© Maximilien CCINP :

Analyse ; $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{t}}{e^t - 1} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_1^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$.

Fait en révisions, géométrique, Fubini...

Algèbre $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, tq $M^2 + M^T = I_n$.

2) Si M symétrique , pver dz ($\mathbb{C}$) et que $tr(M) \neq 0$, et inversible.

3) SS la symétrie , mq dz.

4) Mq M inversible ssi 1 pas vp.

Exo technique qui a été fait en révisions.

2) Attention à ne pas mélanger les hypothèses, et calculs...

Si M symétrique, $M^2 + M = I_n$, poly annul scindé simple : $(X^2 + X - 1)$.

Donc Dz, le terme cst est non nul donc inversible.

Les racines sont $\dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$, seules vp possibles.

Si la trace est nulle, il vient $q.\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) + (n-q).\left(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) = 0$.

Or $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$ donc comme $\sqrt{5}(q - (n-q)) + (-q - (n-q)) = 0$.

Il en sort $n = 0$ absurde.

3) On a $M = I_3 - (M^T)^2$, on reporte , un poly annul est $X(X-1)(X^2 + X - 1)(*)$.

Poly annul scindé simple, dz !

4) $M^T = (I - M)(I + M)$, or -1 n'est pas vp (*).

Donc $\det(M) = K \det(I - M)$ avec $K \neq 0$. Gagné.

Voir aussi rms centrale 2021 , 1012

Et marie ds le même fichier.

Algèbre.

$A^T + A^2 = I_3$ et $tr(A) = 0$.

1) Mq les vp sont à récolter parmi les racines des polynômes annulateurs.

2) Y-a-t-il une solution ? Kdo tver un poly annulateur.

Algèbre 1) C'est du cours, si tu as oublié, relire...

2) On a $A = I_3 - (A^T)^2(*)$, on remplace , le poly est $X(X-1)(X^2+X-1)$.

Racines possibles $\left\{0, 1, \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\right\}(***)$.

Là, attention A annulé sur $\mathbb{C}$ par un poly scindé simple, donc $\mathbb{C}$ dz.

A^T est aussi dz pour les mêmes raisons.

Or elles commutent (*) donc codz ! ! Savoir refaire ! Exo 87 F4.

Rq inutile et voir piège Vuidel ccinp même fichier.

Soient (a, b, c) les vp après dz.

Donc, on voudrait $a + b + c = 0$ et $a + b + c + a^2 + b^2 + c^2 = 3$.

D'abord les cas avec uniquement des 0 et des 1 disparaissent vite.

Donc $a = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Et alors $a^2 + a = 1$.

Donc $b = \dfrac{-1 \mp \sqrt{5}}{2}$, car $\sqrt{5}$ doit disparaitre. Et alors $b^2 + b = 1$.

Il sort de la trace nulle $c = 1$, et le 3 est un 4, impossible.

Voir aussi Maximilien de ce fichier. et rms centrale 2021 exo 1012.

Sot E ev préhilbertien, F sev de E.

1) Montrer que $F \subset (F^{\perp})^{\perp}$.

2) Ici $E = \mathbb{R}[X]$.

On prend le produit scalaire $< P, Q >= \displaystyle\int_0^1 PQ(t)dt$.

$F = \{P \in E, P(1) = P'(1) = 0\}$.

Donner $F^{\perp}$ et $(F^{\perp})^{\perp}$.

3) Donner une condition suffisante pour avoir $F = (F^{\perp})^{\perp}$.

Sol 1) Cours .

2) On caractérise les éléments de F comme de la forme $(X-1)^2 Q$,

ce qui simplifie bcp l'exo fait en classe avec $P(1) = 0$.

Soit Q ds l'orthogonal, on traduit l'orthogonalité avec $(X-1)^2 Q$, le même Q ! !

Par thm nullité intégrale $Q = 0$.

Bref $F^{\perp} = \{\overrightarrow{0}\}$ et le double orthogonal E.

3) Syntaxe ambigüe, la dimension finie suffit, mais en plus subtil,

$E = F \bigoplus F^{\perp}$ aussi cf exo 47 eve.

Exercice 2 :

a) Déterminer la limite de $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{nt(1-t)}{(nt)^2 + (1-t)^2} dt$.

b) $2^{\text{ème}}$ question non traitée avec l'étude des $\sum {I_n}^2$ et $\sum I_n$.

