RMSMines
PSI *
Année 2021

Année -2.

Algèbre

672. Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$. Montrer que $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_1 & 1 & x_2 & 1 & 0 \\ x_1^2 & 2x_1 & x_2^2 & 2x_2 & 2 \\ x_1^3 & 3x_1^2 & x_2^3 & 3x_2^2 & 6x_2 \\ x_1^4 & 4x_1^3 & x_2^4 & 4x_2^3 & 12x_2^2 \end{vmatrix} \neq 0.$

Sol :

675. Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 5 \\ -1 & -2 & 5 \\ -1 & -3 & 6 \end{pmatrix}$ et $E = \mathrm{Vect}\,(I_3, A)$.

a) L'espace E est-il stable par produit matriciel ?

b) Déterminer les matrices de E inversibles et d'inverse dans E.

c) Existe-t-il $M \in E$ telle que $M^2 = A$?

Sol :

676. Soient $n \geqslant 2, \mathcal{H}$ l'ensemble des matrices de trace nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

et $\mathcal{N}$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

a) Les ensembles $\mathcal{H}$ et $\mathcal{N}$ sont-ils des espaces vectoriels ?

b) Montrer que l'espace engendré par $\mathcal{N}$ est inclus dans $\mathcal{H}$.

c) Cette inclusion est-elle une égalité ?

678. Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}$ puis résoudre l'équation $M^3 + 2M = A$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Sol :

680. Considérons l'application u définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $u(P) = X^n P\left(\dfrac{1}{X}\right)$.

a) Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Montrer que u est diagonalisable et exhiber une base de vecteurs propres.

Sol :

681. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = -\mathrm{id}$.

a) Montrer que, pour tout vecteur $a \neq 0, (a, f(a))$ est une famille libre.

Dans la suite, on notera $F(a)$ l'espace vectoriel engendré par ces deux vecteurs.

b) Montrer qu'il existe des vecteurs $a_1, \ldots, a_n$ tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{n} F(a_i)$.

c) Montrer que E est de dimension paire.

Trouver une base de E dans laquelle la matrice de f soit aussi simple que possible.

d) Donner le polynôme caractéristique de cette matrice.

Que dire du spectre de f ? L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Sol.

682. Soit g un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie.

On s'intéresse à $\varphi : h \in \mathcal{L}(E) \mapsto h \circ g - g \circ h \in \mathcal{L}(E)$.

a) Que vaut le déterminant de φ ?

b) Montrer que les vecteurs propres de φ associés à des valeurs propres non nulles

sont des endomorphismes nilpotents.

c) Soit réciproquement h nilpotent. Montrer qu'il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\varphi_g(h) = h$.

Sol

683. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de trace non nulle et $u : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \mathrm{tr}(A)M - \mathrm{tr}(M)A$.

L'endomorphisme u est-il diagonalisable ? Que se passe-t-il si $\mathrm{tr}(A) = 0$?

Sol :

684. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de projection.

Étudier la diagonalisabilité des endomorphismes

$u : M \mapsto AM, v : M \mapsto MA$ et $w : M \mapsto AM - MA$.

685. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et f_A l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ défini par $f_A(M) = AM$.

a) Montrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ on a $P(f_A) = f_B$, avec B à préciser.

b) Montrer que A est diagonalisable si et seulement si f_A l'est.

c) En écrivant la matrice de f_A dans une base bien choisie, donner les valeurs propres de f_A, leur multiplicité ainsi que la dimension des espaces-propres associés en fonction de ceux de A. Retrouvez ainsi le résultat de la question précédente.

686. Soient E un espace de dimension finie n et $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur.

Soit φ l'endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ défini par $\varphi : u \mapsto \dfrac{1}{2}(u \circ p + p \circ u)$.

a) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur p pour que φ soit un projecteur.

b) Montrer que les ensembles $A = \{u \in \mathcal{L}(E); \operatorname{Im} p \subset \operatorname{Ker} u, \operatorname{Im} u \subset \operatorname{Im} p\}$ et

$B = \{u \in \mathcal{L}(E); \operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} p, \operatorname{Ker} p \subset \operatorname{Ker} u\}$ sont des sous-espaces de $\mathcal{L}(E)$.

c) Montrer que φ est diagonalisable et préciser ses valeurs propres.

Sol :

687. Soient f et g deux endo d'un $\mathbb{R}$-ev de dim finie tels que $f \circ g = f + g$.

a) Montrer que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} g$ et $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g$.

b) On suppose que f est diagonalisable.

Mq $f \circ g$ est diagonalisable, avec un spectre inclus dans $\mathbb{R} \backslash]0, 4[$.

Sol : $\heartsuit$.

688. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable et $B = A^3 + A + I_n$.

Montrer que A est un polynôme en B.

Le résultat reste-t-il vrai si on remplace $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$?

Sol

689. Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, u, v deux endomorphismes de E.

a) Mq u et v n'ont pas de valeur propre commune ssi $\chi_u(v)$ est inversible.

b) On suppose qu'il existe $f \in \mathcal{L}(E)\backslash\{0\}$ tel que $u \circ f = f \circ v$.

Montrer que u et v ont une valeur propre commune.

Que peut-on dire si f est un automorphisme ?

