix} 0 & Y & 1 \\ Y & 0 & 1 \\ Y & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Donner la loi du rang de A.

b) Calculer la probabilité que A soit diagonalisable.

753. On considère quatre variables aléatoires de Bernoulli X, Y, Z et T i.i.d. et la matrice

$$A=\begin{pmatrix} X & X & X & X \\ X & Y & Y & Y \\ X & Y & Z & Z \\ X & Y & Z & T \end{pmatrix}$$

a) Donner la loi de $\mathrm{tr}(A)$.

b) Quelle est la probabilité que A soit inversible ?

c) Quelle est la probabilité que A soit diagonalisable ?

d) Trouver les valeurs propres de A.

754. Soit $X_1,\ldots,X_n$ des variables aléatoires mutuellement independantes suivant la même loi de Bernoulli de paramètre $p\in]0,1[$.

On pose $U = (X_1 \cdots X_n)^T$ (matrice colonne) et $M = UU^T$.

a) Déterminer la loi du rang de M et celle de la trace de M.

b) Quelle est la probabilité que M soit la matrice d'un projecteur ?

c) On note $V = (1...1)^T$ (en colonne).

Déterminer l'espérance et la variance de $S = V^T M V$.

Compléments extérieurs :

27. (CCP) Donner une série entière solution de $(E) : x^2 y'' + (3x-1)y' + y = \dfrac{1}{(1-x)^2}$.

---

23. (Mines) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que les valeurs propres de $A^T - A$ sont réelles.

Montrer que A est symétrique.

---

13. (Mines) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ et G_X sa fonction génératrice.

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall r \in]0,1[, \quad \mathcal{P}(X \geqslant n) \leqslant \frac{1 - G_X(r)}{1 - r^n}.$$

Étudier les cas d'égalité.

---

7. (Mines) Deux variables aléatoires indépendantes X et Y sur un même espace

suivent une même loi géométrique de paramètre p. Donner la loi de $|X - Y|$.

On note $T = \max(X,Y)$ et $U = \min(X,Y)$;

exprimer $T+U, T-U$ et TU en fonction de X et Y.

Donner Cov (T,U). Donner la loi de U, l'espérance et la variance de U.

---

8. (Centrale) Un étang contient N poissons dont n brochets.

Un pêcheur sort des poissons un par un en relâchant à chaque fois sa prise.

La pêche s'arrête lorsque tous les brochets ont mordu.

Quelle est la probabilité que la pêche s'arrête après n prises ? Après $n+1$ prises ?

Quel est le nombre moyen de prises jusqu'à l'arrêt de la pêche ?

Solution

Il est légitime de supposer les différentes prises équiprobables (même si c'est "non dit")

Mines 2018 equa diff

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = e^x f(y) + e^y f(x)$$

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $f(1) = 1$ et :

$$\forall x \geqslant 1, f'(x) = \frac{1}{x^2 + f^2(x)}$$

Montrer que f a une limite finie L en $+\infty$. Montrer que $L \leqslant 1 + \frac{\pi}{4}$.

On pose $a_0 = a_1 = 1$ puis :

$$\forall n \geqslant 2, a_n = a_{n-1} + (n - 1)a_{n-2}$$

1. Que dire du rayon R de $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$?

2. Trouver l'expression de f.

Exprimer les a_n à l'aide d'une somme.

(Oral Mines-Ponts)

On souhaite corriger le pb d'une pièce qui renvoie Pile avec la proba $p \in]0, 1[$ et $p \neq \dfrac{1}{2}$.

On effectue une succession de deux lancers jusqu'à ce qu'ils soient différents.

Quelle est la probabilité que le tout dernier résultat soit Pile ?

(Oral Mines-Ponts) On lance N fois une pièce équilibrée, où $N \leadsto \mathcal{G}(p)$.

Soit X le nombre de faces obtenu.

1. Montrer facilement que X est une variable aléatoire discrète.

2. Donner la loi de X conditionnée par $N = n$.

3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $f(x)=\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}x^n$.

Déterminer le rayon de convergence R de f.

4. Calculer $f(x)$. Déterminer la loi de X.

(Oral Mines-Ponts)

Soit A, B deux v.a.r. suivant la loi $\mathcal{G}(p)$. Déterminer la probabilité que les solutions de :

$$(E_\omega): y''+(A-1)y'+By=0$$

tendent vers 0 en $+\infty$.

(Oral Mines-Ponts)

Dans une urne, n boules numérotées de 1 à n.

On effectue n tirages successifs sans remise.

Soit X_k le numéro de la boule tirée à l'étape k. On dit qu'il y a un pic si $X_k > \max(X_1, \ldots, X_{k-1})$.

