Autres Ecoles - PSI

Algèbre

1185. *IMT*. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $z = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$.

a) Donner le module et un argument de $z^k - 1$.

b) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \left| z^k - 1 \right| = 2 \operatorname{cotan}\left(\frac{\pi}{2n}\right)$.

Sol : a) $z^k - 1 = e^{\frac{ik\pi}{n}} 2i \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

b) On report le a) . On passe à la partie imaginaire , somme géométrique , angle moitié.

1186 . T P E . On se donne trois réels distincts a_1, a_2, a_3.

Soit φ l'application de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $\varphi(P) = (P(a_1), P(a_2), P(a_3))$.

a) Montrer que φ est un isomorphisme.

b) On note $(e_k)_1^3$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $L_k = \varphi^{-1}(e_k)$.

Montrer que $(L_k)_1^3$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Expliciter les L_{k}.

Sol : a) Linéaire par développement naturel...

Noyau réduit au vecteur nul en comptant les racines (degré !).

Thm du rang pour finir.

b) Polynôme de Lagrange ! Clair ?

1187. CCINP. a) Rappeler la formule du déterminant de Vandermonde.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On souhaite montrer que la famille $((X + k)^n)_0^n$ est libre.

Soient $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ tels que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k (X + k)^n = 0$.

b) Montrer que pour tout $p \in [\![0, n]\!], \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (X+k)^p = 0$.

c) Montrer que pour tout $p \in [\![0, n]\!], \sum_{i=0}^{n} \alpha_k k^p = 0$. Conclure .

Sol : a) Dérivation naturelle , simplification immédiate.

Si on y voit mal, on le fait avec $n = 3$, avec donc 4 constantes.

b) En faisant des combinaisons linéaires de lignes en lignes, on élimine tout...

Ou plus simple $X = 0$, voir Gabrielle !

c) Nous avons maintenant un VDM (non nul) , solution unique , α_k tous nuls .

1188. CCINP. Soient E un e-v de dimension finie et p, q deux endomorphismes de E.

On suppose que $p+q = \text{id}$ et $rg(p)+rg(q) \leqslant \dim E$. Montrer que p et q sont des projecteurs.

Classique de première année , si ça bloque ne pas hésiter à venir me voir.

Rq : $Im(p) \cap Im(q) = \{\overrightarrow{0}\}$ par Grassman pour débuter.

Puis $p^2 - p = q^2 - q$ en remplaçant, or tout est dans l'intersection des images, c'est nul.

1189. IMT Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$.

Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g \circ f = f$.

a) Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont des projecteurs.

b) Que peut-on dire des rangs de $f, f \circ g$ et $g \circ f$?

c) Montrer que $f \circ g$ est un projecteur sur $\text{Im}(f)$ parallèlement à un sev contenant $\text{Ker}(g)$.

d) On suppose désormais que l'on a en outre $g \circ f \circ g = g$.

Que peut-on dire des rangs de f et g ?

e) Montrer que $E = \text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(g)$.

Sol : Enorme classique de première année.

a) Clair par calcul immédiat.

b) $rg(g\circ f)\leqslant rg(f)$ etc , mieux après.

c) $Im(f\circ g)\subset Im(f)=Im(f\circ g\circ f)\subset Im(f\circ g)$.

La première est tjs vraie , la deuxième par hypothèse.

On projette bien sur $Im(f)$ et $rg(f\circ g)=rg(f)$.

De plus, il est tjs vrai que $\ker(g)\subset\ker(f\circ g)$. Tout y est.

d) On a inversé les hypothèses, $rg(g\circ f)=rg(g)$ or par cours : $rg(g\circ f)\leqslant rg(f)$.

Bref : $rg(f)=rg(g)$.

e) Analyse synthèse : $x=f\circ g(x)+x-f\circ g(x)$ est recevable à la somme .

Pour l'aspect direct : 3 possibilités , thm du rang , l'analyse prouvait l'unicité , on regarde à la main l'intersection qui est nulle car $f(u)\in\ker(g)$ entraine $g(f(u))=\overrightarrow{0}$ puis $f(g(f(u)))=\overrightarrow{0}$ donc $f(u)=\overrightarrow{0}$...

1190. ENSEA. Soieat E un espace vectoriel et $(f_1,f_2,\dots,f_n)\in\mathcal{L}(E)^n$.

On suppose que $f_1+f_2+\cdots+f_n=id(*)$ et que $f_i\circ f_j=0$ pour tous i et j distincts.

a) Montrer que les f_i sont des projecteurs.

b) Montrer que $E=\displaystyle\bigoplus_{1\leqslant i\leqslant n}\mathrm{Im}\, f_i$.

Sol : hyper classique . On prend la relation $(*)$ on compose par f_i , il sort $f_i^2=f_i$.

b) La somme est valide et immédiate . Pour la somme directe (rec compliquée).

On regarde $x=f_1(u_1)+...+f_n(u_n)$ entriane $f_i(x)=f_i^2(u_i)=f_i(u_i)$. Unicité !

1191. ENSEA. Soit $M=\begin{pmatrix}0&-1&-1\\-1&0&-1\\1&1&2\end{pmatrix}$.

a) Déterminer l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associée à M.

b) Montrer qu'il existe $A\in M_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B\in\mathcal{M}_{2,3}(\mathbf{R})$ telles que $M=AB$.

c) Montrer que $BA=I_2$.

Sol : Voilà un bel exo que je ne connaissais pas , à bien regarder.

$M^2 = M$, projecteur de rang (donc trace) 2. $\ker(M) =< (1, 1, -1) >$.

b) Les formats sont recevables... Analysons le pb : Si $M = AB \in \mathcal{M}_3$ alors $Im(M) \subset Im(A)$ mais de part sa taille $rg(A) \leqslant 2$,donc $rg(A) = 2$ et $Im(M) = Im(A)$.

Puis $\ker(B) \subset \ker(M)$ le dernier est de dimension 1 or par thm du rang et la taille $dim \ker(B) \geqslant 1$.

Donc $\ker(B) = \ker(M)$, on "teste" $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ trouvée par l'image de A.

On intuite les deux premières colonnes de B , puis la troisième grâce à $\ker(M)$ et ça marche !

Rq : pas d'unicité, on peut dilater, inverser les colonnes etc...

c) $M^2 = ABAB = M$ donc $A(BA - I_2)B = O_3$ or, par thm du rang , $rg(B) = 2$, B surjective.

De même $rg(A) = 2$, A injective .

Bref $\forall X$, $(BA - I)X = (BA - I)BZ$ or $A(BA - I)BZ = 0$, donc $(BA - I)BZ = 0$ ainsi $(BA - I) = 0_2$, gagné !

1193. CCINP Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et, pour $1 \leqslant i, j \leqslant n, E_{i,j}$ la matrice de $M_n(\mathbb{R})$

dont tous les coefficients sont nuls sauf celui en position (i, j) qui vaut 1 .

a) Si $1 \leqslant i, j, k, \ell \leqslant n$, calculer $E_{i,j}E_{k,\ell}$.

b) Soit f une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour tout couple (A, B) de $M_n(\mathbb{R})^2$,

on ait $f(AB) = f(BA)$. Montrer que f est colinéaire à la trace.

c) Soit g un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $g(I_n) = I_n$ et, pour tout couple (A, B)

de $M_n(\mathbb{R})^2$, $g(AB) = g(BA)$. Montrer que g conserve la trace.

Sol : a) $E_{i,j}E_{k,\ell} = \delta_j^k E_{i,\ell}$.

b) On a $\delta_j^k f(E_{i,\ell}) = \delta_i^\ell f(E_{k,j})$.

Pour $i = \ell$ et $j \neq k$, il vient $f(E_{k,j}) = 0$.

De même si $j = k \neq i = \ell$, on a $f(E_{i,i}) = f(E_{j,j}) = cste$.

On a donc $f(A) = cste \times tr(A)$.

c) Soit $g \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ avec $g(I_n) = I_n(*)$.

$g(M) = \sum_{i,j} m_{i,j} g(E_{i,j})$ or avec exactement les mêmes calculs que en b)

$j \neq k, g(E_{k,j} = 0$ et $g(E_{i,i})$ est constant.

Donc $g(M) = \sum_{i} m_{i,i} g(E_{i,i}) = cste" \times tr(M)$, mais la cste vaut 1 grâçe à $(*)$.

1195. IMT. Soient u, v, w trois suites vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$u_{n+1} = 4u_n - 3v_n - 3w_n$, $v_{n+1} = 3u_n - 2v_n - 3w_n$, $w_{n+1} = 3u_n - 3v_n - 2w_n$.

Exprimer u_n, v_n, w_n en fonction de n, v_0, u_0, w_0

Sol : on interprète matriciellement , $X_{n+1} = AX_n$ avec $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 3 & -2 & -3 \\ 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$

et $X_n = (u_n, v_n, w_n)^T$. On regarde la matrice , trace nulle , déterminant -2 ,

valeur propre évidente -2 associée à $< (1, 1, 1) >$, on regarde $A - I_3$ de rang 1 donc noyau de dim 2.

Le plan associé à 1 est d'équation $a - b - c = 0$, on diagonalise , etc...

$A^n = P^{-1} D^n P$ ...

1196. IMT. Déterminer les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Sol : On regarde de près cette matrice $det = 2$, $tr = 0$, M^2 est diagonalisable $diag(-1, -1, 2)$.

Rq : elle était symétrique réelle.

Maintenant, attention beaucoup de bêtises à raconter si on confond $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$...

Exemple de n'importe quoi :

Si M existe ... on la trigonalise, on aurait des carrés sur la diagonale de son carré.

$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$ on arrive à une absurdité , des zéros d'un côté en désaccord avec le spectre de M^2.

Fin de la parenthèse n'importe quoi.

Suite de la vraie solution .

On remarque grâçe à la diagonalisation que $(M^2 - 2I_3)(M^2 + I_3) = 0_3$.

Donc M est $\mathbb{C}$ digonalisable, car annulée par un polynôme scindé simple.

Ce polynôme (par exemple) est : $(X - i)(X + i)(X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2})$.

On diagonalise M et on met au carré, elle reste diagonale,

donc dans cette base M et M^2 diagonales.

Donc $M = \text{diag}(\pm i, \pm i, \pm\sqrt{2})$, mais M est réelle donc sa trace le restera.

Il ne reste que 4 cas possibles : diag $(i, -i, \pm\sqrt{2})$ et son opposée.

Or , nous avons 4 solutions réelles ds la base de diago : $M = \begin{pmatrix} \pm R_{\frac{\pi}{2}} & 0 \\ 0 & \pm\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Remarque , on a utilisé que la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ au carré est $-I_2$.

1197. St Cyr Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a+b & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$ est diagonalisable

et trouver ses élements propres.

Sol : facile , I_n restera diagonale, donc on regarde $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On remarque e_2, $e_1 + e_3$ et $e_1 - e_3$.

On arrive à diag $(a + b, a + b, a - b)$.

1198. *IMT*. On rappelle que si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(K)$ dont les colonnes sont notées

$C_1, \ldots, C_n$, alors pour tout $X = (x_1, \ldots, x_n)^T \in K^n, AX = \sum_{j=1}^{n} x_j C_j$.

a) Déterminer le rang de la matrice $Z = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Calculer $C_1 + C_5$. En déduire un élément propre de Z.

c) Calculer $C_1 + C_5 - C_3$. En déduire un élément propre de Z.

d) Achever la réduction de Z.

Sol : Surtout pas de χ...

Sur les conseils de l'énoncé, $f(e_1 + e_5) = 2(e_1 + e_5)$, 2 est vp et on a un vect propre associé.

De même, $f(e_1 - e_5) = \overrightarrow{0}$, 0 est vp et on a un vect propre associé.

$f(e_1 - e_3 + e_5) = (e_1 - e_3 + e_5)$, 1 est vp et on a un vect propre associé.

On regarde $Z - I_5$ de rang 3 noyau dim 2.

On regarde la trace , on y a déjà "installé" $2, 0, 1, 1$. Il manque donc -1.

Pour -1 on résout le système : $< (0, 1, 0, -1, 0) >$.