Sol

1144. CCINP. Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) = \emptyset$.

a) Montrer que, si P est un polynôme annulateur de A,

alors les valeurs propres de A sont racines de P.

b) Montrer que la matrice $\chi_A(B)$ est inversible.

c) Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Prouver : $AX = XB \Leftrightarrow X = 0$.

d) Montrer que, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

il existe une unique matrice $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $AX - XB = M$.

Sol :

(Oral Mines-Ponts 2018) ... Tjs les mêmes habitudes.

692. Soient E un espace préhilbertien réel et F un sous-espace de E.

a) Montrer que $F \subset \left(F^{\perp}\right)^{\perp}$.

b) Dans le cas où $E = \mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire défini par :

$\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t$ et $F = \{P \in E, P(0) = 0\}$, calculer $F^\perp$ et $\left(F^\perp\right)^\perp$.

c) À quelle condition a-t-on $F = \left(F^\perp\right)^\perp$?

693. Soient E un espace euclidien, f et g deux endomorphismes de E vérifiant :

$$\forall x, y \in E, \langle f(x), y\rangle = \langle x, g(y)\rangle.$$

a) Exprimer $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ en fonction de $\operatorname{Ker} g$ et $\operatorname{Im} g$.

b) Soit F un sev de E. Montrer que F est stable par f ssi $F^\perp$ est stable par g.

c) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Existe-t-il toujours un endo $g \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant ces hypothèses ?

696. a) Déterminer la borne inférieure des $\lambda \in \mathbb{R}^+$tels que :

$\forall A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \operatorname{tr}\left(A^2\right) \leqslant \lambda \operatorname{tr}\left(AA^{\mathrm{T}}\right)$.

b) Déterminer la borne inférieure des $\lambda \in \mathbb{R}^+$tels que :

$\forall A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), |\det(A)| \leqslant \lambda \operatorname{tr}\left(AA^{\mathrm{T}}\right)$.

c) Généraliser ces résultats à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour le second point, on comparera $|\det(A)|^{\frac{2}{n}}$ à $\operatorname{tr}\left(AA^{\mathrm{T}}\right)$.

697. Soient E un espace euclidien, $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $u : x \in E \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle\, e_k$.

a) Montrer que u est un endomorphisme symétrique de E.

b) Vérifier que $\operatorname{Sp}(u) \subset \mathbb{R}^{+*}$.

c) En déduire qu'il existe un automorphisme symétrique v de E tel que $u^{-1} = v^2$.

Est-il unique ?

d) Soit v un tel automorphisme.

Montrer que $(v(e_1), \ldots, v(e_n))$ est une base orthonormée de E.

Sol :

698. Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $A = \frac{1}{2}\left(M + M^T\right)$.

Soient λ_1 et λ_n la plus petite et la plus grande valeur propre de A.

Montrer que toute valeur propre réelle λ de M vérifie $\lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_n$.

Sol :

699. Dans un espace euclidien E, soient p et q deux projecteurs orthogonaux,

respectivement sur des sous-espaces F et G.

a) Montrer que $p \circ q \circ p$ est un endomorphisme symétrique.

b) Montrer que E est la somme orthogonale de $\mathrm{Im}(p) + \mathrm{Ker}(q)$ et de $\mathrm{Im}(q) \cap \mathrm{Ker}(p)$.

c) Montrer que $p \circ q$ est diagonalisable.

Sol : Bel exo, des révisons en tous genres et du neuf.

Analyse

700. Pour $x \in \mathbb{R}$, déterminer la limite de $\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$ quand n tend vers l'infini.

En déduire, pour $z \in \mathbb{C}$, la limite de $\left(1 + \dfrac{z}{n}\right)^n$ quand n tend vers $+\infty$.

Sol : .

701. Soient $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ tels que Q ne s'annule pas sur $\mathbb{N}$.

Étudier la convergence de la série de terme général $(-1)^n \dfrac{P(n)}{Q(n)}$.

Sol :

705. On considère une fonction y de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$.

a) Donner une primitive de $y^2 - (y')^2 + (y'')^2 - (y + y' + y'')^2$.

b) Montrer que la convergence de $\int_0^{+\infty} y^2$ et de $\int_0^{+\infty} (y'')^2$

implique celle de $\int_0^{+\infty} yy'$ et de $\int_0^{+\infty} (y')^2$.

c) Montrer que la convergence de $\int_0^{+\infty} y^2$ et de $\int_0^{+\infty} (y'')^2$ implique l'inégalité :

$\int_0^{+\infty} y'^2 \leqslant \int_0^{+\infty} y^2 + \int_0^{+\infty} y''^2$.

Sol :

710. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que A admet trois valeurs propres distinctes,

que l'on ne calculera pas mais dont on déterminera les parties entières.

b) Déterminer le rayon de convergence de $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{tr}(A^n)\, x^n$ et calculer sa somme.

Sol .

715. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(nt)}{(1+n^4t^2)^2}\, \mathrm{d}t$.

a) Justifier l'existence de I_n.

b) Déterminer la limite de (I_n) ; donner un équivalent de I_n.

Sol :

717. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $I_n = \int_0^1 \frac{t^{n+1} \ln t}{1-t^2}\, \mathrm{d}t$.

a) Justifier la convergence de I_n. Exprimer I_n sous forme de somme.

b) Déterminer un équivalent de I_n.

