RMS mines
PSI *
Année 2022

Année 3.

**Algèbre**

672. Aujourd'hui, nous sommes le vendredi ler juillet. Quel jour sera t-on le 1er juin 2023 ?

Sol .

673. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique.

Soit $v_0 = \overrightarrow{0}$ de $\mathbb{R}^n$. Soient $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ tels que $\|v_i - v_j\| \in \mathbb{Q}$ pour tous $i, j \in [\![0, n]\!]$.

Montrer qu'il existe une relation de dépendance non triviale entre les $v_i$,

pour $i \geqslant 1$, et à coefficients rationnels.

Sol :

674. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer $\exists! Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q(0) = 0$ et $Q(X+1) - Q(X) = P(X)$

Sol ( il y en a d'autres )

675. Soit $P \in Q_n[X]$. Montrer l'équivalence entre les propriétés :

i) pour tout $k \in \mathbb{Z}, P(k) \in \mathbb{Z}$,

ii) pour tout $k \in [\![0, n]\!], P(k) \in \mathbb{Z}$,

iii) il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que, pour tout $k \in [\![m, m+n]\!], P(k) \in \mathbb{Z}$.

Ind. On pourra introduire les polynômes $H_k = \dfrac{1}{k!} X(X-1) \cdots (X-k+1)$.

676. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré au moins 2 .

a) On suppose que $P$ est de la forme $P = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (X - \lambda_k)^{\alpha_k}$,

où les $\lambda_k$ sont dans $\mathbb{R}$ et les $\alpha_k$ dans $\mathbb{N}^*$. Montrer que $\dfrac{P'}{P} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{X - \lambda_k}$.

b) On suppose que $P$ est scindé sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $P'(x) = 0$ et $P(x) \neq 0$.

Montrer que $P''(x)P(x) < 0$.

c) Soient $x_1$ et $x_2$ deux racines consécutives de $P$. Montrer que $P'(x_1) P'(x_2) \leqslant 0$.

d) Soient $a$ et $b$ des réels distincts tels que $P - a$ et $P - b$ sont scindés sur $\mathbb{R}$.

Montrer que $P'$ est scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples.

Sol :

677. Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{C})$. Pour $k \in \mathbb{N}$, soit $f_k : x \mapsto x^k e^{\frac{i}{x}}$.

Pour $f \in E$, soit $\varphi(f) : x \mapsto x^2 f'(x) - (2 - i) f(x)$.

a) Calculer $\varphi(f_k)$ pour $k \in \mathbb{N}$. Vérifier que $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est libre.

L'endomorphisme $\varphi$ est-il injectif ?

b) Pour $\ell \in \mathbb{N}$, soit $F_\ell = \mathrm{Vect}(f_0, f_1, \ldots, f_\ell)$.

Déterminer le rang de l'application $f \in F_\ell \mapsto \varphi(f) \in F_{\ell+1}$.

c) Montrer que $f_n$ est prolongeable par continuité en 0 ssi $n \geqslant 1$.

Donner une cns pour que $f_n$ soit dérivable en 0. Montrer que $f_n$ est alors de classe $\mathcal{C}^1$.

Sol :...

678. Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Soient $p, q, r$ trois projecteurs de $E$.

On suppose que $p + \sqrt{2}q + \sqrt{3}r$ est un projecteur.

a) Montrer que la trace d'un projecteur est un entier naturel.

b) Montrer que $q = r = 0$.

Sol :

680. La relation $\cong$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $A \cong B$ s'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tq $A = PB$.

a) Montrer que $\cong$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b) Caractériser les classes d'équivalence de $\cong$.

Sol :

681. Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

a) Soit $A$ telle que $A^p = 0$ et $A^{p-1} \neq 0$. Montrer que $A$ est semblable à $J$.

b) Soit $A$ telle que $A^p = 0$ et rang $(A) = p - 1$. Montrer que $A$ est semblable à $J$.

Sol hyper classique.

682.$E$ un ev, $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice $p$ et $S$ un sev $E$ stable par $u$ avec $E = \mathrm{Im}(u) + S$.

a) Montrer que, pour tout $k \geqslant 1, E = \mathrm{Im}\left(u^k\right) + S$.

b) En déduire que $S = E$.