Pour 1 , $a + 2b + c = 0$ avec $d = b$ et $a = e$.

On a fini la diagonalisation.

1201. CCINP. Soient E un espace vectoriel de dimension n, ℓ une forme linéaire non nulle sur E et a un vecteur de E non nul.

On pose $f : x \in E \mapsto \ell(a)x - \ell(x)a$.

a) Montrer que f est un endomorphisme de E.

b) Calculer $f(a)$.

c) Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$.

d) Calculer $f(\mathrm{Ker}(\ell))$.

e) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

f) On suppose $\ell(a) = 0$. Calculer f^2 ; en déduire un polynôme annulateur de f.

Retrouver le résultat de la question $e)$).

Sol : voici un exo intéressant à bien comprendre.

a) Clair par linéarité de ℓ.

b) $f(a) = \overrightarrow{0}$. Ne pas confondre 0 et $\overrightarrow{0}$...

c) Il faut discuter suivant les paramètres, si $\ell(a) \neq \overrightarrow{0}$, par double inclusion $\ker(f) =< a >$.

Sinon , le noyau revient à $\ell(x) = \overrightarrow{0}$, soit un hyperplan H .

d) Si $\ell(a) \neq 0$, $f(\ker(\ell)) = \ker(\ell) = H$.

Sinon, $f(\ker(\ell)) = \{\overrightarrow{0}\}$.

e) Si $\ell(a) \neq \overrightarrow{0}$, on peut diagonaliser en base naturelle.

Ici $E =< a > \bigoplus H$, avec base adaptée $\mathrm{diag}(0, \ell(a), ..., \ell(a))$.

Sinon $\ell(a) = 0$, $E = H \bigoplus < \overrightarrow{y} >$.

Sur cette base : on a une matrice triangulaire supérieure de diagonale totalement nulle .

Mais la matrice n'est pas nulle, on ne peut donc pas diagonaliser, clair ?

f) Le cas non diagonalisable, $f^2 = \omega$, 0 seule vp, car les vp sont racines des poly annul.

Bref on ne peut pas digonaliser.

1207. CCINP. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ et $A = \left(\alpha^{i+j-2}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

a) Si $\alpha \in \mathbb{R}$ montrer que A est diagonalisable.

b) Calculer le rang de A. En déduire ses valeurs propres.

c) A quelle condition sur α la matrice A est-elle diagonalisable ?

Sol : a) La matrice est symétrique réelle donc diagonalisable !

b) Le rang vaut 1 car $f(e_j) = \alpha^{j-1} f(e_1)$. Donc 0 vp d'ordre $n-1$, avec la trace : $\sum_{0}^{n-1} \alpha^s$

Si cette somme est non nulle, c'est la vp qui manque.

Sinon , il n'y a que 0.

c) On relit b) , si α n'est pas une racine de l'unité, on diagonalise .

Sinon , on n'a que 0 et on ne peut pas diagonaliser. Clair ?

1210. CCINP. Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$3u^3 = u^2 + u + \text{id}$.

a) Montrer que u est bijectif.

b) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}, u^k$ est combinaison linéaire de u^2, u et id.

c) Est-il possible que u soit diagonalisable ? non diagonalisable ?

d) Qu'en est-il sur un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel ?

Sol : a) Cours : $u \circ (3u^2 - u - Id) = Id$.

b) Rec simple.

c) Oui par ex $u = Id$,

Oui aussi , par ex $A = \begin{pmatrix} 0 & -1/3 \\ 1 & -2/3 \end{pmatrix}$ trouvée grâçe à une matrice compagnon

pour annuler $3X^2 + 2X + 1$.

d) Là, polynôme scindé annulateur à racines simples ! Cours.

1211. CCINP. Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ qui vérifie $u^3 + u^2 + u = 0$.

a) Déterminer $\text{Ker}(u) \cap \text{Ker}\left(u^2 + u + Id_{\mathbb{R}^n}\right)$.

b) Montrer que $\text{Im}(u) = \text{Ker}\left(u^2 + u + Id_{\mathbb{R}^n}\right)$ puis montrer que $\mathbb{R}^n = \text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(u)$.

c) Soit v l'endomorphisme de $\text{Im}(u)$ induit par u.

Que représente le degré du polynôme caractéristique de v par rapport à u ?

d) Montrer que 0 n'est pas valeur propre de v, puis en déduire que le rang de u est pair.

a) Clair le vecteur nul.

b) D'abord, $\text{Im}(u) \subset \text{Ker}\left(u^2 + u + Id_{\mathbb{R}^n}\right)$ car $(u^2 + u + Id) \circ u = \omega$.

Or , comme on est en dimension finie , l'égalité des dimensions suffirait.

Faisons simple comme suggéré par l'énoncé, par a) $\ker(u) \bigoplus \ker(u^2 + u + Id)$.

Donc $dim(\ker(u)) + dim(\ker(u^2 + u + Id)) \leqslant n$.

Par thm du rang, il vient, $dim(\ker(u^2 + u + Id)) \leqslant rg(u)$.

On y est. Grâçe à a) $\ker(u) \cap Im(u) = \{\overrightarrow{0}\}$.

Donc somme directe, avec la bonne dimension (thm rang). Donc $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$.

c) Tout d'abord v existe bien car u envoie $Im(u)$ dans $Im(u)$!

Le degré d'un polynôme caractéristique c'est la dimension, ici c'est donc le rang de u.

d) Si 0 vp de v, soit $z \in E$ tel que $v(z) = \overrightarrow{0}$.

$z \in \ker(u) \cap Im(u) = \{\overrightarrow{0}\}$. Donc 0 n'est pas vp.de v

Donc le spectre de v est inclus dans $\{j, \overline{j}\}$.

Car les vp sont à prendre parmi les racines ...

On peut trigonaliser v dans $\mathbb{C}$, mais la trace restera réelle. (invariant de similitude).

Donc $m_j = m_{\overline{j}}$. La dimension est paire.

1212. CCINP. Voir vendredi 11 juin ...

1213. Navale a) Diagonaliser la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Soil $A \in M_n(\mathbb{C}), B = \begin{pmatrix} A & 4A \\ A & A \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -A & 0 \\ 0 & 3A \end{pmatrix}$.

Montrer que B et C sont semblables.

Sol : a) Les vp sont -1 et 3 donc diagonalisable. Vecteurs propres faciles à trouver .

$M = PDP^{-1}$, P ayant pour vecteurs colonnes des vecteurs propres de M.

b) Produit tensoriel ! Si on note $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} A & 4A \\ A & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aI_n & bI_n \\ cI_n & dI_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -A & 0 \\ 0 & 3A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'I_n & b'I_n \\ c'I_n & d'I_n \end{pmatrix}.$$

Les 2 matrices sur les bords sont bien inverses l'une de l'autre.

1214 . CCINP. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$.

a) Exprimer le rang de B en fonction du rang de A.

b) Trouver une relation entre χ_B et χ_A.

En déduire le spectre de B en fonction du spectre de A.

c) Déterminer les dimensions des espaces propres de B en fonction de celles

des espaces propres de A.

d) Montrer que B est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable et inversible.

Sol : déjà vu en classe ou presque.

Pour le rang , si on multiplie par une inversible on conserve le rang.

$\begin{pmatrix} 0 & A \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$.

Pour le rang de cette dernière (J) : $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow V = 0, U \in \ker(A)$.

Donc ce noyau est de dimension $\ker(A)$, il vient par thm du rang :

$rg(J) = 2n - dim(\ker(J)) = n + rg(A)$.

b) Manip classiques de dét , 2n- linéarité, remplacement d'une ligne par elle-même +...

$$\begin{aligned} \chi_B(X) &= \begin{vmatrix} XI_n & -A \\ -I_n & XI_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} XI_n & X^2I_n - A \\ -I_n & 0_n \end{vmatrix} \\ &= (-1)^n \begin{vmatrix} -A + X^2I_n & XI_n \\ 0 & I_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -A + X^2I_n & XI_n \\ 0 & -I_n \end{vmatrix} = \det(-A - X^2I_n) \\ &= \chi_A(X^2). \end{aligned}$$

c) Soit un sep de base $V_1, \ldots, V_j$ associé à la vp λ.

On considère alors $W_k^{\pm} = \begin{bmatrix} \pm\mu V_k \\ V_k \end{bmatrix}$ où μ est une racine de λ.

Ce qui donne $2j$ vecteurs propres linéairement indépendants de B ? ?

Il faut vérifier par un calcul simple que l'on a des vecteurs propres.

Attention au cas $\lambda = 0$.

Si $\lambda \neq 0$, ces vecteurs forment une famille libre.

Pour mémoire , samedi matin en td , photo de Ludo.

Pour la liberté $\displaystyle\sum_1^j \gamma_i W_i + \sum_1^j \gamma_i' W_i' = \overrightarrow{0}$.

On obtient " en bas ", $\forall i, \gamma_i + \gamma'_i = 0$ et en " haut ", $\forall i, \mu(\gamma_i - \gamma'_i) = 0$.

Non nullité de μ...

Mais si $\lambda = 0$, on n'a que la même dimension pour le sep, au lieu du double.

d) Si A diagonalisable et inversible, on applique ce qui précède à une base de vp de A et on a une base de vp de B.

Réciproquement : si B diagonalisable.

Alors B^2 l'est aussi (car si B est semblable à D diagonale, B^2 est semblable à D^2). Il existe donc un poly scindé à racines simples P tel que $P(B^2) = 0$. Or $B^2 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ d'où pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(B^2)^k = \begin{pmatrix} A^k & 0 \\ 0 & A^k \end{pmatrix}$ et par linéarité $P(B^2) = \begin{pmatrix} P(A) & 0 \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}$. On aura donc $P(A) = 0$. Ainsi A possède un poly annulateur scindé à racines simples donc est diagonalisable .

Mais , à l'époque je suis allé trop vite !

B diagonalisable entraine aussi A inversible ! !

Car (astuce ! !) B diagonalisable entraine $rg(B) = rg(B^2)$.

Or $B^2 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ donc $rg(B^2) = 2rg(A)$, mais cf avant $rg(B) = 2n - dim(\ker(B)) = n + rg(A)$.

Donc $rg(A) = n$ gagné ! !

1215. TPE. On note $E = \mathbb{C}_n[X]$.

Soient F et G deux polynômes n'ayant pas de racine commune.

On suppose que G est de degré $n+1$ et scindé à racines simples ;

on note $a_0, \ldots, a_n$ ses racines.

Soit φ l'application qui a $P \in E$ associe le reste de la division euclidienne de FP par G.

a) Montrer que φ est un autormorphisme de E.

b) Pour $i \in [\![0, n]\!]$, en nole $L_i(X) = \displaystyle\prod_{j \neq 1} \left(\frac{X - a_j}{a_i - a_j} \right)$.

Montrer que $(L_0, \ldots, L_n)$ est une base de E.

c) L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

Bel exo que je ne connaissais pas .

Sol : a) Il faut d'abord voir qu'on va bien de E vers E pour raisons de degrés...

La linéarité n'est pas très dure, mais il faut respecter les objets.

Regardons le noyau, il vient $FP = QG$, toutes les racines de G sont donc des racines

de P qui est donc nul, car trop de racines. Rq : Thm Gauss interdit en PSI.

b) C'est du cours , cardinal et liberté , Kronecker, clair ?

c) Regardons comme le suggère l'énoncé $\varphi(L_j) = R_j$, $L_j.F = Q_j.G + R_j$.

Mais " à la Lagrange " on évalue en a_i pour $i \neq j$, $R_j(a_i) = 0$, donc

pour raison de degré R_j est proportionnel à L_j. Base de diagonalisation.

Rq : R_j, multiple de L_j avec le même degré au plus.

1216. IMT. Soient B un espace vectoriel muni d'une base $(e_1, \ldots, e_n)$ et v un vecteur de E.

Soit f l'endomorphisme de E tel que $f(e_1) = \cdots = f(e_n) = v$

a) Quel est le rang de f ?

b) Discuter de la diagonalisabilité de f en fonction du vecteur v.

Sol : a) Si $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$. Le rang est clairement 1.

Sinon, c'est 0.

b) Si v est nul , c'est déjà diagonalisé.