Sol :

719. Soient $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\, \mathrm{d}t$ et $g : x \mapsto \cos(x) \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t - \sin(x) \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\, \mathrm{d}t$.

a) Justifier que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$ convergent.

b) Montrer que f et g sont solutions sur $]0,+\infty\,[$ de l'équation différentielle $y''+y=\dfrac{1}{x}$.

c) En déduire que $f=g$ puis déterminer la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

Sol :

722. Pour $x>0$, on pose $f(x)=\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\ln\left(1-t^x\right)\mathrm{d}t$.

a) Montrer que f est correctement définie.

b) Exprimer $f(x)$ sous forme de la somme d'une série de fonctions.

c) Donner un équivalent de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$. On admettra : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

723. a) Montrer que l'intégrale $I=\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{e^t-1}\,\mathrm{d}t$ est bien définie.

a) On admet que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Montrer que $I=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$.

724. Soient $I=\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{1-e^{-\sqrt{t}}}\,\mathrm{d}t$ et, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $I_n=\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-nt}\,\mathrm{d}t$.

a) Justifier la définition et calculer I_n.

b) Justifier la définition de I et donner sa valeur.

725. On considère $I_n=\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{n+1}\ln t}{1-t^2}\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que cette intégrale est cvte, puis l'écrire sous forme de somme d'une série.

b) En déduire un équivalent de I_n lorsque $n\to+\infty$.

Sol.

726. Déterminer les couples $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{a+kb}$.

Voir exo ♡♡♡♡.

728. Résoudre l'équation différentielle $xy'' - y' + 4x^3 y = 0$ sur $\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R}^{-*}$, puis sur $\mathbb{R}$.

729. Déterminer les extrémums de $(x, y) \mapsto y\left(x^2 + (\ln y)^2\right)$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$.

Sol :

Probabilités

730. Soit $(X_k)_{k \geqslant 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires suivant la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. On pose $S_0 = 0$ et, pour $n \geqslant 1, S_n = X_1 + \cdots + X_n$; ainsi, S_n définit la position après n déplacements d'une marche aléatoire sur l'axe des entiers relatifs, en commençant en 0 . Déterminer $\mathbf{P}\left(S_n = 0\right)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, puis un équivalent quand n tend vers l'infini.

732. Soient deux variables aléatoires indépendantes X et Y suivant respectivement des lois géométriques de paramètres p_1 et p_2.

a) Déterminer la probabilité pour que la matrice $\begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

b) Soit Z une troisième variable aléatoire, suivant la loi de Bernoulli de paramètre q.

Ces trois variables aléatoires étant supposées mutuellement indépendantes,

déterminer la probabilité pour que la matrice $\begin{pmatrix} X & Z \\ 0 & Y \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

733. Soient A et B deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. Déterminer la probabilité que toutes les solutions de l'équation différentielle $y'' + (A-1)y' + By = 0$ tendent vers 0 en $+\infty$.

Sol

734. Soient $p \in]0, 1[$ et $(X_n)_{n \geqslant 1}$ une suite i.i.d. de VA suivant la loi géom de param p.

a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $Y_n = \min\left(X_1, \ldots, X_n\right)$.

Déterminer la loi, puis l'espérance, de Y_n.

b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $Z_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$.

Déterminer la loi de Z_n, puis un équivalent de $\mathbf{E}(Z_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Sol :

735. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes, centrées, ayant un moment d'ordre $2, \sigma_1, \ldots, \sigma_n$ leurs écarts-types et $\sigma = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2}$.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$.

Soient $\varepsilon > 0$ et, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $A_k^\varepsilon = (|S_k| \geqslant \varepsilon) \bigcap_{1 \leqslant i < k} (|S_i| < \varepsilon)$.

a) Exprimer l'événement $\left(\max_{i \leqslant k} |S_i| \geqslant \varepsilon\right)$ en fonction des A_k^ε.

b) Montrer que $\mathbf{E}\left((S_n - S_k)^2 \mathbf{1}_{A_k^\varepsilon}\right) = \mathbf{E}\left(S_n^2 \mathbf{1}_{A_k^\varepsilon}\right) - \mathbf{E}\left(S_k^2 \mathbf{1}_{A_k^\varepsilon}\right)$.

Ind. Considérer $\mathbf{E}\left((S_n - S_k) S_k \mathbf{1}_{A_k^\varepsilon}\right)$.

c) En déduire que $\mathbf{P}\left(\max_{i \leqslant n} |S_i| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \dfrac{n\sigma^2}{\varepsilon^2}$.

d) Comparer ce résultat avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebytchev.

Exos retournés de 2022

Ens Cachan Pottier :

Soit $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R})$ telle que $\lim_{\|x\| \to +\infty} \dfrac{|u(x)|}{\|x\|} = +\infty$.

$\mathcal{B}_r = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x\| < r\}$.

On veut montrer que ∇u est surjectif.

1) Si $n = 1$ est-ce le cas ?

2) On suppose $n = 2$ et par l'absurde , ∇u n'est pas surjectif.

• Montrer l'existence de f et $c \in \mathbb{R}^2$ tels que

$f(x) = u(x) - < x, c >$ où ∇f ne s'annule pas .

• Montrer que $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} \dfrac{|u(x)|}{\|x\|} = +\infty$.