Analyse :

a) Cv dominée, la fonction cv simplement vers la fct nulle.

La fonction est dominée par 1/2 qui est intégrable sur le segment.

Ce contrôle vient de $2ab \leqslant (a^2+b^2)$.

b) On va montrer que $I_n \underset{\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)}{n}$.

Il faut me relire avec attention, j'ai pu dérailler.

Un plan logique pour débuter :

On pose $u = nt$ de classe $\mathcal{C}^1$.

On arrive à $\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^{\infty} g_n(u)du$, avec $g_n(u) = \mathbb{1}_{[0,n]}\dfrac{u(1-\frac{u}{n})}{u^2+(1-\frac{u}{n})^2}$.

Alors à u fixé, quand n tend vers l'infini, on cv simple vers $\dfrac{u}{1+u^2}$.

Et là , désastre, pas intégrable !

Autre essai logique, on met $\dfrac{1}{n}$ en facteur, cv simple vers $g(t) = \dfrac{1-t}{t}$. Aïe...

Une idée plus poussée, on a vu apparaitre g, mais pb en 0^+.

Donc je l'enlève et je la fais apparaitre.

Pour gérer tout ça, je coupe en $1/n$.

Il faut relire , car j'ai vraiment pu écrire une...

On arrive à : $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{nt(1-t)}{(nt)^2+(1-t)^2}dt + \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{(1-t)dt}{nt} + \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{nt(1-t)}{(nt)^2+(1-t)^2} - \frac{(1-t)}{nt}dt.$

On doit controler le premier morceau par du négligeable devant l'équivalent envisagé.

$nt \leqslant 1$, la fonction est donc dominée par $\dfrac{(1-t)}{(nt)^2+(1-t)^2} \leqslant \dfrac{1}{1-t}$,

On calcule cette intégrale, qui se domine par $\dfrac{1}{n}$, grâce à $\ln(1+u) \leqslant u$. Bien.

Deuxième morceau : on le calcule, $\dfrac{\ln(n)}{n} - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}$, parfait.

Le troisième , je n'arrive pas à le controler par cv dominée, j'y croyais pourtant...

A la main : je réduis au même dénominateur.

Je passe le controle en valeurs absolues, $nt \geqslant 1$.

Il vient $\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{(1-t)^3 dt}{n^2t^2+(1-t)^2} \leqslant \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{1}{n^2t^2} dt = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}$. Youpi !

Ai-je raté plus simple ? Une cv dominée ? ? ?

Mezalor, la série des I_n est clairement divergente et celle des carrés est convergente car négligeable devant $1/n^{3/2}$.

Exo 2 : Soient f et g continues de $[0,1]$ dans $[0,1]$ telles que

$$f \circ g = g \circ f$$

1) Mq l'ensemble des points fixes de f(et de g) admet un maximum et un minimum.

2) Montrer qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que $f(c) = g(c)$

Sol :

1) Les ensembles de points fixes sont non vides ,

(TVI à $h(t) = f(t) - t$) qui est cie (cours sup).

Ils sont donc majorés et minorés. Donc possèdent des bornes sup et inf.

Or ces ensembles de points fixes sont des fermés, comme images réciproques de 0 par h cie.

Donc ils contiennent leurs sup et inf.

2) Je remarque que si c est un point fixe de f, alors $g(c)$ aussi.

Je nomme β le plus grand pour f (resp α) le plus petit.

$g(\beta)$ est là, donc majoré par $\beta = f(\beta)$. De même $g(\alpha) \geqslant \alpha = f(\alpha)$.

Donc $d = f - g$ est positive en β et négative en α. TVI !

© Heinrich CCINP :

Soit $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2 \quad / Sp(A) \cap Sp(B) = \varnothing$.

1) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, polynôme annulateur de A.

Montrer que les valeurs propres de A sont racines de P.

2) Montrer que $\chi_A(B) \in GL_n(\mathbb{C})$.

3) Soit $X \in \mathbb{C}^n$. Montier que $AX - XB = 0_{\mathbb{C}^n} \Leftrightarrow X = 0_{\mathbb{C}^n}$.

4) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Montrer qu'il existe un unique $X \in \mathbb{C}^n$ tel que $AX - XB = M$.

Sol a) Clair $\chi_u(v) = \prod_1^r (v - \lambda_i Id)^{m_i}$,

son inversibilité est équivalente à tous les déterminants non nuls.

b) Voir feuille 4 , exo2.19 ou ddl 68.