Sinon , le noyau est de dimension $n-1$, regardons la trace qui est invariante.

Elle vaut $\sum_i v_i$, si cette somme est non nulle, on trigonalise dans une base adaptée,

Ce réel, est donc valeur propre, on peut donc diagonaliser , car 0 d'ordre $n-1$, et 1 pour cette dernière.

Si cette somme est nulle, format triangulaire inférieure à diagonale entièrement nulle .

La seule vp est 0, mais la matrice n'étant pas nulle, on ne pourra pas diagonaliser.

1217, CCINP. Soir w un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie.

On suppose que 0 est racine simple đu polynôme annulateur de u.

a) Montrer que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}\left(u^2\right)$.

b) Montrer que si u est nilpotent alors u est nul.

Sol : presque du cours.

1219. CCINP. a) Montrer que si deux matrices U et $V \in M_n(C)$ sont semblables alors

pour tout polynôme $R, R(U)$ est semblable à $R(V)$.

Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ deux matrices telles que $AB = BA$. On pose $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A \end{pmatrix}$.

b) Pour $P \in \mathbb{C}[X]$, exprimer $P(M)$ en fonction de $P(A), P'(A)$ et B.

c) Montrer que si A est diagonalisable et B est nulle alors M est diagonalisable.

d) Démontrer la réciproque.

Sol : a) C'est du cours : $U = P^{-1}VP$ ainsi $U^k = P^{-1}V^kP$ et, on finit

par des combinaisons linéaires pour arriver au polynôme R.

b) On commence par une rec simple $M^k = \begin{pmatrix} A^k & kA^{k-1}B \\ 0 & A^k \end{pmatrix}$.

Il vient $P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & P'(A)B \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}$.

c) C'est du cours, mais je reprends, ds ce cas, comme A diagonalisable,

elle est annulée par un polynôme scindé simple.

Donc M est aussi annulée par le même polynôme.

Et anisi par la réciproque du thm précité , M diagonalisable.

d) Là, ce n'est plus du cours . Si M diagonalisable, elle est annulée par P scindé simple.

Ainsi, $P(A) = 0$, donc A diagonalisable.

Mais P et P' n'ont pas de racines en commun (sinon P l'aurait en double).

Je diagonalise A , alors ds cette base , $P'(A)$ est diagonale avec comme termes diagonaux $P'(\lambda)$, qui sont donc tous non nuls : $det(P'(A)) \neq 0$.

Or $P'(A)B = 0$, on multiplie par l'inverse et on a $B = 0$.

1220 . IMT On munit $\mathbb{R}^4$ de sa structure canonique. Déterminer la matrice dans la base canonique de la symétrie orthogonale par rapport au plan P défini par les équations

$$\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x-y+z-t=0 \end{cases}$$

Sol : On trouve assez facilement une bon de P, puis aussi de $P^{\perp}$.

On a donc une matrice de passage vers une base adaptée à la projection.

Cette matrice étant orthogonale, son inverse est sa transposée .

On finit par la formule de similitude.

On peut faire autrement .

1222.CCINP. Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1])$. On pose, pour $f, g \in E$, $< f, g >= \displaystyle\int_0^1 t^2 f(t)g(t)dt$.

a) Montrer que $<,>$ est un produit scalaire.

b) Calculer $\displaystyle\int_0^1 t^n \ln t$ dt pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) Soit $F = \{x \mapsto ax+b \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ et $u \in E$ telle que $u(x) = x\ln x$ pour tout $x \in]0,1]$.

Déterminer le projeté orthogonal de u sur P.

d) Déterminer $\displaystyle\inf_{a,b\in\mathbb{R}} \int_0^1 (at+b-t\ln t)^2 t^2 dt$.

On l'a fait 7 fois.

1223 voir 670...

1224. CCINP. Soient $(E, <,>)$ un espace euclidien et $(e_1, \dots, e_n)$ une bon de E.

Soit $(u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs de E.

a) Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des nombres réels. Montrer que $\left\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i\right\|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 . \sum_{i=1}^{n} \|u_i\|^2$.

b) En déduire que si $\sum_{i=1}^{n} \|u_i\|^2 < 1$ alors la famille $(e_i + u_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ est une base de E.

Sol : a) On développe $\left\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i\right\|^2 = \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j < u_i, u_j > \leqslant \sum_i \sum_j \|\lambda_i u_i\| . \|\lambda_j u_j\|$.

On a juste appliqué C-S sur les produits scalaires et rentré les scalaires ds les normes.

On a $\left(\sum_i |\lambda_i| . \|u_i\|\right)^2$. Et maintenant C-S dans $\mathbb{R}^n$.

b) $\sum_i \lambda_i (u_i + e_i) = \overrightarrow{0} \Rightarrow \sum_i \lambda_i u_i + \sum_i \lambda_i e_i = \overrightarrow{0}$.

Il vient $\left\|\sum_i \lambda_i e_i\right\|^2 = \left\|-\sum_i \lambda_i u_i\right\|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 . \sum_{i=1}^{n} \|u_i\|^2 < \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$.

Sauf bien sûr si les scalaires sont tous nuls (ce que l'on cherche à prouver).

Mais comme $(e_i)_1^n$ est bon , la somme de gauche vaut : $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$. Gagné !

1225. TPE A quelle condition sur les réels p et q la matrice

$A = \begin{pmatrix} p & 0 & q \\ q & 0 & -p \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle orthogonale ? Déterminer les élements propres de A.

Sol : a) $p^2 + q^2 = 1$. b) Puis $p = \cos(\theta), q = \sin(\theta)$.

Attention à ne pas dé...er, le det vaut 1. Rotation. Ss calculs,

les invariants sont $< (\cos(\theta/2) e_1 + \sin(\theta/2) e_3) >$.

On regarde la trace ($p = \cos(\theta)$) révèle l'angle de la rotation au signe près... etc

1226. CCINP Soit $M \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $(I_n + 2M)/3 \in O_n(\mathbb{R})$.

a) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}^n$, $< Mx, x >= \|x\|^2$.

b) Que peut-on en déduire sur M ?

Sol : Soit $G = (I_n + 2M)/3 \in O_n(\mathbb{R})$.

$G.G^T = I_n \Rightarrow M + M^T = 2I_n$, il suffit de développer...

$< Mx, x >=< x, Mx >= X^T M^T X = X^T MX = (1/2).X^T(M + M^T)X = X^T X = \|x\|^2$.

b)$M = Id$, car $\|MX\| = \|X\|$ (isométrie) donc nous avons un cas d'égalité de C-S .

$MX = \lambda X(*)$, or (isométrie) $|\lambda| = 1$, et on ne peut pas avoir les 2 ici.

Sinon, $MX = X, MY = -Y$ entraine $M(X + Y) = X - Y$ impossible par (*).

Puis $M = -I_n$ est impossible par hyp.

1227 . CCINP. on dit qu'une matrice carrée réelle est à diagonale propre si ses coefficients diagonaux sont exactement ses valeurs propres répétées avec leur multiplicité.

a) Donner des exemples de telles matrices.

b) La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle à diagonale propre ?

c) Soit A une matrice antisymétrique à diagonale propre.

i) Que peut-on dire de ses valeurs propres ?

ii) Montrer qu'il existe $p \geqslant 2$ tel que $A^p = 0$.

iii) Calculer $\left(A^T A\right)^p$.

iv) En remarquant que $A^T A$ est symétrique, montrer que $A = 0$.

d) Donner la dimension de l'espace $A_n(\mathbb{R})$ des matrice antisymétriques.

e) On note E_n l'ensemble des matrices à diagonale propre.

Montrer que si F est un sous-espace vectoriel inclus dans E_n slors $\dim(F) \leqslant \dfrac{n(n+1)}{2}$.

f) Quelle est la dimension maximale d' un sous-espace inclus dans E_n ?

Sol : Tjs les mêmes histoires (on relook du déjà vu , oraux , écrits) .

a) Triangulaires sup , ça va servir...

b) Non , $\chi(A) = X^3 + X$.

c) i) Toutes nulles car la diagonale d'une antisymétrique est nulle , or diago propre.

ii) On trigonalise , toutes les valeurs propres étant nulles , c'est nilpotent.

iii) Au signe près c'est $A^{2p} = 0$.

iv) Symétrique , clair donc diagonalisable et nilpotente, bref nulle !

Oui mais , pas encore A, mais $A^T A = 0$, donc de trace nulle, produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$\|A\|^2 = 0$.

d) $\dfrac{n(n-1)}{2}$. e) Par c) $\mathcal{A}_n \cap E_n = \{0\}$. Donc $\mathcal{A}_n \cap F = \{0\}$.

Classique $\mathcal{A}_n \bigoplus F$ de dimension inférieure à n^2...

f) Les triangulaires supérieures font le taf.

Analyse

1228. Navale. Soit (u_n) une suite complexe telle que

$u_{n+1} = (u_n + |u_n|)/2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Montrer que cette suite converge et déterminer sa limite en fonction de u_0.

Sol : Exo de sup, c'est de la trigo , module , argument.

1229. TPE. Pour $n \geqslant 2$, on nole $f_n : x \mapsto nx^3 + n^2x - 2$.

a) Montrer qu'il existe un unicque réel $u_n \in [0,1]$ tel que $f_n(x_n) = 0$.

b) Montrer que la suite (u_n) décroit et qu'elle converge. Déterminer sa limite.

c) Déterminer un équivalent de u_n.

Sol : Thm bijection , par tableau de variations, c'est strictement croissant sur $[0,1]$, à valeurs dans $[-2, n^2+n-2]$.

b) Astuce classique, mais attention pas tjs (voir 1233).

$f_n(u_n) = 0$, $f_{n+1}(u_n) = u_n^3 + (1+2n)u_n \geqslant 0 = f_{n+1}(u_{n+1})$.

Or f_{n+1} croissante donc $\forall n, u_n \geqslant u_{n+1}$, décroissante minorée par 0.

u_n converge et seule la limite 0 est acceptable , sinon boum.

$nu_n^3 + n^2 u_n$ tend vers 2, mais le morceau de gauche est équivalent à $n^2 u_n$, il suffit de le mettre en facteur.

Il vient $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2}{n^2}$

1231. ENSEA. Etudier la nature de la série $\sum \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$ selon les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$.

Sol : Un DL simple fait le taf, $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha} - \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{n^{2\alpha}} + o(...)$

Le premier morceau est le terme général d'une série cvte.

Le reste est équivalent à une série de Riemann de signe cs, qui révèle la nature.

1232. IMT. Nature de la série $\sum (-1)^n \sin\left(\frac{1}{(-1)^n + \sqrt{n}}\right)$?

Sol : Il faut faire un DL très , très précis.

$$\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left[\frac{1}{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}\right] + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) = \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + o(1/n) + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

Tu relis avant de conclure à la divergence.

1233. TPE. a) Pour $n \geqslant 1$, montrer que l' équation $x^n + nx = 1$

possède une unique solution positive, que l'on note u_n.

b) La suite (u_n) converge-t-elle ?

c) Déterminer un équivalent simple de u_n.

d) Déterminer la nature de la série $\sum$ n ! $\left(\dfrac{1}{n} - u_n\right)$.

Sol : a) Pareil que 1229.

b) Ici la monotonie existe mais trop compliquée à obtenir,

mais la définition de u_n entraine que $u_n \leqslant \frac{1}{n}$.

Donc u_n tend vers 0.

c) En factorisant par nu_n et en faisant attention à ce que l'on raconte,

Le côté gauche est équivalent nu_n , $u_n \underset{0}{\sim} \frac{1}{n}$.

d) Je pose $u_n = 1/n - \alpha_n$, $a_n > 0$.

Il vient $(1/n - a_n)^n = n\alpha_n$.

Donc $0 < a_n \leqslant \frac{1}{n^{n+1}}$, le terme général de la série est donc majoré par $\dfrac{n!}{n^{n+1}}$.

Qui est elle même cvte par d'Alembert ou Stirling.

1234. IMT. a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $g_n(t) = \ln(t) - \arctan(t) - n\pi$.

Montrer qu'il existe un unique réel $x_n > 0$ tel que $g_n(x_n) = 0$.

b) Montrer que la série $\sum \frac{1}{x_n}$ converge.