Toujours $n = 2$.

3) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \backslash \mathcal{B}_r$, montrer qu'il existe $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2 \backslash \mathcal{B}_r$

tels que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$ avec γ continue.

En déduire que $f(\mathbb{R}^2 \backslash \mathcal{B}_r)$ est un intervalle.

4) Toujours $n = 2$.

Montrer qu'il existe $(x_p) \in (\mathbb{R}^2 \backslash \mathcal{B}_r)^{\mathbb{N}}$ telle que (incohérent) :

$\sup\limits_{\|x\| \geqslant r} f(x) - \dfrac{1}{p+1} \leqslant f(x_p) \leqslant \sup\limits_{\|x\| \geqslant r} f(x)$.

5) Toujours $n = 2$.

Montrer que $f(\mathbb{R}^2 \backslash \mathcal{B}_r) = \mathbb{R}$.

6) Toujours $n = 2$.

Montrer que il existe $(u_p) \in \mathbb{R}^2$ telle que $\forall p \in \mathbb{N}, f(u_p) = 0$ et $\|u_p\| \to +\infty$.

Conclure.

Mines Pottier : 15 mn préparation.

Exo 1 :

Sur $]-1, 1[$, $\varphi(x) = \arcsin^2(x)$.

Ceci est une question de cours : p 18 du vôtre.

1) Montrer que φ DSE sur un ensemble à déterminer.

2)Trouver une équa diff vérifiée par φ, en déduire le DSE.

Exo 2 : Très proche du cours.

Soit $\psi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$, $\psi(P) = (1-X^2)P" - 2XP'$, muni du ps $(P,Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} PQ(t)dt$.

1) Endomorphisme ?

2) Soient P_1, P_2 des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes.

Montrer qu'ils sont orthogonaux.

3) Signe des valeurs propres ?

4) Soit ψ_n la restriction à $\mathbb{R}_n[X]$, endomorphisme.

5) ψ_n DZ ?

6) Soit $P_i = (1-X^2)^i$, et $Q_i = P_i^{(i)}$.

Mq $(Q_0, ..., Q_n)$ est une bon de DZ.

7) $\|Q_n\|^2$?

Sol :

Mines-Ponts : Vermel.

Exo 1 : Presque du cours.

Soit $(E, \|\|)$ un plan euclidien et (u, v) une base (unitaire) de E.

1) Montrer que : $\exists\theta \in]0, \pi[/(u, v) = \cos(\theta)$.

2) Soient $i = \dfrac{u+v}{\|u+v\|}$ et $j = \dfrac{u-v}{\|u-v\|}$, montrer que c'est une bon.

Exprimer (i, j) en fonction de θ.

3) Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ défini par : $\varphi(x) = \lambda(x|u)u + \mu(x|v)v$.

A quelles conditions sur (λ, μ) , φ est-il un automorphisme orthogonal.

Exo 2 : typé MPSI...

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des bijections de $[\![1, n]\!]$ dans lui même.

Soit $\mathcal{D}_n = \{\sigma \in \mathcal{S}_n / \forall i \in [\![1, n]\!], \sigma(i) \neq i\}$, $d_n = card(\mathcal{D}_n)$.

1) Calcul de d_1, d_2, d_3.

2) En supposant que $\forall n \geqslant 3, d_n = (n-1)(d_{n-1} + d_{n-2})$.

Montrer que $\forall n \geqslant 1, d_n = (n!) \sum_{2}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

3) On prend σ au hasard dans $\mathcal{S}_n$.

Soit $E_n(k)$, l'événement "σ admet exactement k points fixes".

Exprimer $\mathcal{P}(E_n(k))$ en fct des d_i.

4) Prouver ce qui a été admis.

Sol : exo 1 :

Meslin : Centrale 2.

E ensemble des fonctions continues bornées sur $\mathbb{R}$.

Pour $f \in E$, $N_0(f) = \sup_{\mathbb{R}}(f)$ et $\Phi(f)(x) = \int_0^{\infty} \arctan(tx).\frac{f(t)}{1+t^2} dt$.

1) Mq Φ endomorphisme de E.

2) Soit $f \in E$, mq $\Phi(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_*^+$.

3)a) Info Python : Tracer $g = \Phi(f_0)$ sur $[0, 5]$, où $f_0 : x \mapsto 1$.

Conjecturer $\lim_{\infty} g(x)$, puis la cacluler.

b) Mq g est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_*^+$, calculer g'.

c) Info Python : Regarder $g(x) + g\left(\frac{1}{x}\right)$ sur Python.

Calculer $g(x) + g\left(\frac{1}{x}\right)$.

4) En déduire $\sum_{0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Meslin : Centrale 1.

Soit $d_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec $d_A(M) = MA$.

Soit $g_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec $d_A(M) = AM$.

Soit $\Phi_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec $d_A(M) = AM - MA$.

1) Mq que Φ_A est un endomorphisme non injectif de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Déterminer son rang lorsque $A = diag(1, 2, ..., n)$.

2) $\psi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$., $B \longmapsto \Phi_B$.

Montrer que ψ est linéaire et donner son noyau.

3) On suppose qu'il existe une puissance s telle que $A^s = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

Montrer que $(\Phi_A)^\beta$ est nulle à partir d'une certaine puissance.

Sol sur demande .