On écrit $C = PJ_rQ$ où P, Q sont inversibles et $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

L'égalité $AC = CB$ devient $(P^{-1}AP)\, J_r = J_r\, (QBQ^{-1})$.

Si on raisonne par blocs, cela implique que $P^{-1}AP$ et QBQ^{-1} sont triangulaires par blocs, avec le même premier bloc diagonal (de taille r).

Ainsi les polynômes caractéristiques de $P^{-1}AP$ et QBQ^{-1} (donc ceux de A et B) ont un facteur de degré r en commun.

c) $\chi_A = \chi_B$.

1144. CCINP. Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) = \emptyset$.

a) Montrer que, si P est un polynôme annulateur de A,

alors les valeurs propres de A sont racines de P.

b) Montrer que la matrice $\chi_A(B)$ est inversible.

c) Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Prouver : $AX = XB \Leftrightarrow X = 0$.

d) Montrer que, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

il existe une unique matrice $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $AX - XB = M$.

Sol :

(Oral Mines-Ponts 2018) ... Tjs les mêmes habitudes.

a) Cours.

Soit A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, à spectres disjoints.

1. On a $\chi_A(X) = \prod_{k=1}^{n}(X - a_i)$, donc $\chi_A(B) = \prod_{k=1}^{n}(B - a_i I_n)$.

Or les spectres de A et B sont disjoints.

Ainsi les $B - a_i I_n$ sont inversibles, donc $\chi_A(B)$ aussi par produit.

2. L'application $\varphi : M \mapsto AM - MB$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Montrons que c'est un isomorphisme.

Soit $M \in \operatorname{Ker}\varphi$, donc tel que $AM = MB$.

Par récurrence immédiate, il vient : $\forall k \in \mathbb{N}, A^k M = MB^k$.

Par linéarité, $P(A)M = MP(B)$, pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$.

En particulier $\chi_A(A)M = M\chi_A(B)$.

Mais $\chi_A(A) = 0$ (Cayley-Hamilton), et $\chi_A(B)$ est inversible.

Ainsi $M = 0$, donc φ est un isomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

En particulier :

$$\forall Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \exists! X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$
$$AX - XB = Y$$

Voir 1144 ! ! !

Exo 1 :

$(a,b) \in \mathbb{R}^3, \quad x \in \mathbb{R}^3 \quad, f(x) =< x/a > a+ < x/b > b$, (a,b) libre.

Q1) Montrer que f est un endomorphisme autoadjoint.

Q2) Montrer que $\ker(f) = \mathrm{Vect}(a,b))^{\perp}$.

Q3) $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3$.

Q4) si $\langle a/b \rangle = 0$, que dire de f ? Reconnaître sa nature et ses éléments propres.

Q5) et si < a/b > non nul ?

Exo 2 : Soit f dérivable sur $[a,b\,[$, continue en b, $f(a) = f(b)$ et $f'(a) = 0$.

Q1) Montrer que il existe c dans $\mathbb{R}$ tels que, $f'(c) = (f(c) - f(a))/(c - a)$.

Q2) Proposer une interprétation géométrique.

Sol : Analyse , classique de première année.

1) Thm de Rolle à $g(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

On a $g(a) = g(b) = 0$ car $f'(a) = 0$.

Donc $\exists c \in]a,b[$ tq $g'(c) = 0$. Gagné.

2) En faisant un dessin avec tgte horizontale en a,

il arrive au point c que la tgte à la courbe passe par le point de départ.

Pour la preuve, on écrit l'équation d'une tgte, on la force à passer par le pt de départ...

Algèbre : 1) Il est clair que f est linéaire par bilin du ps, et de E vers E.

En remplaçant, on a facilement $\forall (x,y), (f(x)|y) = (f(y)|x)$.

2) On écrit $f(x) = 0$, par liberté de (a,b), on a les ps nuls.

Réciproquement : si $x \in \mathrm{Vect}(a,b))^{\perp}$, tout est nul.

Dimension finie, donc le noyau est un droite, car Vect(a, b) est un plan.

Or Vect$(a, b))^{\perp} \oplus$ Vect$(a, b)) = E$.

Or il est visible que $Im(f) \subset$ Vect(a, b), égalité des dim par thm rang fin Q3.