Sol : a) thm bijection, f_n croissante vers $\mathbb{R}$.

b) On voit ds le tableau précédent que $x_n > e^{n\pi}$...

1235. IMT . Soit (a_n) une suite de réels vérifiant $a_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = 1 - e^{-a_n}$.

a) Étudier la convergence de la suite (a_n).

b) Déterminer la nature de la série $\sum(-1)^n a_n$.

c) Déterminer la nature de la série $\sum a_n^2$.

Sol : a) Suite récurrente, $f(u) = 1 - e^{-u}$, f est croissante de $\mathbb{R}^+$ vers $[0, 1[$.

$\mathbb{R}^+$ est stable par f. f croissante . (u_n) monotone.

On regarde $f(u) - u$, qui est négative. Bref a_n décroit et est minorée donc cv.

Par continuité de f la limite est un pt fixe . $\ell = 0$.

b) Par relecture de ce qui prècède , CSSA.

c) Voilà une thématique, hyper classique , je vais essayer d'en mettre d'autres avec un pt de vue différent.

Ici : DL classique, $a_{n+1} - a_n \sim -\frac{a_n^2}{2}$, la somme des objets de droite est alors téléscopique cvte.

d) Je rajoute une idée que j'ai croisée ds le BEOS , il y a qcq années (mais pas si loin).

La cv de la série des a_n ?

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \dfrac{a_n}{2} + o(a_n)$.

D'où $\ln\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right) = -\dfrac{a_n}{2} + o(...) \sim -\dfrac{a_n}{2}$.

Et la somme des objets de droite est téléscopique divergente.

Dans d'autres exemples , on peut être amené à utiliser des DL d'ordre 2 ou 3 puis Césaro.

1236 . CCINP. Soit (a_n) une suite positive. Soit (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}^+$ et, pour $n \in \mathbb{N}$.

$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \sqrt{u_n^2 + a_n^2}\right)$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \leqslant a_n/2$.

b) Montrer que si $\sum a_n$ converge alors (u_n) converge.

c) Montrer que la réciproque est fausse. Ind. Considérer $u_n = \frac{n}{n+1}$.

Sol : a) Calcul simple avec quantité conjuguée, oui , oui...

b) Il suffit de sommer (somme partielle). Attention (u_n) croissante.

c) On remplace, on isole a_n^2 , attention à ne pas tout développer ,

identité remarquable $B^2 - D^2$. Attention au petit calcul...

Comme a_n est positive on trouve $a_n \sim 2/n$. Série divergente.

1237, CCINP. Soit $(a_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de réels positifs. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{a_n}{(1+a_1)...(1+a_n)}$.

a) Calculer $u_1 + u_2$. Généraliser.

b) Montrer que la série $\sum u_n$ converge.

c) Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ pour $a_n = 1/\sqrt{n}$.

Sol : a) On voit que $\displaystyle\sum^N u_k = \frac{-1 + \prod^N (1 + a_i)}{\prod^N (1 + a_i)}$ (développer, ranger,rec).

b) Notre série est à termes positifs donc sommes partielles croissantes et majorées par 1.

c) La somme vaut 1 car $\ln\left(\displaystyle\prod^N (1 + 1/\sqrt{k})\right) = \sum^N \ln\left(1 + 1/\sqrt{k}\right)$.

Série à termes positifs de terme général équivalent à du Riemann divergent.

1238. CCINP, a) Pour $p \in N$, justifer l'existence de $S_p = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^p}{2^n}$.

b) Développer $(n+1)^p$ et en déduire S_p en fonction de $S_0, \ldots, S_{p-1}$.

c) Montrer que, pour tour $p \in \mathbb{N}, S_p \in \mathbb{N}$.

Sol : a) Alembert. b) On regroupe par binôme, $\sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j} S_j = S_p$.

Ainsi $S_p = \sum_{j=0}^{p-1} \binom{p}{j} S_j = S_p$. c) C'est clair par rec immédiate.

1239. TPE. Soit $P \in \mathbb{R}(X]$. On définit $K = \{x \in \mathbb{R} \mid P(x) = \cos x\}$.

a) Montrer que si $\deg(P) \geqslant 1$, alors K est borné.

b) Montrer que si une fonction f défnie et dérivable sur un intervalle I s'annule

un nombre infini de fois, alors sa derivée aussi.

c) Montrer que si K est infini, alors P est constant.

Sol : $\lim_{\pm\infty} |P| = +\infty$, $\forall A > 0, \exists b \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x, |x| > b, |P(x)| > A$.

Donc , en prenant $A = 1$, on reste dans $[-b, b]$.

b) On a une infinité de petits segments , où l'on peut appliquer Rolle .

c) Tout d'abord sur un segment, les fonctions sinus et cosinus ne prennent qu'un nombre fini de fois un valeur fixée.

Car sur $[0, 2\pi]$ au plus trois fois.

Si K est infini, en regardant $P(x) - \cos(x)$ et en appliquant b) il en serait de même pour $P'(x) + \sin(x)$ etc ...

En dérivant plusieurs fois (comme le degré) , on arrive à cste $= \pm \sin$ ou la même en cos.

Ce qui contredit le "tout d'abord"...

1240. IMT. Justifier l'existence de l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \ln\left(\frac{1+t^2}{t^2}\right) dt$ et la calculer.

Sol : La fonction est continue sur $\mathbb{R}^{*+}$ donc intégrable sur tout segment.

En l'infini, elle est équivalente à $\dfrac{1}{t^2}$, en 0^+, équivalence avec $-2\ln(t)$.

Pour la partie calcul, non ce n'est pas une inversion signe somme et intégrale à partir d'une DSE.

Je pose $t = 1/u$ de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone.

On arrive à $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\ln(1+u^2)}{u^2} du$.

Maintenant IPP, $g'(u) = -1/u$ attention au crochet qui fort heureusement converge.

Il vaut 0, en l'infini par croissance comparée, en 0 c'est prolongeable .

L'intégrale de droite est "primitivable" version arctangente, résultat π.

Ceci peut bien sûr être validé par Python , bibliothèqe scipy.integrate méthode quad.

Si besoin, venir me voir , gâre aux calculs.

1241. ENSEA. On pose $F(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2}$ dt.

a) Donner le domaine de définition de F et calculer sa dérivée.

b) Montrer que l'on a au voisinage de $+\infty, F(x) = \dfrac{\cos(x)}{x^2} + o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

c) Montrer que $g : t \mapsto \dfrac{\sin(t) - t}{t^2}$ est prolongeable par continuité sur $[0, 1]$.

d) Déterminer un équivalent simple de F en 0 .

e) Montrer que F est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} F$.

Sol : au-delà du classique...

Elle est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$. Car en 0 l'équivalent est $1/t$ Riemann divergent.

En l'infini, elle est majorable en valeur absolue par $\dfrac{1}{t^2}$ et on relit la rédaction obligatoire du cours.

Pour être rigoureux, $F(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2} dt - \int_1^{x} \frac{\sin(t)}{t^2} dt$.

Maintenant le thm fondamental de l'analyse s'applique.

$F'(x) = -\dfrac{\sin(x)}{x^2}$.

b) Attention , il y a un piège !

On veut $o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ ... Ca va coûter cher .

Et une IPP donne : attention à la rédaction et à la convergence du crochet. $f' = \sin(t)$.

$F(x) = \dfrac{\cos(x)}{x^2} - \displaystyle\int_x^\infty \dfrac{2\cos(t)}{t^3} dt$.

Si on majore trop brutalement la deuxième , on va arriver à $O\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

Il faut refaire la même IPP et faire apparaitre deux objets en $O\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$.

Si besoin me demander.

c) DL élémentaire.

d) Il faut ranger correctement : $F(x) = \displaystyle\int_x^\infty \left(\dfrac{\sin(t) - t}{t^2} + \dfrac{1}{t}\right) dt$.

$= \displaystyle\int_x^A + \int_A^\infty = \int_x^A g(t)dt + \int_x^A \dfrac{1}{t} dt + cste$ qui est $-\ln(x) + K_1 + o(1)$. Car g cie.

Il vient $F(x) \underset{0}{\sim} -\ln(x)$.

e) Les idées précédentes entrainent l'intégrabilité, en $+\infty$ puis en 0^+.

Puis IPP $f' = 1$, $\displaystyle\int_0^\infty F = [xF]_0^\infty - \int_0^\infty \dfrac{\sin(x)}{x} dx = \dfrac{\pi}{2}$.

Attention à la nullité du crochet... et intégrale de Dirichlet.

1242. CCINP. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $f_{\mathrm{n}} : \mathrm{x} \in [-1, 1] \mapsto \sin\left(nx.e^{-nx^2}\right)$.

a) Montrer que (f_n) converge simplement sur $[-1, 1]$ vers une fonction f.

b) Montrer qu'il y a convergence uniforme sur $[a, 1]$ si $a > 0$.

c) Y a-t-il convergence uniforme sur $[-1, 1]$?

Sol : a) Bien sûr, on fixe x, quand n tend vers l'infini, c'est une vraie croissance comparée car x est...

Bref , convergence simple vers la fonction nulle.

b) La fonction est impaire. La quantité ds le sinus est entre 0 et ne^{-na^2} .

x a disparu , et notre objet tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

Bref cv uniforme sur $[a, 1]$.

c) En étudiant minutieusement ce qui est ds le sinus, la dérivée est $ne^{-nx^2}(1-2nx^2)$.

Donc sur $\left[0, \frac{1}{\sqrt{2n}}\right]$. Ce qui est dedans va de 0 à $\frac{n}{\sqrt{e}}$.

Bref sur tous les segments $[0, a]$, la fonction passe par la valeur 1.

Donc pas de cv uniforme vers la fonction nulle.

1243.Voir mines
1260. Voir mines.

1263. CCINP. On considère la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\,\mathrm{dt}$.

a) Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.

b) On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*, u_n = \displaystyle\int_{n-1}^{n} \ln f(t)\,\mathrm{dt}$. Déterminer la nature de $\sum(-1)^n/\mathrm{u}_n$.

Sol :

a) Cours, b) on reconnait la fonction gamma décalée.

TSSA, on minore facilement avec des factorielles.

Décroissance ss dérivation.

c) Pour la série non alternée, elle diverge car on peut la minorer , on arrive à $\displaystyle\sum \frac{1}{k\ln(k)}$.

1264. Voir DM.

1265. Voir Dm.

1270. TPE. Extrema de $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$ sur $\mathbb{R}^2$?

Sol : On est sur un ouvert ($\mathbb{R}^2$) et la fonction est $\mathcal{C}^1$.

On regarde les points critiques , $f'_x = f'_y = 0$. Il y en 3 si on ne se perd pas ds les calculs simples.

$(0, 0)$, $(1, 1)$ et $(-1, -1)$.

Le point $(0,0)$ est un point col, car $f(x,0) \geqslant 0$ et $f(x,x) \leqslant 0$ au voisinage de $x=0$.

Nous avons donc 2 chemins qui passent par $(0,0)$, l'un arrive "dessus", l'autre "dessous".

Les points $(1,1)$ et $(-1,-1)$ sont de mêmes natures , par effet miroir $f(-x,-y)=f(x,y)$.

Le point $(1,1)$ est un minimum local et même global. $f(1,1)=-2$.

2 visions des choses , localement , $f(1+s,1+h)-f(1,1)=(0+0s+0h)+(6s^2+6+h^2-4sh)+o(...)$.

Il est normal que la première parenthèse soit nulle car le gradient est nul.

La deuxième parenthèse est un grand classique à maîtriser...

$6s^2+6+h^2-4sh=6(s^2+h^2-2/3sh)$. Le fait que $2/3$ soit en valeur absolue strictement inférieur à 2 est fondamental ici.

$s^2+h^2-2/3sh=(s-h/3)^2+(8/9)h^2 \geqslant 0$, d'où le minimum local.

La vision globale : $f(x,y)+2=(x^2-y^2)^2+2x^2y^2-4xy+2=(x^2-y^2)^2+2(xy-1)^2 \geqslant 0$.