CCINP Micoulot exo 1 :

Voir 1202 année 2019 (corrigé tapé).

Exo 2 : Soit une urne avec a boules blanches et b boules noires.

On tire n boules avec REMISE, on note B_i l'événement "on a tiré i boules blanches".

1) Probabilité de B_i ?

2) Montrer que : $\displaystyle\sum_{0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2i} x^{2i} = \frac{(1+x)^n + (1-x)^n}{2}$.

3) Quelle est la probabilité que i soit pair ?

CCINP Ramaut exo 1 :

Exo 1 : On donne $\displaystyle\int_0^\infty exp(-t^2)dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

On étudie $I = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{t}}{e^t - 1} dt$.

1) Existence ?

2) Montrer que $I = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2} \displaystyle\sum_1^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$.

Exo 2 :

On étudie le déplacement d'une puce sur un ensemble de 3 points $\{A, B, C\}$.

Au rang n la puce avec équiprobabilité d'aller sur l'une des deux autres cases.

On note $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $M = J - I_3$.

On note $U_n = \begin{pmatrix} \mathcal{P}(A_n) \\ \mathcal{P}(B_n) \\ \mathcal{P}(C_n) \end{pmatrix}$, avec A_n : la puce est en A au rang n.

1) Exprimer U_{n+1} en fonction de U_n.

2) M est-elle diagonalisable ? Donner ses sous espaces propres.

Exprimer M^n de cette manière.

3) Donner un polynôme annulateur de J.

Faire la division euclidienne de $(X - 1)^n$ par ce polynôme et en déduire M^n.

4) Déterminer $\lim\limits_{\infty} U_n$.

Sol : Disponible.

CCINP Perla exo 1 :

Feuille 4 84 et 1219 ccp 19.

Exo 2 :

$I = \displaystyle\int_0^1 \frac{t.\ln^2(t)}{(t-1)^2} dt$.

1) Existence ?

2) Montrer que $I = 2\left(\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^3}\right)$.

Sol : disponible.

CCINP Mosson :

Exo 1 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle vérifiant $A^3 + 9A = O$ (1).

1) Montrer que $Sp(A) \subset \{0, 3i, -3i\}$.

2) A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?

3) A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

4) Si n impair mq A n'est pas inversible.

5) Montrer qu'il n'existe pas de matrice symétrique réelle non nulle vérifiant (1).

6) Donner une solution dans les cas $n = 4$ et $n = 5$.

Exo 2 :

Soit pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n dt$.

1) Mq a_n converge et donner sa limite.

2) Mq $\sum (-1)^n a_n$ converge.

3) On considère $\sum a_n x^n$ de rayon R, de somme f.

a) Mq $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \geqslant \dfrac{1}{2n+1}$.

b) En déduire R.

c) Mq $qqsn \in \mathbb{N}, (2n+3)a_{n+1} = 1(n+1)a_n$.

d) En déduire une équa diff d'ordre 1 vérifiée par f.

e) Conclure.

Sol : si vous voulez.

CCINP Dubois.

Exo 1 :

1) Trouver a, b, c tels que :

$$\frac{1}{t(t^2-1)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t+1} + \frac{c}{t-1}.$$

2) Résoudre l'équation différentielle :

$t(t^2-1)x' + 2x = t^2$.

Sur $]0,1[$ puis sur $]1,+\infty[$.

3) Sur $\mathbb{R}_*^+$.

Sol : sur demande.

Exo 2 :

Voir 1224 CCP 19 .

CCINP Loisel.

Exercice. 1
n candidats passent le permis de conduire avec chacun une probabilité $p \in]0,1[$ de le réussir.

Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de reçus .

1) Donner en justifiant la loi de X .

2) Les recalés repassent l'examen avec la même probabilité de réussite .

   On note Y la variable aléatoire représentant le nombre de reçus au 2 ème passage .

-i- Soit $i \in [0, n]$. Déterminer, pour $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(Y = k | X = i)$.

-ii- Prouver que $Z = X + Y$ suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres .

-iii- Déterminer l'éspérance et la variance de Z.

Exo 2 :

Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, et S le système différentiel associé.

1) A est-elle diagonalisable ?

2) Résoudre S.

Sol : classique mais dispo sur demande (les 2) .

Mines-Ponts Meslin.

Exo 1 :

On identifie $\mathbb{R}^4$ avec $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

1)a) Soit $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, antisymétrique et inversible, pour tout l'exo.

Mq $\forall X \in \mathbb{R}^4$, $X^T AX = 0$.

b) En déduire que pour $X \in \mathbb{R}^4$ non nul,

$$rg(AX, X) = 2$$

2)a) Mq $\exists (U, \lambda) \in \mathbb{R}^4 \backslash \{\overrightarrow{0}\} \times \mathbb{R}^*$ tq $A^2U = \lambda U$.

b) Quel est le signe de λ ?

c) Soit $P = vect(U, AU)$, mq P stable par A.

3) Question en plus ?

Exo 2 :

Le fameux exo 1 de la feuille 3 des evn.

Bonux : Soit X variable aléatoire entière, que dire de $\mathbb{E}(e^{tX})$?

Rq : perso , un exo bonux et on ne se rappelle pas de Q3 ? ?

Invitation à Dorian, délégué exceptionnel de regarder mes suggestions de Q3 !