On convient qu'ily a toujours un pic au premier tirage.

Soit S_n le nombre de pics au cours des n tirages.

1. Déterminer $\mathbb{P}(S_n=1)$ et $\mathbb{P}(S_n=n)$.

2. Soit T_k la variable indicatrice de l'évènement :

« il y a un pic au k -ème tirage ˇ.

Déterminer la loi de T_k. Donner l'espérance de S_n.

(Oral Centrale)

On considère des variables aléatoires sur un espace probabilisé.

1. Soit $Y \rightsquigarrow \mathcal{B}(n,p)$. Donner sa fonction génératrice.

2. Soient Y, Z indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$, et non constantes.

On suppose $U=Y+Z \rightsquigarrow \mathcal{B}(n,p)$.

Montrer que Y, Z suivent des lois binomiales.

(Oral X-Ens)

Soit $n \geqslant 2$ un entier.

On choisit au hasard une racine n -ème de l'unité Z.

On note $\theta=\arg(Z) \in[0,2\pi[$.

Soient $X=\operatorname{Re}(Z)$ et $Y=\operatorname{Im}(Z)$.

1. Calculer $E(\theta), E(X)$ et $E(Y)$.

2. Calculer $\operatorname{Cov}(X, Y)$.

3. X et Y sont elles indépendantes ?

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Elles suivent la même loi définie par :

$$\mathbb{P}(X=k)=\mathbb{P}(Y=k)=pq^{k} \text{ où } p \in]0,1[$$

On pose $U=\sup(X, Y)$ et $V=\inf(X, Y)$.

1. Déterminer la loi du couple (U, V).

2. Expliciter les lois marginales de U et de V.

3. U et V sont-elles indépendantes ?

(Oral Centrale 2018)

Soit quatre cases numérotées de 1 à 4 .

À l'étape $n=0$, un jeton est placé sur la case 1.

Si à l'étape n, il se trouve sur la case $k \in\{2,3,4\}$, il va en $k-1$;

sinon, il va au hasard sur une des cases $2,3,4$.

On note X_n la variable aléatoire donnant la case à la date n et U_n la colonne des

$P\left(X_n=i\right)$ pour $1 \leqslant i \leqslant 4$.

1. Avec Python, écrire une fonction d'argument n et renvoyant les positions successives d'une réalisation de cette expérience, et tracer ces positions pour $n=10, n=50$ et $n=100$.

Conjecture ?

2. Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = AU_n$$

3. Diagonaliser A ; en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

4. On note $Y_n(i) = \operatorname{card}\{k \leqslant n, X_k = i\}$.

Chercher expérimentalement la loi de $Y_n(i)$.

(Oral Mines-Ponts 2018)

Dans une urne (proportion $p \in]0,1[$ de boules blanches, et le reste en boules noires, on effectue des tirages successifs avec remise.

On note X_1, X_2 les longueurs des deux premières suites monocolores.

Par exemple, si on tire $B, B, B, N, N, B, \ldots$ alors $X_1 = 3$ et $X_2 = 2$.

1. Donner la loi de $X_1, E(X_1)$ et $V(X_1)$.

2. Donner la loi du couple (X_1, X_2).

En déduire la loi de $X_2, E(X_2)$ et $V(X_2)$.

(Oral Mines-Ponts 2018) Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ des v.a.r. indépendantes telles que

$$\begin{cases} X_i(\Omega) = \{-1, 1\} \\ \mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = -1) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

1. Soit $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$. Déterminer $\mathbb{P}(S_n = 0)$.

2. Pour $k \in \mathbb{N}$, soit $q_k = \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} (S_n \geqslant k)\right)$.

Montrer que $q_k = \dfrac{1}{2}(q_{k-1} + q_{k+1})$.

En déduire que $q_k = 1$ pour tout k.

3. Soit $k \in \mathbb{Z}$. Que vaut $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}(S_n \leqslant k)\right)$?

4. Montrer que presque surement la suite (S_n) prend une infinité de fois la valeur k.

(Oral Mines-Ponts 2018)

1. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ ayant une espérance.

Montrer que : $E(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k)$.

2. Dans une urne de N boules numérotées de 1 à N, on tire n avec remise.

Soit X_N le plus petit numéro tiré.

Calculer $E(X_N)$ puis un équivalent quand $N \to \infty$.

3. Montrer l'égalité :

$$E\left(X_N^2\right) = \sum_{k=0}^{N}(2k+1)\mathbb{P}(X_N > k)$$

Équivalent de $V(X_N)$ quand $N \to \infty$?