4) On choisit une bon très adaptée, on norme a , puis b , puis leur produit vectoriel.

La matrice ds cette base est : (attention à bien remplacer)...

$\begin{pmatrix} \|a\|^2 & 0 & 0 \\ 0 & \|b\|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ on a les vp et sep, mais si ils sont normés,

on a un projecteur orthogonal sur Vect(a, b).

5) Si les vecteurs a, b ne sont pas normés les calculs sont infectes,

mais le thm spectral s'applique quand même...

Je pense que les vecteurs étaient normés ds l'énoncé.

On regarde ce qui se passe dans ce plan stable.

On pose classiquement $(a|b) = \cos(\theta)$.

Les vp (par poly caract sont $1 \pm \cos(\theta)$).

Les vect propres sont alors classiqement $(1, 1)^T$ et $(1, -1)^T$.

1368. CCINP. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A\left(A^T A\right)^2 = I_n$.

a) Montrer que A est inversible.

b) Montrer que A est symétrique.

c) En deduire que $A = I_n$.

Sol : a) On passe au det , il vaut 1 .

b) D'abord $A^T A$ est symétrique, je passe la relation à la transposée, il en sort que A et A^T sont inverses de la même matrice donc égales.

c) On a eu $A^5 = I_n$ les vp sont racines des poly annul, donc $\lambda \in \mathbb{U}_5$.

Or A est $\mathbb{R}$dz par spectral, donc la seule vp est 1.

1370. CCINP. a) Montrer que $\tan(2a) = \dfrac{\tan(a)}{1-\tan^2(a)}$.

On précisera le domaine de validité de cette formule.

b) Donner le développement en série entière de arctan sur $]-1;1[$.

c) Montrer que $\dfrac{\pi}{8} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{(\sqrt{2}-1)^{2n+1}}{2n+1}$.

d) Trouver une majoration de l'erreur d'approximation de π par

$$S_N = 8\sum_{n=0}^{N}(-1)^n \frac{(\sqrt{2}-1)^{2n+1}}{2n+1}$$

Sol 1159 ccp 21

1159. CCINP. a) Montrer que, pour x dans un domaine D à préciser, $\tan(2x) = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$.

b) Montrer que $\pi = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}(\sqrt{2}-1)^{2n+1}$.

Sol : a) Classique de trigo, le domaine est $]-\pi/2, \pi/2[\setminus \pm\pi/4$ modulo π.

Il suffit de remarquer que $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$ et $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$.

b) Enoncé faux , on reconnait le devt en dse de Arctan, on l'applique en $\sqrt{2}-1$.

On a le droit car le rayon est 1.

Le a) permet en aplliquant en $\pi/8$ de calculer $\tan(\pi/8) = \sqrt{2}-1$.

On reporte.

1372. CCINP. On donne $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

a) Nature de la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n} \int_n^{+\infty} e^{-t^2}\, \mathrm{d}t$?

b) En déduire la nature de la série $\sum_{n \geqslant 1} (-1)^n \int_0^1 e^{-n^2t^2}\, \mathrm{d}t$.

Facile : cssa immédiat , l'objet décroit vers 0, b) c'est la diff de deux séries cssa, l'autre est $\frac{(-1)^n}{n}.J$.

1126. CCINP. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 4 .

a) Soit u un endomorphisme de E tel que $\mathrm{rg}(u) = 2$ et $u^2 = 0$.

i) Montrer que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Im}(u)$.

ii) Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle u est représenté par $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Soit u un endomorphisme de E tel que $\mathrm{rg}(u) = 3$ et $u^4 = 0$.

i) Montrer que $\mathrm{Ker}\,(u^2) = \mathrm{Im}\,(u^2)$.

ii) Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle u est représenté par $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Sol : a)i) $u^2 = 0$ donc $Im(u) \subset \ker(u)$.

Donc égalité par thm du rang et ainsi égalité des dimensions.

ii) Soit (a, b) base de $Im(u) = \ker(u)$.

Soit (c, d) des antécédents de a et b.

La famille (dans cet ordre) a, b, c, d est une base qui nous convient.

Pour la liberté il suffit d'écrire une combinaison linéaire nulle et d'appliquer u.

b)i)$u^4 = \omega$ entraine $(**) Im(u^2) \subset \ker(u^2)$. Montrons l'égalité des dimensiions.