Sol :

683. a) Étudier $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}^*$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{1}{u_n}\right)$.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $N \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telle que $N^p = 0$. On pose $A = I_p + N$.

b) Montrer que $A$ est inversible.

c) Justifier l'existence et étudier la suite de matrices $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$M_0 = A$ et $\forall n \in \mathbb{N}, M_{n+1} = \frac{1}{2}\left(M_n + M_n^{-1}\right)$.

Sol :

684. Soient $E = \mathbb{R}_3[X], A = X^4 - 1$ et $B = X^4 - X$.

Pour $P \in E$, on note $f(P)$ le reste de la division euclidienne de $AP$ par $B$.

a) Montrer que $f$ est un endomorphisme.

b) Déterminer Ker $f$ et calculer le rang de $f$.

c) Étudier la diagonalisabilité de $f$.

Sol :

685. Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $A = \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta & \alpha\gamma \\ \alpha\beta & \beta^2 & \beta\gamma \\ \alpha\gamma & \beta\gamma & \gamma^2 \end{pmatrix}$ et $f$ l'endo associé à $A$.

a) Montrer qu'il existe un vecteur colonne $C$ tel que $A = CC^T$.

b) Déterminer le noyau et l'image de $A$.

c) Chercher les éléments propres de $A$. La matrice $A$ est-elle diagonalisable ?

d) Retrouver le résultat en remarquant que $f$ est proportionnel à un projecteur.

Sol :

686. Soit $f : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M + M^T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Montrer que $f$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b) Montrer que $f$ est diagonalisable et donner ses espaces propres.

Sol.

687. Bel exo, inconnu à ce jour :Trouver l'image de $\varphi : M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mapsto M^3$.

692. $E$ un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie et $f$ un endo de $E$ tel que $f^2$ soit un projecteur.

a) Préciser un polynôme annulateur de $f$.

b) Mq il existe 2 sev supplémentaires $F$ et $G$ stables par $f$ tels que l'endo induit

par $f$ sur $F$ soit inversible et l'endo induit par $f$ sur $G$ soit nilpotent.

c) Montrer que $f$ est dz ssi $\mathrm{rg}\,(f^2) = \mathrm{rg}(f)$.

695. * a) Montrer qu'il existe une unique suite de polynômes $(H_n)_{n\in N}$ tq

$\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, e^{xt-t^2/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} H_n(x)t^n$.

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, (n+1)H_{n+1} = XH_n - H_{n-1}$ et que $H_n' = H_{n-1}$.

c) On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$.

Montrer que $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthogonale de $\mathbb{R}[X]$.

697. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $a_{i,i} = a_{1,n} = a_{n,1} = 1$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$,

les autres coefficients étant nuls.

a) Montrer que 1 est valeur propre de $A$ puis déterminer le sous-espace propre associé.

b) En remarquant que $A$ est symétrique, déterminer tous les éléments propres de $A$.

698. $E$ ev euclidien. Un endo $f$ de $E$ est antisymétrique ssi $\forall x, y, E, (f(x), y\rangle = -\langle x, f(y)\rangle$.

a) Mq f est antisymétrique ssi $\forall x \in E, \langle f(x), x\rangle = 0$.

b) Mq Ker $f$ est orthogonal à Im $f$.

c) Soit $s = f \circ f$ : Montrer que $s$ est un endomorphisme symétrique.

Mq toutes ses valeurs propres sont négatives ou nulles. Mq $\operatorname{Ker} s = \operatorname{Ker} f$.

*d*) On suppose $n = 3$. Mq il existe une bon dans laquelle la matrice de $f$ est de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix}.$$

**Analyse**

704. a) Soient $E$ un ev muni de deux normes équivalentes $N_1$ et $N_2$,

$(u_n)$ une suite de $E$ qui converge pour $N_1$. Montrer que $(u_n)$ converge pour $N_2$.

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Soit, pour $a \in \mathbb{R}, N_a : P \mapsto |P(a)| + \|P'\|_{\infty,[0,1]}$.

b) Si $a \in \mathbb{R}$, montrer que $N_a$ est une norme.

c) Soient $a, b \in [0,1]$. Montrer que $N_a$ et $N_b$ sont des normes équivalentes.

d) Pour quelles valeurs de $a$, la suite $((X/2)^n)$ converge-t-elle pour $N_a$ ?

705. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $N(A) = \operatorname{tr}\left(AA^T\right)$.

Montrer que, pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), N(AB) \leqslant N(A)N(B)$.

Sol : C'est Schur.