Sol :

Mines-Ponts Roche Louis.

1) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$.

Là l'interrogateur se place ds un cadre spécifique, il veut les extremas globaux.

Il est très logique d'appliquer le protocole du cours, plus tard....

2) f admet-elle des extremas globaux sur $B_f(0,2)$? Si oui ...

Sol :.

Centrale 1 : Perla Flament.

X variable aléatoire discrète, F sa fonction de répartition.

1) Montrer que $\lim\limits_{\infty} F\left(x + \dfrac{1}{n}\right) = F(x)$.

En déduire que F est continue à droite en tout point.

Calculer F dans le cas d'une $\mathcal{G}(p)$, $p \in]0,1[$.

2) X variable aléatoire entière, on suppose l'existence de son espérance.

Montrer l'intégrabilité de $x \mapsto 1 - F(x)$.

Puis que $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\int_0^\infty (1 - F(x))dx$.

3) ? ?

Sol :

Centrale 2 Roche : exercice très intéressant mais hélas incomplet.

$$f(x)=\sum_{0}^{+\infty}\frac{\sin((2n+1)x)}{(2n+1)^3}$$

1) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.

Montrer que f est périodique.

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

2) Majorer le reste.

Proposer un script qui renvoie une fonction g telle que $|f(x)-g(x)|\leqslant 0^{-3}$.

3) Soient les fonctions s de classe $\mathcal{C}^2$ dans $[0,\pi]\times]0,+\infty[$ telles que

$$\forall t\in]0,+\infty[,\forall x\in[0,\pi]\left\{\begin{array}{c}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\\ u(\pi,0)=f(x)\\ u(\pi,t)=u(0,t)=0\end{array}\right.$$

a) $u(x,t)=\sum\dfrac{\sin((2n+1)x)}{(2n+1)^3}e^{-(2n+1)^2t}$

Vérifier que u appartient à l'ensemble .

b) On veut montrer l'unicité de la solution.

On suppose u, v deux fonctions de cet ensemble.

Etudier les variations de $B(t)=\displaystyle\int_0^\pi\left(u^2-v^2\right)$.

Sol :

Incomplet et des zones d'ombres...

Mines telecom Boquet.

DDL 42 très clair.

Exo 1 :

1) Convergence de $\sum \frac{(-1)^n}{n}$.

2) On pose $R_n = \sum_{k>n} \frac{(-1)^k}{k}$, déterminer un équivalent.

Indication ; considérer $R_n \pm R_{n+1}$.

Exo 2 :

Déterminer les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ symétriques non dz.

Même question avec le rang égal à 1.

Sol : exo 1 :

Centrale 1 Boquet :

Soit $\alpha > 0$, $(E) : y' + \alpha y - xy^2 = \alpha$.

1) Montrer qu'il existe une unique solution DSE sur $]-1, 1[$ tq $y(0) = 1$.

Montrer que $y(x) = \mathcal{O}_{x \to 1}\left(\frac{1}{x-1}\right)$.

2) Soit $f \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R}),\ f(0) = f(1) = 0$.

Montrer l'existence de $I = \displaystyle\int_0^1 t^\alpha [f'(t) + y(t)f(t)]^2 dt$.

Puis une inéquation différentielle, laquelle ?

Centrale 1 Vermel.

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$.

$\forall j \in \mathbb{N}$, $m_j = \displaystyle\int_0^1 f(u)e^{ju} du$.

1) Etudier la convergence de $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} m_{kn} e^{-knt}$ sur $\mathbb{R}$.

2) Soit $\Phi_n(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} m_{kn} e^{-knt}$.

a) Montrer que $(\Phi_n(t))_{\mathbb{N}}$ est simplement convergente.

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Phi_n(t) = \displaystyle\int_0^1 f(u) e^{-e^{n(u-t)}} du$.

3) On fait l'hypothèse que $\forall j \in \mathbb{N}$, $|m_j| \geqslant U$.

a) $\forall t \in]0,1]$, montrer que :

$\Phi_n(t) - m_0 = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} m_{kn} e^{-knt} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$

b) Montrer que f est la fonction nulle.

Maths 1 Centrale. Loisel.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note,

$$K = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^n, \quad m_{i,j} \in [-1,1]\}$$

1) Montrer que K est convexe.

Montrer que K est borné et qu' il atteint som maximum et son minimum...

2) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer qu' il existe une unique matrice $M_0 \in K$ telle que pour toute matrice $M \in K$,

$$\|A - M_0| \leqslant \|A - M\|$$

(Avec $\|M\| = \sqrt{tr\,(M^\top M)}\Big)$.

Sol :

Maths 2 Mosson.

On cherche le plus petit d appelé D et le plus grand c (appelé C)

$\dfrac{1}{n-c} \leqslant \underbrace{\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}}_{=R_n} \leqslant \dfrac{1}{n-d}(*).$

1) Justifier l'existence de R_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

2) a) Ecrire une fonction Reste (n) calculant une valeur approchée du reste.

b) On suppose que C existe. Mq $C \geqslant 0$.

c) Ecrire une fonction Recherche $C(N)$ calculant une valeur approchée de C à 10^{-3}

près vérifiant (*) pour $n \in [\![1, N]\!]$.

d) On suppose que D existe et $D \leqslant 1$.