Probabilités

1271. TPE. Une information booléenne est transmise grâce à n relais notés $R_1,\ldots,R_n$.

La probabilité qu'un relai transmette correctement l'information est p.

Les relais sont indépendants.

Calculer la probabilité que l'information transmise par R_n soit la même que celle reçue par R_1. Application numérique : $n=100$ et $p=0,999$.

Exo classique de première année, fait ds toutes les classes.

1274. CCINP. Fait en cours.

1275 .Application élémentaire de la loi de Pascal .

1278. CCP. Soit $(X_n)_{\mathrm{neN}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant chacune une loi de Bernoulli de paramètre p.

Soit N une variable aléatoire telle que $N+1$ suive la loi géométrique de paramètre p.

On pose $Y = \sum_{n=1}^{N} X_n$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner la loi de $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

b) Soit $x \in]-1,1[$. Calculer, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{n=k}^{+\infty} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} x^{n-k}$.

c) Calculer $\mathcal{P}(Y = k)$ et donner la loi de $Y + 1$.

Retours :

Alice et Margot.

Exo (restructuré).

Soit $(X_i)_{\mathbb{N}^*}$ suite de variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Bernoulli

de paramètres $p_i \in [0,1]$.

On suppose que $\lim_\infty p_i = p$.

Alors le théorème de Césaro entraine $\lim_{\infty} \frac{1}{n} \sum_{1}^{n} p_i = p$.

1) Montrer que $\lim_{\infty} \mathcal{P}\left(\left|\frac{X_1 + ... + X_n}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0$.

2) En déduire que $\lim_{\infty} \mathcal{P}\left(\left|\frac{X_1 + ... + X_n}{n} - p_n\right| \geqslant \varepsilon/2\right) = 0$.

Sol : Pour être le plus clair possible : je redonne les outils qui vont nous être utiles.

B.T : $\mathcal{P}(|Z - E(Z)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{V(Z)}{\varepsilon^2}$.

Comme ce sont des Bernoulli, $E(X_i) = p_i$, $V(X_i) = p_i(1 - p_i) \leqslant \frac{1}{4}$.

Inégalité triangulaire : $|S + T| \geqslant \varepsilon$ et $|T| \leqslant \varepsilon/2$ entraine $|S| \geqslant \varepsilon/2$.(*)

Puis si G entraine H (des événements) alors $\mathcal{P}(G) \leqslant \mathcal{P}(H)$ (**).

Ensuite on travaille à $\varepsilon > 0$ fixé.

Par B.T , $\lim_{\infty} \mathcal{P}\left(\left|\frac{\sum_{1}^{n} X_i}{n} - \frac{\sum_{1}^{n} p_i}{n}\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{n}{4n^2\varepsilon^2} \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

Indépendance, coeff de proportion au carré pour la variance et linéarité de l'espérance.

Or par Césaro, $\dfrac{\displaystyle\sum_1^n p_i}{n} - p \to 0$, donc pour n suffisamment grand $\left|\dfrac{\displaystyle\sum_1^n p_i}{n} - p\right| \leqslant \varepsilon/2$.

En appliquant (*). L'événement $\left|\dfrac{X_1 + ... + X_n}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon$ entraine $\left|\dfrac{\displaystyle\sum_1^n X_i}{n} - \dfrac{\displaystyle\sum_1^n p_i}{n}\right| \geqslant \varepsilon/2$.

Comme le deuxième a une probobabilité qui tend vers 0, le premier aussi cf (**).

2) C'est la même méthode car $p_n \to p$ et on joue sur le ε comme pour 1).

Meslin CCP :

Soit $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{1 + n^4 x^3}\,\mathrm{d}x$.

1) Elle existe par continuité sur $\mathbb{R}^+$ et controlée en valeur absolue par $\dfrac{1}{x^3}$ en l'infini.

2) Changement de variable $t = x.n^{\frac{4}{3}}$. De classe $\mathcal{C}^1$ et strictement croissant.

Soit Jn : $J_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{n^{1/3}\sin\left(\frac{t}{n^{1/3}}\right)}{1+t^3}\,\mathrm{d}t$.

Il vient par remplacement : $J_n = n^{\frac{5}{3}} I_n$.

3) Soit $f_n(t)$ la fonction "dans" J_n, elle converge **simplement** sur $\mathbb{R}^+$ vers $\varphi(t) = \dfrac{t}{1+t^3}$.

Ces f_n sont continues par morceaux.

De plus, en utilisant $|\sin(u)| \leqslant u$, $|f_n(t)| \leqslant \varphi(t)$ qui est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Toutes les hypothèses du théorème de convergence dominée sont réunies. Il vient :

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} J_n = K = \int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^3}\,\mathrm{d}t$. Changement de variable hyper classique $u = 1/t$.

Il est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement décroissant donc recevable. $K = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^3}\,\mathrm{d}t$.

$$2K = \int_0^{+\infty} \frac{1+t}{1+t^3}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2 - t + 1} dt = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t-1/2)^2 + 3/4} = \frac{\sqrt{3}/2}{3/4} \int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{+\infty} \frac{dv}{v^2+1}.$$

On a posé $t - 1/2 = v\sqrt{3}/2$ qui est ...donc recevable.

$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\,[\arctan]_{-1/\sqrt{3}}^{+\infty} = \dfrac{4\pi\sqrt{3}}{9}$. Car $\arctan(1/\sqrt{3}) = \dfrac{\pi}{6}$ et impaire.

Il vient $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2\pi\sqrt{3}}{9n^{5/3}}$, il n'y a qu'à remplacer.

Algèbre :

$E = \mathbb{R}_n[X]$ de dimesion $n+1$ ...

$f(P) = (X-a)P' + P - P(a)$.

0) D'abord on rassure le correcteur , linéarité et contrôle du degré pour valider l'endomorphisme de E.

1) Il se voit que $f(1) = 0$ donc $1 \in \ker(f)$.

On calcule $f(X^k) = (k+1)X^k + ...$ pour remplir la matrice de f dans la base canonique.

Donc sans calculs, la matrice est triangulaire supérieure de diagonale $(0, 2, 3, ..., n+1)$.

Elle est donc immédiatement de rang n.

Le noyau est de dimension 1, $\ker(f) =< 1 >$.

L'image est un hyperplan, mais si on ouvre les yeux, $(f(P))(a) = 0$.

Donc l'image est incluse dans la noyau de la forme linéaire non-nulle qui à Q associe $Q(a)$.

Inclusion et égalité des dimensions, $Im(f) =< (X-a), (X-a)^2, ..., (X-a)^n >$.

On voit dans la matrice, que les valeurs propres (sur la diagonale) sont les $(0, 2, 3, ..., n+1)$.

Donc c'est diagonalisable (vp 2 à 2 distinctes avec bon cardinal)(**).

Le noyau (associé à la vp 0) est connu.

Pour les autres vp, il me vient une idée...

Je regarde $f((X-a)^k) = (k+1)(X-a)^k$. Ça marche !

Rq : les sep sont des droites vectorielles (**) .

CCP 2021 inconnu...

Proba : X une variable aléatoire. $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour $k \in [\![0,n]\!]$, $\mathcal{P}(X=k) = \dfrac{a}{k+1}\dbinom{n}{k}$.

a) Montrer que $\dbinom{n}{k} = \alpha\dbinom{n-1}{k-1}$. Expliciter α.

b) Evaluer a pour que X soit recevable.

c) $E(X)$,$V(X)$. Kdo $E(X+1)$.

Sol : Star'ac, il faut la somme des probas égale à 1, Star'ac.

Pour l'espérance Star'ac, variance pareil (deux fois)...Avec K-H.

Algèbre-Analyse.(EVN).

Ressemblance marquée avec le 685...

Soit $E = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ assujeti à $f(0)=0$.

On note $N(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$.

1) Prouver que c'est une norme.

2) $f \in E$, montrer que $f(x) = e^{-x}\displaystyle\int_0^x e^t(f(t)+f'(t))dt$.

3) $N'(f) = \|f+f'\|_\infty$, est-ce une norme ?

4) Montrer que N et N' sont équivalentes.

Sol : 0) E est bien un ev.

1) Tout est naturel ? Inégalité triangulaire sur les fonctions.

2) Par primitive naturelle, ne pas oublier que $f(0)=0$.

3) Positivité et homothétie naturelle, inégalité triangulaire issue de celle des fonctions.

Pour l'aspect lié à la nullité, il vient $f+f' = 0_{[0,1]}$. Bref f proportionnelle à e^{-x} et nulle en 0.

4) Il faudrait prouver que $\exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}_+^*$ telles que $\forall x, \alpha N'(f) \leqslant N(f) \leqslant \beta N'(f)$.

$\alpha = 1$ saute aux yeux par inégalité triangulaire .

Pour l'autre côté, $|f(x)| \leqslant |e^{-x} \int_0^x e^t(f+f')(t)| \leqslant \|f+f'\|_\infty$ par 2).

L'autre à majorer : $f'(x) = -e^{-x} \int_0^x e^t(f+f')(t)dt + (f+f')(x)$

donc $\|f'\|_\infty \leqslant 2\|f+f'\|_\infty$. $\beta = 3$ est recevable.

Mines 2021 : Sujet très mal envoyé, inconnu...

1) Retrouver $E_{ij} \times E_{kl}$.

2) Soit l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $U_{K,L}(M) = KM - ML$.

Donner sa trace.

3) CNS de nullité.

4) Diagonalisation ?

Sol : J'ai échangé avec Duncan, exo important très très proche du

661, (1212) fait en classe et fondamental.

Les 3 premières questions sont rédigées et classiques, mais la dernière ...

0) L'aspect endomorphisme est simple mais doit rappelé au tableau.

1) $E_{ij} \times E_{kl} = \delta_j^k E_{il}$ est un hyper classique facile à retrouver à tâtons.

Si on veut une preuve (vue en classe), on regarde les endos canoniquement associés.

On utilise $E_{ij}(\overrightarrow{u_s}) = \delta_s^j \overrightarrow{u_i}$. Les 2 endomorphismes prennent même valeur sur une base.

2) Comme la trace est linéaire, je commence par l'endomorphisme $M \mapsto KM$.

Pour la trace de cet endomorphisme, attention on est en dimension n^2.

Je calcule pour chaque vecteur de la base canonique, sa coordonnée sur " elle-même ",

pour regarde la diagonale de cette matrice $n^2 \times n^2$.

$\sum_{i,j} k_{i,j} E_{ij} E_{sr} = \sum_j k_{i,s} E_{i,r}$. Ce qui nous intéresse est donc $k_{s,s}$.

La trace de $U_{K,L}$ est donc la somme de ces termes, $\sum_{r,s} k_{s,s} = n.tr(K)$.

Pour l'autre, on pourrait faire pareil, mais si on voit bien ce qui se passe, on se rappelle

qu'en cours j'ai expliqué comment grâce à une transposition, on change de côté,

et cette transposition ne change pas la trace.

Bilan $tr(U_{K,L}) = n.tr(K - L)$.

3) Les cas de nullités !

Pas exactement comme dans l'exo de référence, d'abord je constate que $U_{K,L}(I_n) = K - L$.

Donc $K = L$ est une condition nécessaire à la nullité.

En ce cas, il vient $\forall M, KM - MK = 0_n$, exo hyper classique démontrable avec 1),

On se retrouve avec les matrices qui commutent avec toutes les autres, les homothéties.

Bilan : une CNS de nullité est $K = L = aI_n$.

4) Question ambigue, que veux l'interrogateur ? CNS ? CS ?

Au regard de ce qui précède et des connaissances acquises en cours sur l'exo de référence.

$M \mapsto KM$ est diagonalisable **SSI** K l'est, pareil pour l'autre (voir corrigé 661 mines) .

Je regarde en premier le cas où K et L sont **co-diagonalisables**.

On a $K = PD_1P^{-1}$, $L = PD_2P^{-1}$, je force $M = PM'P^{-1}$ (bijection de $\mathcal{M}_n$ sur lui-même).

On est ramené à $U'_{K,L}(M') = D_1M' - M'D_2$.

Qui est bien diagonalisable car on a facilement une base de vecteurs propres.