711. Soit, pour $n \geqslant 4, f_n : x \mapsto x^{3n} - \sqrt{n}x + 1$.

a) Montrer qu'il existe un unique $x_n \in [1,2]$ tel que $f_n(x_n) = 0$.

b) Étudier la convergence de la suite de terme général $\varepsilon_n = x_n - 1$.

c) Trouver un equivalent de $\varepsilon_n$.

d) Donner un développement asymptotique à trois termes de $x_n$.

712. Soient $\alpha > 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*, u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha n}$. Trouver un équivalent de $u_n$.

713. Soit $(u_n)$ une suite de $\mathbb{R}^{+*}$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*, v_n = \dfrac{u_n}{u_1 + \cdots + u_n}$.

Comparer les natures des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$.

714. $^\star$ a) Étudier la convergence et calculer la somme éventuelle de la série

de terme général $u_n$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln\left(e^{u_n} - u_n\right)$.

b) Etudier la convergence et calculer la somme éventuelle de la série de terme

genéral $v_n$ définie par $v_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = e^{v_n} - 1$

715. Soit $f : [0,1] \to [0,1]$.

a) On suppose $f$ continue. Montrer que $f$ admet un point fixe.

b) On suppose $f$ croissante. Montrer que $f$ admet un point fixe.

Ind. Considérer sup $\{x \in [0,1], f(x) \geqslant x\}$.

716. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

a) Montrer que $\displaystyle\int_a^b f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t$ tend vers 0 , quand $n$ tend vers $+\infty$.

On admet que le résultat est encore vrai si $f$ est seulement continue par morceaux.

b) Calculer $\displaystyle\int_0^\pi \left(-x+\frac{x^2}{2\pi}\right)\cos(nx)\mathrm{d}x$.

c) En déduire la somme de la série de terme géneral $\dfrac{1}{n^2}$

724. Soient $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ et, pour $n \in \mathbb{N}, I_n = \displaystyle\int_0^1 f\left(t^n\right)\mathrm{d}t$. Limite de $(I_n)$ ?

725. Soit $\alpha > 0$.

a) Montrer que, pour $n$ assez grand, l'intégrale $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^\alpha)^n}\,\mathrm{d}t$. est bien définie.

b) Trouver une relation entre $u_n$ et $u_{n+1}$.

c) Trouver un equivalent de $u_n$.

d) Montrer que la série $\sum(-1)^n u_n$ converge.

726. Soit, pour $n \in \mathbb{N}, u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\sin(nt)\mathrm{d}t$.

a) Montrer que $(u_n)$ converge.

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n+1} - u_n$.

c) Quelle est la nature de la série de terme général $u_n$ ?

Donner un équivalent de la somme partielle de cette série.

727. Soient, pour $n \in \mathbb{N}^*, u_n = \displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\sin^2(n\pi x)}{\tan(\pi x)}\mathrm{d}x$ et $v_n = \displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\sin^2(n\pi x)}{\pi x}\,\mathrm{d}x$.

a) Montrer que $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u}\,\mathrm{d}u$ converge.

b) Montrer que $v_n \sim \dfrac{\ln(n)}{2\pi}$.

c) Soit $f : x \in ]0, 1/2[ \mapsto \dfrac{1}{\tan(\pi x)} - \dfrac{1}{\pi x}$.. Montrer que $f$ se prolonge par continuité.

d) Trouver un équivalent de $u_n$.

728. Soit, pour $\alpha > 0$ et $n \in \mathbb{N}, u_n(\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha(t)\cos^n(t)\mathrm{d}t$.

a) Déterminer la nature de la série de terme général $u_n(\alpha)$ selon les valeurs de $\alpha$.

b) Calculer les sommes des séries de terme général $u_n(2)$ et $u_n(3)$.

729. a) Soit $\varphi \in \mathcal{C}^1([0, \pi/2], \mathbb{R})$. Mq $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t)\sin((2n+1)t)\mathrm{d}t \underset{n++\infty}{\longrightarrow} 0$.

b) Justifier la convergence des intégrales suivantes :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t,\ I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin t}\,\mathrm{d}t \text{ et } J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{t}\,\mathrm{d}t, \text{ pour } n \in \mathbb{N}.$$

c) Calculer $I_n - I_{n-1}$, puis $I_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

d) Montrer que $I = \dfrac{\pi}{2}$.

Sol .