(Oral Mines-Ponts 2018)

Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ des variables aléatoires indépendantes, de même loi $\mathcal{B}(p)$.

1. Donner la loi du rang et de la trace de $M = (X_i X_j)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

2. Quelle est la probabilité que M représente un projecteur ?

(Oral Mines-Ponts 2018)

Soit $(X_n)_n$ des v.a.r indépendantes de loi $\mathcal{B}(p)$.

Soit $A_n = (X_n = \ldots = X_{2n-1} = 1)$.

Soit I l'événement ´ une infinité de A_n sont réalisés ". Montrer que $\mathbb{P}(I) = 0$.

(Oral Mines-Ponts 2018)

On dit qu'une suite (X_n) de v.a.r. converge en probabilité (CP) vers X si :

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(|X_n - X| \geqslant \varepsilon\right) = 0$$

1. On suppose les X_n indépendantes, de même espérance, de même variance m.

Montrer que $M_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ est CP vers m.

2. On suppose que $\begin{cases} E(X_n) \to E(X) \\ V(X_n - X) \to 0 \end{cases}$

Montrer que (X_n) est CP vers X.

3. Soit (S_n) une suite de v.a.r. indépendantes de loi $\mathcal{B}(n, p)$.

On pose $X_n = \exp(S_n/n)$.

Calculer $E(X_n)$ et $V(X_n)$.

La suite (X_n) est-elle CP ?

(Oral Mines-Ponts 2018) Soit X, Y de loi $\mathcal{B}\left(n, \dfrac{1}{2}\right)$, et indépendantes.

1. Espérance, variance, et loi de $Z = X - Y$.

2. X et Z sont-elles indépendantes ? Étudier la corrélation de X et Z.

(Oral Mines-Ponts 2018)

Soit N une v.a.r. telle que $N + 1 \rightsquigarrow \mathcal{G}(p)$.

On effectue N tirages avec remise dans une urne contenant une boule bleue et une verte.

Soit X le nombre de boules vertes tirées.

1. Rayon et somme de $f(x) = \displaystyle\sum_{n=m}^{+\infty} \binom{n}{m} x^n$.

2. Trouver la loi de X.

(Oral Mines-Ponts 2018)

Soit X, Y deux variables indépendantes de même loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.

Donner la loi et l'espérance de $Z = |X - Y|$.

(Mines-Ponts 2018) Soit $\sum_{n \geqslant 1} \lambda_n$ convergente (avec les $\lambda_n > 0$).

Soit $\left(X_n \rightsquigarrow \mathcal{P}\left(\lambda_n\right)\right)_{n \geqslant 1}$ des v.a.r. indépendantes.

1. Montrer que $\sum_{n \geqslant 1} \mathbb{P}\left(X_n \neq 0\right)$ converge.

2. Interpréter $A = \bigcap_{n \geqslant 1} \bigcup_{k \geqslant n} \{X_k \neq 0\}$.

Montrer que $\mathbb{P}(A) = 0$.

3. Montrer que la série $\sum X_n$ est presque sûrement convergente.

4. Soit Y, Z deux variables à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que, pour tout $t \in [0,1]$:

$$|G_Y(t) - G_Z(t)| \leqslant 2\mathbb{P}(Y \neq Z)$$

5. Montrer que $S = \sum_{n=1}^{+\infty} X_n \rightsquigarrow \mathcal{P}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_k\right)$.

(Oral Mines-Ponts 2018)

Soit X une variable telle que $X(\Omega) = \mathbb{Z}$.

Soit $X^+ = \max(X, 0)$ et $X^- = \min(X, 0)$.

1. Montrer que X^+, X^- sont des v.a.r.

2. Expliciter la loi conjointe de (X^+, X^-).

3. X^+ et X^- sont-elles indépendantes ?

Mines, Centrale. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$.

Soit a un endomorphisme de E.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ défini par $f(u) = \frac{1}{2}(a \circ u + u \circ a)$.

Dans la question 1, a est un projecteur de rang r.

Question 1.a

Déterminer f^k pour $k \geqslant 1$, et en déduire $\lim_{k \to \infty} f^k = h$, où h est un projecteur à préciser.

Question 1.b

En utilisant une représentation matricielle dans une base adaptée de E,

déterminer le rang de f^k et retrouver $h = \lim_{k \to \infty} f^k$. Quel est le rang de h ?

Question 2 Dans cette question, on suppose seulement que a est diagonalisable.

En utilisant une représentation matricielle dans une base adaptée de E,

étudier la convergence éventuelle de la suite des f^k dans $\mathcal{L}(E)$.