Si $rg(u^2) = 3$ alors $\dim\ker(u^2) = 1$ incohérent avec $(**)$.

Si $(*) rg(u^2) = 1$ alors la matrice (base adaptée à $Im(u) \oplus < \overrightarrow{d} >$) de u

serait $\begin{pmatrix} A & C \\ 0_{1,3} & 0 \end{pmatrix}$.

Car l'image de u est stable par u, les vecteurs colonnes de A génèrent $Im(u^2)$.

Donc $rg(A) = 1$ par $(*)$, le rang de la matrice globale ne pourrait excéder 2. Absurde.

$rg(A) = 0$, absurde pour les mêmes raisons.

Donc $rg(A) = 2$, donc $(**)$ devient une égalité.

ii) Utilisation du a) ? ?

Mon plan est le suivant $u^3 \neq \omega$ car sinon $Im(u^2) \subset \ker(u)$ incohérent par les dimensions.

(Par hypothèse $dim(\ker(u)) = 1$).

Soit un vecteur x_0 tel que $u^3(x_0) \neq \overrightarrow{0}$.

La famille $(x_0, u(x_0), u^2(x_0), u^3(x_0))$ est une base classique qui convient presque

à notre objectif...Il suffit de changer l'ordre des vecteurs.

1147. CCINP. Soient E un espace euclidien de dimension $n, (e_1, \ldots, e_n)$

une bon de E et $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille de vecteurs de E telle que $\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2 < 1$.

a) Montrer que, pour tous $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, $\left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \right\|^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2 \right)$.

b) En déduire que la famille $(e_1 + x_1, \ldots, e_n + x_n)$ est une base de E.

Sol : très scolaire, a) bien sûr C-S , mais attention on a des vecteurs.

$\left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \right\| \leqslant \left\| \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| \|x_k\| \right\| \leqslant C - S$, puis on met au carré.

b) La liberté suffirait, $\sum_{1}^{n} \lambda_k(e_k + x_k) = \overrightarrow{0} \Rightarrow \sum_{1}^{n} \lambda_k(e_k) = -\sum_{1}^{n} \lambda_k(x_k)$,

On regarde les normes au carré, celle de gauche $\sum_{1}^{n} \lambda_k^2$, car Bon.

Puis par l'absurde si un λ_k non nul, on utilise a) à droite, fini.

1086. Soient $\omega \in \mathbb{C}$ et $P = X^3 + \omega X^2 - \bar{\omega} X - 1$.

a) Préciser le nombre de racines rélles de P en fonction de ω.

b) Montrer que P admet au moins une racine de module 1 .

c) Vérifier que, pour toute racine z de $P, |z| \leqslant 1 + |\omega|$.

Sol à la va vite : exo 8 ddl sup, je fais plus simple.

Si α racine, alors $1/\overline{\alpha}$ aussi(*).

Pour a) on traite ω réel, $X = 1$ sol, puis on simplifie,

on étudie le discriminant $\Delta = (r + 1)^2 - 4$.

Si ω complexe, somme racines complexe donc au - un complexe,

mais le produit vaut 1 donc au moins 2 , on remplace attention à $\pm i$.

b) Relire ce qui précède, tout y est ! !

Car si ω vrai complexe, on applique (*) puis on regarde le produit.

c) Si cette racine z est de module inférieur à 1 c'est immédiat.

Sinon, $-z^3 = \omega z^2 - \bar{\omega} z - 1$, donne par IT, $|z|^3 \leqslant 1 + |\omega|(|z| + |z|^2)$.

On sépare suivant $|\omega|$, si supérieur à 1.

$|z|^3 \leqslant |\omega| \frac{|z|^3}{|z|-1}$ on utilise $|z| > 1$.

Il vient $(|z| - 1) \leqslant |\omega|$ voilà !

Puis l'autre cas...

1104. $a \in \mathbb{R}^{+*}$. Soit (u_n) la suite $u_0 = a$ et, pour $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$.

a) Étudier la convergence de la suite (u_n).

b) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière de terme général $u_n x^n$.

c) Démontrer le théorème de Cesàro (énoncé rappelé).

d) À l'aide la suite auxiliaire $\left(\dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}\right)$, étudier la convergence de $\sum u_n x^n$ en $\pm R$.

Sol : a) Enorme classique de sup, suite récurrente, $\mathbb{R}_*^+$ stable par f

qui y est croissante donc u_n monotone.