Ecrire de même Recherche $D(N)$.

e) Tracer Recherche C et Recherche D en fon ction de N pour $N \in [\![1, 10]\!]$.

3) Soit $\varphi(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)^2}$.

Montrer que φ est définie, strictement positive, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

(4) On définit $\forall x > 0, G(x) = \psi^2(x) + \psi'(x)$.

a) Déterminer la limite de G en $+\infty$.

b) On suppose que pour tout $x > 0, G(x+1) - G(x) < 0$.

Montrer que $G(x) > 0$ pour tout $x > 0$.

5) ? ? ?

Mines ponts (15mn prepa) Le Cozannet.

Exo 1 :

Pour $x \in]-1, 1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Montrer que $(x^n - 1)^2 = \displaystyle\prod_1^n \left(x^2 - 2x\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + 1\right)$.

2) Calcul de $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \ln(x^2 - 2x\cos(t) + 1)dt$.

3) Calcul de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(\theta))d\theta$.

Exo 2 :

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}$.

1) Montrer que $\displaystyle\sum_1^n \frac{e^{in\theta}}{n} = \int_0^1 \frac{e^{i\theta}(1-(te^{i\theta})^n)}{1-te^{i\theta}}dt$

2) Montrer que $\displaystyle\sum_1^n \frac{e^{in\theta}}{n}$ converge,

et $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{e^{in\theta}}{n} = \int_0^1 \frac{e^{i\theta}}{1-te^{i\theta}}dt$.

3) ? ?

Mines Loisel :

Exo 1 :

Soit l'application $f : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M \longmapsto M^T \end{cases}$

1) Déterminer sans trop de calculs χ_f.

2) a) Pour $n \geqslant 2$, on suppose $\alpha f + \beta Id = 0$.

Montrer que $\alpha = \beta = 0$.

b) Déterminer $\{P \in \mathbb{R}[X], P(f) = 0\}$.

3) Soit $n \geqslant 2$, $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ respt les matrices symétriques et antisymétriques.

Soit $g \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$. Mq $g \circ f = f \circ g \Leftrightarrow \begin{cases} g(\mathcal{S}_n) \subset \mathcal{S}_n \\ g(\mathcal{A}_n) \subset \mathcal{A}_n \end{cases}$.

Exo 2 :

1) Soit f continue de $\mathbb{R}^+$ vers lui-même tq $I = \displaystyle\int_0^\infty f(t)dt$ cv.

Mq $J = \displaystyle\int_0^\infty e^{-t}f(t)dt$ cv.

2) Pareil mais dans le cas où g est continue de $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}$.

Sol :

Mines Mosson(prépa 15 mn) .

Exo 1 :

Soit E l'ev des suites réelles et φ l'endomorphisme qui envoie $(u_n)_{\mathbb{N}^*}$ sur $(v_n)_{\mathbb{N}^*}$.

Tel que $v_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_1^n u_k$.

1) Montrer que φ est un automorphisme.

2) Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de φ

Exo 2 :

Soit $x \in \mathbb{R}_*^+$, $(n,p) \in \mathbb{N}^2$.

On définit $J_{n,p}(x) = \displaystyle\int_{-x}^{x} t^p(x^2-t^2)^n e^t dt$.

1) Mq $\forall n \in \mathbb{N}$, il existe deux polynômes $A_n(x)$ et $B_n(x)$ de degrés au plus n tq :

$$J_{n,0}(x) = A_n(x)e^x + B_n(x)e^{-x}$$

2) Une équa diff ? ? J'ai peut-être une idée.

Sol exo 1 :

Centrale 1 Mosson :

On pose pour $n \geqslant 2$, $P_0 = 2$, $P_1 = X$, $P_n = XP_{n-1} - P_{n-2}$.

1) Etudier degré et parité de P_n.

2) Montrer que $\forall n \geqslant 2, \forall z \in \mathbb{C}^*$, $P_n\left(z+\dfrac{1}{z}\right) = z^n + \dfrac{1}{z^n}$.

3) Mq $\forall n \in \mathbb{N}$, P_n admet n racines réelles 2 à 2 distinctes.

Sol :

CCINP De Bouet :

Exo 2 :

$$A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \quad \alpha + \beta = \gamma; (\alpha, \beta, \gamma) \in (\mathbb{R}^*)^3$$
$$B = \begin{pmatrix} \alpha A & \beta A \\ \gamma A & 0_3 \end{pmatrix}$$

1) χ_B en fonction de χ_A ?

2) Valeurs propres de B en fonction de celles de A ?

3) Montrer que si $X \in \mathrm{Ker}(A)$, $\begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(B)$.

4) En déduire $\dim(\mathrm{Ker}\, B) \geqslant 2 \dim(\mathrm{Ker}\, A)$.

5) Je ne m'en souviens plus...

Je propose 5) Démontrer que 4) est une égalité.

6) Retrouver que B inversible ssi A aussi.

Exo 1 :

Pour $p \in \mathbb{N}$, on pose
$$a_p = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^p}{2^n}$$

1) Montrer que a_p existe.

2) Exprimer a_p en fonction de $a_0, \ldots, a_{p-1}$.

Kdo : Développer $(n+1)^p$ par binôme.

b) En déduire que $a_p \in \mathbb{N}$.