$U'_{K,L}(E_{ij}) = (\alpha_i - \beta_j)E_{ij}$. En ayant noté $D_1 = diag(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ et $D_2 = diag(\beta_1, ..., \beta_n)$.

Calcul qui réutilise 1).

Je pense que c'est une CNS, mais il me faut du temps... Ça me paraît compliqué, ou j'ai raté quelque chose.

Voir 1144 il y a un morceau...

Pas clair...

Voir ENS 2018 ! ! !

Analyse :

Très mal posté...

Résoudre l'équation d'inconnue $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = 1 + \displaystyle\int_0^x (x-t)f(2t)dt$.

Sol : Tout d'abord l'ensemble des solutions aura la structure de VLA. Clair ?

On développe le côté droit, il apparaît que f est dérivable,

puis en dérivant qu'elle l'est deux fois.

Equa diff : $4y" - y = 0$, il viendrait, $f(x) = a.ch(x/2) + b.sh(x/2)$.

Il faut une réciproque car on dérivé comme des MP. Ceci dit, on ne pouvait faire autrement.

Et là, on est malin (nous) , $f(0) = 0$ est CN, donc $a = 1$.

Mais, on est très malin, on vérifie en 2 temps, la sol particulière d'abord, IPP limpide.

Pour l'homogène, pareil, mais ss la sol particulière.

Centrale : Envoyé version approximative...

Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ positive sur $[0, 1]$. $u_n = \displaystyle\int_0^1 t^n f(t)dt$.

1) Convergence de $\sum (-1)^n u_n$.

2) Montrer que $\displaystyle\sum_0^\infty (-1)^n u_n = \int_0^1 \frac{f(t)}{1+t} dt$.

3) Montrer que $\displaystyle\sum_0^\infty (-1)^n u_n = \frac{1}{2}\int_0^1 \sum_p \left(\frac{1-t}{2}\right)^p f(t)dt$.

Sol : Très dur sans préparation...Si l'énoncé est exact.

1) Un pur CSSA : Il est clair que $u_n \geqslant 0$.

Un calcul élémentaire montre que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ par positivité de l'intégrale.

Le fait que u_n tend vers 0 découle $0 \leqslant u_n \leqslant M_0 \displaystyle\int_0^1 t^n dt = \frac{M_0}{n+1}$. $M_0 = \sup_{[0,1]} |f|$.

2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(t)}{1+t} dt = \int_0^1 f(t) \sum_0^\infty (-1)^k t^k dt$.

Sous réserve d'interversion on aurait : $\sum(-1)^k u_k$. Bien !

Pour l'inversion sauf ommission de ma part, ce n'est pas simple...

Enoncé exact ? Ai-je raté plus simple ?

On pense d'abord aux thms classiques pour intervertir :

Fubini impossible la série harmonique diverge.

Le thm avec la convergence uniforme (valable sur les segments) . Aïe...

Le reste de ladite $\sum g_n$ est $|f(t)\sum_N(-1)^k t^k| = \dfrac{f(t)t^N}{1+t}$ qui selon moi n'est pas

contrôlable par un truc qui tend vers 0 uniformément par rapport à t...

On va feinter et valoriser la classe : $\mathcal{C}^1$! !

Tout d'abord si la fonction est constante le résultat serait vrai car $\displaystyle\sum_0 \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2)$.

Donc je regarde en enlevant et ajoutant $f(1)$. Je force ainsi la nullité en 1. Césaro for ever.

Par linéarité on est ramené à l'interversion de $\displaystyle\int_0^1 (f(t)-f(1))\sum_0^\infty(-1)^k t^k dt$.

Et là, je regarde la cv uniforme : l'ancien majorant est devenu (*) $\left|\dfrac{(f(t)-f(1))t^N}{1+t}\right|$.

On va prouver que cette fois ça marche. $g(t) = f(t)-f(1)$, $g(1) = 0$, $g \in \mathcal{C}^1$.

Par inégalité des accroissements finis, $|g(t)| \leqslant (1-t)M_1$ avec $M_1 = \sup\limits_{[0,1]}|f'|$.

Notre majorant (*) se contrôle par $(1-t)M_1 t^N$.

Qui est étudiable comme fonction de terminale, avec un max atteint en $t = \dfrac{n}{n+1}$.

On a donc un contrôle en $\dfrac{M_1}{n+1}$. Uniforme ! !

L'interversion est justifiée, je vous laisse les autres hypothèses qui ici sont aisées.

3) Là, c'est plus simple, on a une série géométrique de raison $\dfrac{1-t}{2}$,

qui en valeur absolue reste inférieure à 1/2.

La somme est très facilement égale à $\dfrac{1}{1+t}$.

On peut faire autrement, demander à Jules Flament ?

Oui en effet à la question 2) on peut faire beaucoup plus simple,

on évite les thms techniques et on revient en sommes partielles.

$$\int_0^1 \frac{f(t)}{1+t}dt = \int_0^1 f(t)\sum_0^{\infty}(-1)^k t^k dt = \sum_0^N \int_0^1 (-1)^k t^k dt + \int_0^1 f(t)\sum_{N+1}^{\infty}(-1)^k t^k dt.$$

Ce dernier morceau tend facilement vers 0 sans utiliser la classe $\mathcal{C}^1$.

Il vaut $\displaystyle\int_0^1 \frac{(-1)^{N+1}t^{N+1}f(t)}{1+t}dt$.

On le contrôle en valeur absolue, $|f| \leqslant M_0$, $\dfrac{1}{1+t} \leqslant 1$, on a majoré $\dfrac{M_0}{N+2}$.

C'est fini ! On passe simplement à la limite...

Centrale 1 Duncan : Exercice hyper classique très près du 76 (fait en td) de la feuille 4 .

1) Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Montrer que si $tr(A) = 0, tr(A^2) \neq 0$, alors A est diagonalisable.

2) a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,telle que $\forall i \in [\![1, n-1]\!], tr(A^i) = 0$ et $tr(A^n) \neq 0$.

Montrer qu'elle a une valeur propre non nulle.

b) Soit $X = \begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_k \end{pmatrix}$ où les n_i sont les multiplicités des valeurs propres non nulles

et donc distinctes $(\alpha_i)_1^k$.

Montrer que X est dans le noyau de V :

$$V = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_k \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_k^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^k & \alpha_2^k & \cdots & \alpha_k^k \end{pmatrix}.$$

c) En déduire que A est diagonalisable.

Sol :

1) On trigonalise A, il apparait 2 valeurs sur la diagonale de somme nulle donc opposées , mais aucune n'est nulle car sinon, elles sont toutes les deux nulles, et c'est en opposition avec

$tr(A^2) \neq 0$.

2) a) Après trigonalisation, si toutes les valeurs propres sont nulles,

il y a opposition avec $tr(A^n) \neq 0$.

Donc au moins une non-nulle.

b) Là, il y a une petite ambiguité d'énoncé , décalage d'indices et démo par l'absurde .

On fait l'hypthèse que 2 valeurs propres sont égales, on va obtenir une absurdité, ça déclenchera que les valeurs propres sont 2 à 2 distinctes et donc que A est diagonalisable.

Si il y a répétition d'au moins une valeur propre on regarde le système suivant :

$$\begin{cases} \alpha_1 + a_2 + ... + \alpha_n = 0 \\ \alpha_1^2 + a_2^2 + ... + \alpha_n^2 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots = 0 \\ \alpha_1^k + a_2^k + ... + \alpha_n^k = 0 \end{cases} \quad \text{où il est sous-entendu } k < n.$$

On regroupe les cas d'égalités, en gardant un format carré.

Il vient : $\begin{cases} n_1\alpha_1 + n_2 a_2 + ... + n_k\alpha_k = 0 \\ n_1\alpha_1^2 + n_2 a_2^2 + ... + n_k\alpha_k^2 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots = 0 \\ n_1\alpha_1^k + n_2 a_2^k + ... + n_k\alpha_k^k = 0 \end{cases}$. Le vecteur X est bien dans $\ker V$.

Dont le déterminant est un VDM relooké : $\displaystyle\prod_1^k \alpha_j \prod_{i>s}(\alpha_i - \alpha_s) \neq 0$.

Or le vecteur X est non nul ! C'est absurde.

(Oral Mines 2021 Centrale Ensam). Inconnu !

Soit $f_0 \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R})$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [a,b], f_{n+1}(x) = \int_a^x f_n(t)\mathrm{d}t$$

Convergence et somme de $\sum f_n$.

f_0 est continue donc bornée sur $[a,b]$.

Pour $n \geqslant 1$, chaque f_n est $\mathcal{C}^n$, et nulle en $x = a$.

Soit $M_0 = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$. On a : (indication, oui ou non fournie suivant les cas).

$$\forall x \in [a,b], |f_1(x)| \leqslant (x-a)M, (IAF)$$

Ensuite : $\forall x \in [a,b], |f_2(x)| \leqslant \dfrac{(x-a)^2}{2} M$ (IAF).

Par récurrence simple :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} \\ \forall x \in [a,b] \end{cases} |f_n(x)| \leqslant \frac{(x-a)^n}{n!} M$$

Ainsi $\|f_n\|_\infty \leqslant \dfrac{(b-a)^n}{n!} M$. (C'est le terme général d'une série convergente).

La série $\sum f_n$ converge donc normalement (donc uniformément) sur $\mathbb{R}$.

Il vient que sa somme S est continue sur $\mathbb{R}$.

En fait, on a : $f_n' = f_{n-1}$ pour tout $n \geqslant 1$.

Ainsi $\sum_{n\geqslant 1} f_n'$ est à son tour CVU sur $\mathbb{R}$.

On peut alors appliquer le théorème de dérivation des séries de fonctions à la somme :

$$T(x) = S(x) - f_0(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$$

Ainsi, pour tout réel x :

$$T'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = f_0(x) + T(x)$$

Rappelons qu'on a la condition initiale $T(a) = 0$.

On cherche T sous la forme $T(x) = \lambda(x)\mathrm{e}^x$. (Variation de la constante).

On trouve $\lambda'(x) = f_0(x)\mathrm{e}^{-x}$ donc :

$$\lambda(x) = \int_a^x f_0(t)\mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t$$

Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}, T(x) = \mathrm{e}^x \int_a^x f_0(t)\mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t$.

Il vient $S(x) = f_0(x) + \mathrm{e}^x \displaystyle\int_a^x f_0(t)\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t$.

NB : le passage par T est nécessaire car on ne sait pas si f_0 est dérivable.

Math-info Centrale Duncan :

Enoncé : Epreuve bidon au sens informatique, mais pas si simple en maths.

Soit $(q_n)_{\mathbb{N}^*}$ une suite d'entiers croissante, avec $q_1 \geqslant 2$. On note $S_n = \displaystyle\sum_1^n \frac{1}{q_1 q_2 ... q_k}$.

1) Info : Regarder la convergence de S_{100} pour différentes suites. Voir Codes après.

Conjecture ?

2) Démontrer la conjecture ($S_\infty \in]0,1]$).

3) On se propose de regarder la réciproque, à savoir que $\forall x \in]0,1]$,

il peut s'obtenir comme limite de S_n pour une suite d'entiers bien choisie...

a) Montrer que $\dfrac{1}{q_1} < x \leqslant \dfrac{1}{q_1 - 1}$.

b) En déduire q_1.

c) On note $x_p = (x - S_p) \times (q_1 ... q_p)$. Trouver q_{p+1} à partir de x_p.

d) Montrer que $x_{p+1} = x_p . q_{p+1} - 1$.

e) Ecrire un programme qui trouve la suite jusqu'à 100.

Solution :

1) On conjecture la convergence et dans $]0,1]$.

Chaque $q_k \geqslant 2$, donc le terme général positif de notre série est majoré par $\dfrac{1}{2^k}$ (cvte).

2) On fait une analyse, qui devra se terminer par une réciproque structurée...