Or $u_1 \leqslant u_0$ donc suite décroissante minorée par 0 thm limite monotone, cv.

Mais comme f cie , la limite est un point fixe, le seul est 0.

b) Le rayon vaut 1 par Alembert (avec la variable),

on a utilisé un équivalent de $\ln(1 + x)$ en 0.

c) Voir cours et feuille td pour cette démo de ref.

d) Je la nomme w_n, par dl élémentaire elle tend vers 1/2.

On applique Césaro, téléscopage ds la somme, $\dfrac{1}{n}\left[\dfrac{1}{u_n} - \dfrac{1}{u_0}\right] \longrightarrow \dfrac{1}{2}$.

Il vient avec quelques précautions $u_n \sim \dfrac{2}{n}(*)$.

Donc la série entière diverge en $+R$.

Mais en $-R$ énorme piège, interdit de prendre un équivalent pour une série alternée.

Je donne le plan (tordu) DL de w_n, $\dfrac{1}{2} + \dfrac{c}{n} + o(\%)$, on a aussi utilisé(*), $c \neq 0$.

On améliore Césaro, $\dfrac{1}{n}\left[\dfrac{1}{u_n} - \dfrac{1}{u_0}\right] = \dfrac{1}{2} + c.\dfrac{\ln(n)}{n} + o(\%)$.

Il vient avec quelques ""précautions"", $u_n = \dfrac{2}{n} - K\dfrac{\ln(n)}{n^2} + o(\%)$.

Bref cv en $-R$.

Oups, je viens de me relire, u_n tend vers 0 en décroissant, cf a), donc CSSA !

---

727. Soient, pour $n \in \mathbb{N}^*, u_n = \displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\sin^2(n\pi x)}{\tan(\pi x)}\mathrm{d}x$ et $v_n = \displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\sin^2(n\pi x)}{\pi x}\,\mathrm{d}x$.

a) Montrer que $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{\cos(2u)}{u}\,\mathrm{d}u$ converge.

b) Montrer que $v_n \sim \dfrac{\ln(n)}{2\pi}$.

c) Soit $f : x \in]0, 1/2[\mapsto \dfrac{1}{\tan(\pi x)} - \dfrac{1}{\pi x}$. Montrer que f se prolonge par continuité.

d) Trouver un équivalent de u_n.

Sol :

a) Ipp du cours pour revenir en l'infini à $\mathcal{O}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

c) Classe $\mathcal{C}^1$? ? sinon c'est pas gentil...

b) Oui équivalent recevable, car je coupe la borne du bas en $1/n$.

Le morceau éliminé (0,1/n) est controlable par $\mathcal{O}(1)$ grâce à $|\sin(t)| \leqslant t$.

L'autre , cght affine $t = n\pi x$, on linéarise, on utilise a), il sort $\dfrac{\ln(n)}{2\pi} + \mathcal{O}(1)$.

d) Le même équivalent , car la différence tend vers 0 par le lemme de Lebesgue.

---

694. Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \cos\left(n^2\pi\ln\left(\dfrac{n-1}{n}\right)\right)$.

Sol : un DL précis de $\ln(1+u)$ s'impose...

$n^2\pi\ln\left(\dfrac{n-1}{n}\right) = n^2\pi\left(-\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} - \dfrac{1}{3n^3} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^4}\right)\right) = -n\pi - \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{3n} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Il vient $u_n = (-1)^n\cos\left(-\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{3n} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right) = (-1)^{n+1}\sin\left(\dfrac{\pi}{3n} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$.

Attention !!! Trigo...

Et après un DL impeccable cf $\sin(u) = u + \mathcal{O}(u^2)$,

$(-1)^{n+1}\sin\left(\dfrac{\pi}{3n} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right) = (-1)^{n+1}.\dfrac{\pi}{3n} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Attention à la composée des DL...

Série convergente.Clair ? CSSA pour la première et absolue convergence pour la deuxième.

---

709. Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \ln\left(1 + e^{-nx}\right)$.

a) Déterminer le domaine de définition I de f.

b) Montrer que f est continue et strictement décroissante sur I.

c) Montrer que f admet en $+\infty$ une limite finie que l'on déterminera.

d) Trouver un équivalent de f en 0. On donne : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

Sol 709.

1. $t \mapsto f_n(x) = \ln\left(1 + e^{-nx}\right)$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Elle est à valeurs strictement positives.