732. Soient $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t, g : x \mapsto \cos(x)\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t - \sin(x)\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$.

a) Justifier que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$ convergent.

b) Montrer que $f$ et $g$ sont solutions de l'équation différentielle $y'' + y = \dfrac{1}{x}$.

c) En déduire que $f = g$, puis en déduire les valeurs de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

Sol .

734. Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que $f$ est dérivable sur $]-1, +\infty[$. Trouver une relation entre $f$ et $f'$.

b) En déduire que $f$ est dse au voisinage de 0 et trouver son développement.

735. Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}e^{-x/t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que $f$ est définie sur $\mathbb{R}^+$.

b) Montrer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^2$ et solution de l'équation différentielle $2xy''-y'-2y=0$.

c) Résoudre l'équation en posant $y(x)=z(\sqrt{x})$.

738. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge puis qu'elle vaut $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}$.

740. a) Mq l'équation $(E) : x^2y'+y=x^2$ n'admet pas de solution dse.

b) Donner les sol de $(E)$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ puis préciser celles avec une limite finie en 0.

741. a) Montrer que l'équation $(E) : 4xy''+2y'-y=0$ admet une solution dse.

b) En déduire les solutions de $(E)$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sur $\mathbb{R}^{-*}$.

c) L'équation $(E)$ admet-elle des solutions sur $\mathbb{R}$ ?

742. Considérons l'équation différentielle $(E) : y''=(x^2-1)\,y$.

a) Mq si $y$ sol de $(E)$ avec $y(0)=0$ (resp. $y'(0)=0$ ) alors $y$ impaire (resp. paire).

b) Trouver le réel $a\in\mathbb{R}$ pour lequel la fonction $x\mapsto e^{ax^2}$ est solution de $(E)$.

c) $f : x\mapsto u(x)e^{-x^2/2}$. Mq $f$ est solde $(E)$ ssi $u$ est sold'une équa diff à préciser.

d) Exprimer l'ensemble des solutions de $(E)$ à l'aide de $v : x\mapsto \displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t$

**Probabilités**

747. Soient $X_1$ et $X_2$ des variables aléatoires indépendantes suivant les lois de Poisson de paramètres respectifs $\lambda_1$ et $\lambda_2$. Soit $Y$ une variable aléatoire indépendante des deux autres telle que $Y(\Omega)=\{-1,1\}$ et $\mathbf{P}(Y=1)=p\in]0;1[$. On pose $M=\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ YX_2 & X_1\end{pmatrix}$.

a) Probabilité que $M$ soit inversible ?

b) Probabilité que les valeurs propres de $M$ soient réelles ?

c) Probabilité que $M$ soit diagonalisable sur $\mathbb{R}$ ?

750. $X, Y$ des var aléa ind avec des lois géom de param $p_1$ et $p_2$. On pose $M = \max(X, Y)$.

a) Justifier que $M$ est une variable aléatoire.

b) Déterminer la loi de $M$.

c) Déterminer l'espérance et la variance de $M$ en utilisant $m = \min(X, Y)$.

753. Considérons un immeuble a 7 étages où l'on cherche une personne. Cette personne est dans l'immeuble avec probabilité $p \in ]0, 1[$ et, si elle est dans l'immeuble, elle se trouve dans chaque étage avec la même probabilité. On a cherché dans les 6 premiers étages en vain. Quelle est la probabilité qu'elle soit dans le dernier étage ?

760. Soit $\zeta : s \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$.

Soit $\mathbf{P}$ une probabilité sur $\mathbb{N}^*$ definie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbf{P}(\{n\}) = \frac{c}{n^s}$.

a) Déterminer les valeurs de $s$ pour lesquelles il existe une telle probabilité.

Préciser la valeur de $c$ dans ce cas.

b) Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers.

Pour $p \in \mathcal{P}$, soit $\Lambda_p$ l'ensemble des entiers naturels non nuls multiples de $p$.

Montrer que les $(\Lambda_p)_{p \in \mathcal{P}}$ sont mutuellement indépendants.

761. Soit $X$ une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramère $\lambda > 0$.

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbf{P}(X \leqslant n) = \frac{1}{n!} \int_{\lambda}^{+\infty} e^{-t} t^n \, \mathrm{d}t$.

b) Déterminer un équivalent de $\int_{\lambda}^{+\infty} e^{-t} t^n \, \mathrm{d}t$ quand $n \to +\infty$.

c) Déterminer la probabilité que $X$ soit paire.