Si $x = \displaystyle\sum_1^n \frac{1}{q_1 q_2 ... q_k}$.

a) Il est clair que $x > \dfrac{1}{q_1}$ qui est le premier terme de cette série strictement positive.

b) On passe à l'inverse, $q_1 - 1 \leqslant \dfrac{1}{x} < q_1$, donc $q_1 = 1 + \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$.

c) $x - S_p = \dfrac{1}{q_1...q_{p+1}} + \dfrac{1}{q_1...q_{p+1}q_{p+2}} + ...$

Donc $(x - S_p) \times (q_1...q_p) = x_p = \dfrac{1}{q_{p+1}} + \dfrac{1}{q_{p+1}q_{p+2}} + ...$

On est revenu très exactement à la question ab), donc $q_{p+1} = 1 + \left\lfloor \dfrac{1}{x_p} \right\rfloor$.

Rq : pour la réciproque $q_{p+1} > 1$, et entier.

d) On remplace $x_{p+1} = \left(x - S_p - \dfrac{1}{q_1...q_{p+1}} \right) (q_1...q_{p+1}) = x_p.q_{p+1} - 1(**)$.

Par développement simple.

e) Les codes sont après avec des résultats cohérents.

Mais, avons nous **TOUT** ce qu'il fallait ?

Par (**), $x_{p+1} \leqslant x_p \Leftrightarrow x_p \leqslant \dfrac{1}{q_{p+1}}$ qui est vraie donc la suite (x_p) décroit (>0).

Donc $q_{p+1} = 1 + \left\lfloor \dfrac{1}{x_p} \right\rfloor$ est croissante.

Mais la série ainsi crée (cvte par 1)) converge-t-elle vers x ?

$x - S_p = \dfrac{x_p}{q_1...q_p}$ est positive décroissante vers 0, car numérateur décroit,

dénominateur croissant vers l'infini. Ai-je oublié qq chose ?

```
import numpy.random as rd
import numpy as np

def S(L):
    s=1/L[0]
    P=L[0]
    for j in range (1,len(L)):
        P=P*L[j]
        s=s+1/P
    return s
#A=[rd.randint(2,10)]
#for k in range (99):
    #A.append(rd.randint(A[-1],A[-1]+100))
def G(x):
    L=[]
    y=x
    for j in range(40):
        q=1+np.floor(1/y)
        L.append(q)
```

```
        y=y*q-1
    return L

>>> S(G(0.32))
0.31999999999999995
>>> S(G(0.6772))
0.67719999999999991 # Cohérent
```

Clara CCP :

Algèbre : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Donner le rang de A. En déduire $\dim \ker A$.

b) A est-elle diagonalisable ?

c) Quelle-est la multiplicité de la valeur propre 0 ?

d) Montrer qu'il y a 3 valeurs propres : $0, \lambda, 1-\lambda$, avec $\lambda > 1$.

e) Donner un polynôme annulateur de degré 3.

Analyse :

Soit $g_n(t) = e^t \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n$ avec $t \in [0,1]$.

1) Montrer que $|g_n'| \leqslant \dfrac{e^t}{n}$.

2) Montrer que $\left| e^t \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n - 1 \right| \leqslant t.\dfrac{e^t}{n}$.

3) Soit $I_n(x) = \displaystyle\int_0^x e^t \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt$ avec $x \in [0,1]$.

a) Montrer la convergence simple des (I_n) sur $[0,1]$.

b) Montrer la convergence uniforme des (I_n) sur $[0,1]$.

Sol : Un pur produit CCINP, très bien guidé et scolaire.

Algèbre :

a) Il se voit plutôt bien que le rang de A est $n-2$ car les $n-1$ dernières colonnes sont clairement liées, la première (V) est libre avec $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Il vient que $\dim \ker A = n - 2$.

b) Bien sûr car elle est symétrique réelle.

c) En cas de matrice diagonale la multiplicité et la dimension sont égales.

d) La trace est invariante donc après diagonalisation, on a $n-2$ zéros sur la diagonale

et "2" nombres de somme 1.

Mais comment sont ces 2 nombres ?

Grâce à la diagonalisation $\ker A \bigoplus ImA$.

Mais $rg(A) = 2$ et $Im(A) =< e_1, V >$, dans la base canonique.

Je regarde la matrice de A restreinte à $Im(A)$, base (e_1, V).

On a : $\begin{pmatrix} 0 & \left(\sum_1^n k^2\right) - 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, on en déduit que son déterminant est négatif.

Or elle est semblable à $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$, donc le produit des 2 nombres est négatif.

Or, ces deux nombres jouent le même rôle, le deuxième peut être décrété négatif.

On a tout ce qui était demandé.

e) Un polynôme annulateur se "lit" sur la diagonale de cette matrice diagonale.

$P = X(X-\lambda)(X-1+\lambda)$. Qui est bien de degré 3.

Analyse : demain...Je vais rallonger l'énoncé pour le rendre "Centrale-Mines".

Pour commencer, je corrige la variante de l'énoncé.

1) On calcule $g_n'(t) = -\frac{t}{n} e^t \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1}$.

La "parenthèse" est majorée par 1 et comme on est sur $[0,1]$, le résultat demandé est établi.

2) On regarde $g_n(t) - g_n(0) = t(g'_n(c))$ grâce aux accroissements finis, $c \in]0, t[$.

On utilise le 1) $|g_n(t) - g_n(0)| = |t(g'_n(c))| \leqslant \frac{t}{n}e^c \leqslant \frac{te^t}{n}$.

3) a)b) $I_n(x) = x + \int_0^x \left(e^t\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n - 1\right) dt$.

Ce morceau intégral, se contrôle par $\int_0^x t.\frac{e^t}{n}dt \leqslant \frac{1}{n}\int_0^1 t.e^t dt$.

Fini , on a une majoration uniforme.

Je change l'énoncé pour évoquer un exo qui ressemble beaucoup.

Idée : calculer la limite en l'infini de $E_n = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n e^t dt$.

Et kdo Bonux, un équivalent, avec une belle convergence dominée.

Soit $K_n = \int_0^n \frac{1}{\sqrt{n}}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n e^t dt$.

- On effectue un changement $\mathcal{C}^1$ sur un segment. $t = \sqrt{n}u$. Pour virer le coeff gênant.

Il vient, $\int_0^{\sqrt{n}} (e^{u\sqrt{n}}).\left(1 - \frac{u}{\sqrt{n}}\right)^n du = \int_0^{\infty} f_n(u)du$. Avec f_n nulle à partir de $\sqrt{n}$.

On restructure : $\left(1 - \frac{u}{\sqrt{n}}\right)^n = exp\left(n.\ln\left(1 - \frac{u}{\sqrt{n}}\right)\right) = exp\left(n\left(-\frac{u}{\sqrt{n}} - \frac{u^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)$.

Donc $f_n(u) = exp\left(-\frac{u^2}{2} + o(1)\right)$.

Remarque importante : à u fixé, cet équivalent deviendra vrai car $\sqrt{n}$ finira par dépasser u.

Donc convergence simple sur $\mathbb{R}_+^*$, vers $exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)$.

On valide les hypothèses du thm de convergence dominée .

- f_n converge simplement vers f.

- f_n est cpm.

- f est cpm sur $\mathbb{R}_+^*$.

Or $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_*^+)$ et elle contrôle les f_n(***) .

Preuve : inégalité semi classique $\forall \alpha \in] - 1, 0[, \ln(1 + \alpha) \leqslant \alpha - \frac{\alpha^2}{2}$.

Donc $\ln\left(1-\dfrac{u}{\sqrt{n}}\right) \leqslant -\dfrac{u}{\sqrt{n}} - \dfrac{u^2}{2n}$. C'est validé (***).

On en déduit par convergence dominée que $\lim\limits_{\infty} K_n = \displaystyle\int_0^{\infty} f(t)dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Donc $\boxed{E_n \underset{\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{n\pi}{2}}}$.

Garance : Mines

Algèbre :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose A nilpotente et que $AA^T = A^T A$.

1. Soit $B = A^T A$. Montrer que B est diagonalisable.

2. Déterminer B, puis en déduire A.

Indication inutile.

Analyse :

Soit $f_n(x) = x^n - \cos(x)$.

1. Montrer qu'il y a une unique racine (a_n) dans $[0, 1]$.

2. Déterminer la convergence de la suite (a_n) puis son éventuelle limite.

3. Donner un DL de a_n.

4. Pourrait-on améliorer ce DL ?

Sol Algèbre :

1. B est symétrique réelle donc diagonalisable.

2. $B^n = A^n.(A^T)^n$, car elles commutent, donc $B^n = 0_n$.

Mais B étant diagonalisable, sa puissance n l'est diagonale aussi, tous les termes sont nuls.

Bref $B = 0_n$.

Pour A, on regarde AX qui va se révéler tjs nul.

$BX = 0$ donc $X^T A^T AX = 0$, donc $\|AX\|^2 = 0$, $A = 0_n$.

Sol : Hyper classique.

1. On cherche bien sûr à valoriser le thm de la bijection monotone.

$f_n'(x) = nx^{n-1} + \sin(x) > 0$ ($]0,1]$), f_n est strictement croissante sur l'intervalle $[0,1]$.

$f_n(0) = -1$, $f_n(1) = 1 - \cos(1) > 0$. Tout y est, existence et unicité de a_n.

2. L'énoncé suggère en deux temps, donc on regarde la monotonie.

$f_{n+1}(a_n) \leqslant a_n^n - \cos(a_n) = 0 = f_{n+1}(a_{n+1})$ car on est dans $[0,1]$.

Or f_{n+1} croissante, donc $\forall n, a_{n+1} \geqslant a_n$ la suite est croissante.

Or elle est majorée par 1, thm de limite monotone, elle converge vers ℓ.

Si $\ell < 1$, a_n^n tendrait vers 0, or $\cos(\ell) \neq 0$, absurde.

Donc elle tend vers 1.

3. On pose $a_n = 1 - \varepsilon_n$, $\varepsilon_n \to 0$.

$a_n^n = exp(n(\ln(1-\varepsilon_n))) \longrightarrow \cos(1)$.

Donc $n(\ln(1-\varepsilon_n)) \longrightarrow \ln(\cos(1))$, donc $\varepsilon_n \underset{\infty}{\sim} -\dfrac{\ln(\cos(1))}{n}$.

On a $a_n = 1 + \dfrac{\ln(\cos(1))}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

4. Oui, on peux faire plus précis, on pose $a_n = 1 + \dfrac{\ln(\cos(1))}{n} + \dfrac{v_n}{n}$, avec $v_n \to 0$.

On remplace, on fait un DL à l'ordre 2 côté gauche, il faut faire attention à la précision.

Il en sort : $\cos(1)(1 + v_n - \dfrac{1}{2n}(\ln(\cos(1)))^2)$ que l'on égalise avec celui du côté droit.

Pour cela, il faut un DL1 de cos en 1, $\cos(u) = \cos(1) - \sin(1)(u-1) + o(u-1)$.

On remplace u par a_n, pour que les termes soient les mêmes, il faut $v_n = \dfrac{\gamma}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

On balance dans les DL précédents, γ finit par en sortir...Calculs un peu lourds.

Adrien : CCP.

Algèbre : Soit $\varphi : \mathbb{R}_3[X] \to$ "à déterminer" tel que $\forall P \in \mathbb{R}_3[X]$,

$\varphi(P)$ est le reste de la division euclidienne de X^2P par X^4-1.

1) φ est-il un endomorphisme ?

2) φ est-elle diagonalisable ? Vecteurs et valeurs propres ?

3) φ est-elle inversible ? Quelle est son inverse ?

Probabilités :

Un parc à N visiteurs quotidiens de moyenne, avec $N \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, en moyenne 4000 visiteurs.

1) Que vaut λ et $E(N)$.

2) Il y quatre guichets à l'entrée du parc, les visiteurs passent par l'un d'eux au hasard.

Soit X le nombre de personnes passées par le guichet 1 .

a) $\Omega(X)$?

b) $\mathcal{P}_{N=n}(X=k)$?

c) Montrer que $(X=k)=\bigcup\limits_{j\geqslant 0}((n=j)\cap(X=k))$.

d) $\mathcal{P}(X=k)$?

e) X_1, X_2, X_3, X_4 sont-elles indépendantes ?

Quelle est la somme de 4 lois de Poisson ?

Sol : Algèbre.