Pour $x < 0$ on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = +\infty$.

On a $f_n(0) = \ln(2)$ pour tout n.

La série $\sum f_n(x)$ est donc grossièrement divergente pour $x \leqslant 0$.

Pour $x > 0$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 < f_n(x) \leqslant \left(\mathrm{e}^{-x}\right)^n$$

(terme général série convergente).

Ainsi la fonction f est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.

2. Comme chaque f_n pour $n \geqslant 1$, la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Pour $a > 0$, on a $\sup\limits_{x \geqslant a} |f_n(x)| = f_n(a)$ (c'est le terme général d'une série convergente).

Ainsi $\sum f_n$ est CVU sur $[a, +\infty[(a > 0)$.

La continuité de f sur $\mathbb{R}^{+*}$ en résulte.

3. On note que $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = 0$ pour $n \geqslant 1$.

Mais f_0 est constante en $\ln(2)$.

La CVU autorise le théorème de la double limite.

On a donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = \ln(2)$.

La fonction f, décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, a une limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ quand $x \to 0^+$.

Par l'absurde, supposons $\ell \in \mathbb{R}$.

Alors, pour tous $x > 0$ et $N \in \mathbb{N}$:

$$0 < \sum_{n=0}^{N} f_n(x) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \leqslant \ell$$

Quand $x \to 0$, on trouve : $\forall N \in \mathbb{N}, 0 < \sum\limits_{n=0}^{N} \ln(2) \leqslant \ell$, ce qui est absurde.

Ainsi $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = +\infty$.

4. Pour $x > 0, g_x : t \mapsto \ln\left(1 + e^{-xt}\right)$ est continue, décroissante positive sur $[0, +\infty[$.

Par comparaison série-intégrale, on obtient :

$$\int_0^{n+1} g_x(t)\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=0}^{n} g_x(k) \leqslant g_x(0) + \int_0^{n} g_x(t)\mathrm{d}t$$

Le changement de variable $u = \mathrm{e}^{-nx}$ conduit à :

$$\int_0^{n} g_x(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{x} \int_{\mathrm{e}^{-nz}}^{1} \frac{\ln(1+u)}{u} \,\mathrm{d}u$$

On en déduit les inégalités, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{x}\int_{\mathrm{e}^{-(n+1)x}}^{1} \frac{\ln(1+u)}{u}\,\mathrm{d}u \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n} g_x(k) = \sum_{k=0}^{n} \ln\left(1+\mathrm{e}^{-kx}\right) \\
&\leqslant g_x(0) + \frac{1}{x}\int_{\mathrm{e}^{-nx}}^{1} \frac{\ln(1+u)}{u}\,\mathrm{d}u \quad (\star)
\end{aligned}$$

Or $u \mapsto \dfrac{\ln(1+u)}{u}$ est continue sur $]0,1]$.

D'autre part $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\ln(1+u)}{u} = 1$.

Ainsi $u \mapsto \dfrac{\ln(1+u)}{u}$ est intégrable sur $]0,1]$.

Soit $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}\,\mathrm{d}u$.

Quand $n \to +\infty$ dans $(\star)$ on obtient :

$$\frac{J}{x} \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \ln\left(1+\mathrm{e}^{-kx}\right) = f(x) \leqslant \ln 2 + \frac{J}{x}$$

On multiplie $x > 0$.

Quand $x \to 0^+$on obtient : $\lim\limits_{x\to 0} x f(x) = J$.

Ainsi $f(x) \overset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}\,\mathrm{d}u$.

Par ailleurs, on a (sous réserve d'interversion) :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}\,\mathrm{d}u &= \int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}\frac{u^{n-1}}{n}\,\mathrm{d}u \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \int_0^1 \frac{u^{n-1}}{n}\,\mathrm{d}u \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}
\end{aligned}$$

L'interversion est justifiée car $\sum (-1)^{n-1}\dfrac{u^{n-1}}{n}$ est uniformément convergente sur $[0,1]$.

En effet, avec le théorème des séries alternées :

$$\left|\sum_{n=N+1}^{+\infty} (-1)^{n-1}\frac{u^{n-1}}{n}\right| \leqslant \frac{u^N}{N+1} \leqslant \frac{1}{N+1}$$

En conclusion : $f(x) \sim \dfrac{\pi^2}{12x}$ quand $x \to 0$.