Sol :

Centrale 1 Le Cozannet :

Rq : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(t)dt = \frac{\pi}{2}\frac{(2n)!}{(n!)^2}\frac{1}{4^n}$. On pose $\varphi(x) = \displaystyle\sum_0^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}$.

1) Montrer que φ est $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $\mathbb{R}$.

- Montrer que φ est croissante $]-1,\infty[$.

- Montrer que $\forall p > 0, \varphi^p(x) \geqslant 0$.

2) Montrer que $\varphi(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cosh(2\sqrt{x}\sin(t))dt, x \geqslant 0$.

Et $\varphi(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cosh(2\sqrt{-x}\sin(t))dt, x \leqslant 0$.

3) Montrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\infty} \varphi(xt)e^{-t}dt$.

4) ? ? Equa diff ? ? Limite ?

Centrale 2 Le Cozannet :

On s'intéresse aux polynômes de Hilbert : $k \in [\![0,n]\!]$.

1) Ecrire un programme renvoyant les ℓ premiers polynômes de Hilbert.

Comparer deux polynômes écrits, l'un en base canonique et l'autre en base de Hilbert.

Bref un programme qui teste l'éventuelle égalité $P = Q$.

2) Soit $T_n \in \mathcal{L}(\mathbb{C}_n[X])$ défini par $(T_n(P))(X) = P(X+1)$. $M = \mathcal{M}_C(T_n)$.

a) Soit $L \in \mathbb{C}_n[X]$, montrer qu'il existe (α_j) tq :

$$L = \sum_0^n \alpha_j H_j$$

b) Mq $U = M^T.V$ avec ,

$V = (\alpha_0, ..., \alpha_n)^T$ et $U = (L(0), ..., L(n))^T$.

c) Donner l'expression des coordonnées de V en fonction de celles de U.

d) Soit $L \in \mathbb{C}_n[X]$ tq $L(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.

Mq $\forall j, \alpha_j \in \mathbb{Z}$.

3)a) Comparer 2 polynômes explicites, l'un en base canonique et l'autre en H_k

avec le but de constater que $R(X) = T(X+1) - T(X)$.

b) Soit $R \in \mathbb{C}_n[X]$, montrer qu'il existe $T \in \mathbb{C}_n[X]$ tq

$T(0) = 0$ et $R(X) = T(X+1) - T(X)$.

Déterminer T.

Indication : regarder l'application de $\mathbb{C}_n[X]$ vers $\mathbb{R} \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$,

qui envoie T sur $T(X+1) - T(X)$.

Centrale 1 Sefrioui.

L'étude est dans $[0,1]^2$.

$$K(x,y) = \begin{cases} x(1-y) & si \quad x \leqslant y \\ y(1-x) & si \quad x > y \end{cases} .$$

1) Montrer que K est continue et à valeurs $\left[0, \dfrac{1}{4}\right]$.

2) Trouver l'équation du plan tangent à la surface $z = K(x,y)$, pour $x < y$.

En déduire un vecteur normal.

3) Soit $k \in \left[0, \dfrac{1}{4}\right]$, trouver la longueur de la courbe $K(x,y) = k$.

Montrer que $L_k \geqslant$.

Mines telecom Chantran (Ensam, Centrale, CCINP)...

Exo 1 : $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $\det(A) = 10$, $Tr(A) = -6$, $A - I_3 \notin Gl_3(\mathbb{R})$.

Déterminer A^{-1}.

Sol :

CCINP : Chantran.

Exo 1 : $E = \mathcal{M} - n, 1(\mathbb{R})$.

Posons $\forall (X,Y) \in E^2$, $(X|Y) = X^T Y$.

1) Montrer que ... est un produit scalaire.

2) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, mq que $(Im(A))^T = \ker(A^T)$.

3) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $Y \in E$ fixés.

$f : \begin{cases} E \longrightarrow \mathbb{R} \\ X \mapsto \|AX - Y\| \end{cases}$.

Mq $f(X) = \inf\{f(z), z \in E\} \Leftrightarrow A^T(AX - Y) = 0$.

Exo 2 :

Soit $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt$.

1) Donner la définition d'un rayon de convergence d'une série entière.

2)a) Donner le rayon de convergence de $\sum u_n x^n$.

b) Soit $x \in]-R, R[$, $t \in]0,1[$.

Montrer qu' il existe (a,b,c) réels tq ;

$\dfrac{1}{1+t^2} . \dfrac{1}{1-xt} = \dfrac{at+b}{1+t^2} + \dfrac{c}{1-xt}$.

c) Calculer S.

d) Montrer alors que S est continue en -1 et calculer $S(-1)$.

Centrale 2 Chantran.

Une urne avec une boule rouge et une noire.

On réalise des tirages avec remises et à chaque tirage on ajoute une boule de la même couleurque celle tirée.

On appelle X_n et Y_n les variables aléatoires représentant le nombre de boules

rouges et noires après n tirages.

De plus posons $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2,\ P_n(u,v) = \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^*} P(X_n = i, Y_n = j) u^i v^j$.

1)a) Réaliser un programme " simulation" qui prend en argument n et qui renvoie X_n.

b) Réaliser un programme " moyenne " qui prend en argument n et un nouvel entier N et qui renvoie une liste L représentant la répartition du nombres de boules rouges X_n dans N simulations.