1. Bien sûr, sinon l'exo s'arrête là.

Preuve : Le reste de la division euclidienne par un polynôme de degré 4 est au plus de degré 3.

Reste à regarder la linéarité : $\forall(P_1, P_2, \alpha)$, $X^2P_1 = Q_1(X^4-1)+\varphi(P_1)$. P_2 pareil.

Ainsi $X^2(P_1+\alpha P_2) = Q(X^4-1)+\varphi(P_1+\alpha P_2) = Q(X^4-1)+\varphi(P_1)+\alpha\varphi(P_2)$.

Il suffisait de bien remplacer tout en faisant attention à nos objets (fait en classe).

2. La dimension est raisonnable, regardons la matrice dans la base canonique.

C'est après petits calculs : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Cette matrice est symétrique réelle donc diagonalisale.

Mais on peut remarquer maintenant que c'est une matrice orthogonale ! !

Son inverse est sa transposée, bref elle-même, nous avons affaire à un symétrie.

Les valeurs propres ne peuvent être que 1 ou -1, or la trace est nulle,

donc 1 et -1 sont doubles.

Certains vecteurs propres sautent aux yeux, X^2+1 et X^3+X clairement invariants.

C'est donc une base des invariants.

Pour E_{-1}, X^2-1, X^3-X , c'est pareil...

Sol Proba :

1. Question de cours et de compréhension de l'énoncé.

$\lambda = 4000$ après lecture d'énoncé et bien sûr $E(N) = \lambda$ car loi de Poisson.

2. a En théorie c'est $\mathbb{N}$.

b. Nous sommes devant un phénomène binomial. $\mathcal{P}_{N=n}(X=k) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(\frac{3}{4}\right)^{n-k}$.

c. Ici le but est de préparer la formule des probabilités totales avec un SCE.

On a bien une réunion disjointe qui recouvre tout ce qui nous est nécessaire.

d. $\mathcal{P}(X=k) = \sum_{n=k}^{\infty} \mathcal{P}_{N=n}(X=k)\mathcal{P}(N=n) = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k}\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(\frac{3}{4}\right)^{n-k}.e^{-4000}.\frac{4000^n}{n!}$.

Or $\sum_{k=r}^{+\infty} \frac{k!}{(k-r)!}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda^r$.

Je reprends le calcul : $\left(\frac{1}{3}\right)^k e^{-4000}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{3^n}{k!(n-k)!}\frac{4000^n}{4^n} = \frac{1}{k!}\left(\frac{1}{3}\right)^k e^{-4000}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{3^n}{(n-k)!}1000^n$.

Soit d'après les remarques vues avant : $\frac{1}{k!}\left(\frac{1}{3}\right)^k e^{-4000}e^{3000}3000^k = e^{-1000}\frac{1000^k}{k!}$.

Nous reconnaissons un Poisson de paramètre 1000.

e. La somme de 4 lois de Poisson mutuellement indépendantes est une loi de Poisson

de paramètre la somme des 4 paramètres.

MAIS : Il faut toujours se méfier des histoires d'indépendances...

Là, elles sont indépendantes, et ça ne sautait pas aux yeux.

Preuve : Comparons $\mathcal{P}(X_1 = a, X_2 = b, X_3 = c, X_4 = d)$

avec $\mathcal{P}(X_1 = a)\mathcal{P}(X_2 = b)\mathcal{P}(X_3 = c)\mathcal{P}(X_4 = d)$.

Je pose $n = a + b + c + d$. $\mathcal{P}(X_1 = a)\mathcal{P}(X_2 = b)\mathcal{P}(X_3 = c)\mathcal{P}(X_4 = d) = e^{-4000}\dfrac{1000^n}{a!b!c!d!}$.

Car les probabilités ne dépendent pas de l'indice de X_i.

Pour l'autre, il faut prendre en compte que $N = n$ est nécessaire, $\mathcal{P}(N = n) = e^{-4000}\dfrac{4000^n}{n!}$.

Puis on doit multiplier par la probabilités que les guichets se remplissent bien.

Idée vue dans les couteaux et tiroirs, remplir un mot de longueur n où l'on place

a fois le 1, puis b fois le 2 ...

Soit $\dfrac{1}{4^n}\dbinom{n}{a}\dbinom{n-a}{b}\dbinom{n-a-b}{c}$.

Rq : nombre de cas favorables divisés par la proba de chacun.

Enorme téléscopage multiplicatif, les valeurs sont bien égales.

Adrien : Mines Telecom.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, en dimension 2, avec une unique valeur propre λ associée à e_1.

1) Montrer que $\forall e_2$ tel que (e_1, e_2) soit une base β.

Alors $\exists a \in \mathbb{R}, Mat(f, \beta) = \begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = B$.

2) Montrer que l'on peut faire en sorte que $a = 1$ ou $a = 0$.

3) Calculer B^n.

Analyse :

Nature de $\displaystyle\int_e^4 \frac{1}{\ln(\ln(t))} dt$.

Sol : On va chercher un équivalent en e le seul point ambigu.

$t = e + h$ avec h au $\mathcal{V}(0^+)$.

$\ln(\ln(t))) = \ln(\ln(e+h))) = \ln\left(1 + \dfrac{h}{e} + o(h)\right) \underset{0}{\sim} \dfrac{h}{e}$.

Donc notre fonction est équivalente à $\dfrac{e}{h}$ Riemann non intégrable.

Marin : Mines telecom.

Algèbre : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telle que $M^3 - M^2 + M - I_n = 0_n$.

1. Dans le cas, $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, donner M.

2. Retour au cas général avec en plus, $M^T M = M M^T$, posons $Q = M^T M$.

a. Montrer que $M^4 = I_n$ et $Q^4 = I_n$.

b. Montrer que les valeurs propres de Q, conclure.

Probabilités : Soit une pièce qui a pour probabilité p de faire pile.

Soit X la variable aléatoire qui associe le nombre de lancers nécessaires pour

avoir un premier pile, donner sa loi, son espérance, sa variance.

Soit une urne dont le nombre de boules n est donné par $X = n$, X d'avant.

Elle possède alors, 1 boule blanche, et $n-1$ noires.

Soit Y la variable alétoire qui compte le nombres de tirages (ss remise)

nécessaires pour avoir la boule blanche. Donner la loi de $Y = k$, sachant $X = n$.

Puis donner $\mathcal{P}(Y = k)$.

Sol :

Algèbre :

1. M étant symétrique réelle, elle est diagonalisable.

Or ces valeurs propres annulent le polynôme : $X^3 - X^2 + X - 1 = (X-1)(X^2+1)$.

Donc 1 est la seule $M = I_n$.

2. $M^4 - I_n = (M + I_n)(M^3 - M^2 + M - I_n) = 0_n$.

$Q^4 = (M^T M)^4 = (M^T)^4 M^4$ car elles commutent, et $M^4 = I_n$, on transpose, $(M^T)^4 = I_n$.

Or Q est symétrique réelle, donc diagonalisable (réelle) .

Polynôme annulateur $X^4 - 1$, donc les valeurs propres ne peuvent être que -1 ou 1.

Astuce vue en cours, $M^T M X = \lambda X \Rightarrow X^T M^T M X = \lambda X^T X$.

Donc $\|MX\|^2 = \lambda \|X\|^2$, entraine $\lambda \geqslant 0$, la seule valeur propre recevable est 1.

Mais Q était diagonalisable ! $Q = I_n$, M est donc une matrice orthogonale.

Sol Proba : 1. Question de cours, phénomène géométrique, loi $\mathcal{P}(X = n) = pq^{n-1}$.

Espérance $1/p$, variance q/p^2. Démo par fonctions génératrices.

2. $\mathcal{P}_{X=n}(Y = k) = \dfrac{1}{n}$, car phénomène uniforme ou encore une chance sur n de gagner au premier tirage, puis gagner au deuxième veut dire perdre au premier puis gagner $\dfrac{n-1}{n}.\dfrac{1}{n-1}$.

Etc...

Oui, mais attention , il est sous-entendu (voir Q.3), $k \leqslant n$ ...

3. $\mathcal{P}(Y = k) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_{X=n}(Y = k)\mathcal{P}(X = n)$, par la formule des probabilités totales,

le SCE découle des valeurs de n qui créent la partition.

Mais attention, $k \leqslant n$! ! car pour gagner au cinquième coup il faut au moins 5 boules.

Donc $\mathcal{P}(Y = k) = \displaystyle\sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n} pq^{n-1} = \frac{p}{q}\left(-\ln(p) - \sum_{1}^{k-1} \frac{q^s}{s}\right)$. C'est laid.

Marin CCINP :

Analyse : Soient les deux séries entières, $f(x) = \displaystyle\sum_{1}^{\infty} \ln(n) x^n$ et $g(x) = \displaystyle\sum_{2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) x^n$.

1. Donner les rayons.

2. Montrer que g est définie et continue sur $[-1, 1[$.

3. J'invente une question, Marin ne se rappelle pas .

Il y bcp d'autres possibilités, voir exo 12 feuille 6 ! ! ! Exo de référence.

Plusieurs possibilités : redonner le développement en DSE de $\ln(1-x)$.

4. Trouver une relation entre $(1-x)f(x)$ et $g(x)$.

Trouver un équivalent de f et de g en 1^-.

Algèbre :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $S = \frac{1}{2}(A + A^T)$. Soit U un vecteur propre de A tel que $AU = \mu U$.

De plus les valeurs propres de S notées $(\lambda_i)_1^n$, sont rangées en ordre croissant.

1. Calculer $U^T SU$.

2. Montrer que $\lambda_1 \leqslant \mu \leqslant \lambda_n$.

Sol : Analyse.

1. Les rayons valent 1, la règle de d'Alembert (avec la variable) s'applique bien.

Attention quand même à respecter les log !

2. D'abord g converge en -1, ceci est un vrai TSSA !

Preuve : regardons l'opposé pour simplifier les calculs $b_n = -a_n$.

b_n est positif et tend vers 0 , clair selon moi.

La monotonie : $b_{n+1} - b_n = \ln\left(\dfrac{n^2-1}{n^2}\right) \leqslant 0$. Fin de la convergence.

Pour la continuité, la convergence uniforme de fonctions continues conserve la continuité.

Le TSSA précédent permet le contrôle du reste par le premier terme !

Donc $\left|\displaystyle\sum_N^{\infty} b_n x^n\right| \leqslant b_N$, contrôle indépendant de x. Donc continuité en -1.

Et bien sûr continuité sur $]-1, 1[$ car ds l'ouvert de convergence.

3. Voir aussi exo 12 feuille 6.

Là, je fais très scolaire, $\ln(1-x) = -\sum_{1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$.

4. $(1-x)f(x) = \sum_{1}^{\infty} \ln(n)x^n - \sum_{1}^{\infty} \ln(n)x^{n+1}$.

J'ai séparé car les rayons valent tous 1.

Décalage d'indice dans la deuxième, on rassemble.

$(1-x)f(x) = -g(x)$.

Je commence par un éqivalent de g, ça dépend de la fameuse question 3...

Sur $]0,1[$, $g(x) = -\sum_{2}^{\infty} \frac{x^n}{n} + \sum_{2}^{\infty} \left(\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}\right) x^n$.

Addition de séries entières convergentes.

Or la deuxième tend vers une limite finie en 1, car série absolument convergente,

en controlant x par 1.

Ainsi $g(x) \underset{1}{\sim} \ln(1-x)$. Rq : le fait qu'on ait volonatairement oublié un terme ne change rien.

Il vient $f(x) \underset{1}{\sim} -\frac{\ln(1-x)}{1-x}$.

Algèbre :

1. $U^T SU = \frac{1}{2}(U^T A^T U + U^t AU)$, ces deux choses sont des réels égaux car

transposés l'un de l'autre, on arrive à $\mu\|U\|^2$.

2. S est symétrique réelle donc DZ, $S = QDQ^T$, avec $Q \in \mathcal{O}_n$.

$U^T SU = U^T QDQ^T U = V^T DV = \sum \lambda_i v_i^2 = \mu\|V\|^2 = \mu \sum v_i^2$,

car Q^T isométrie qui conserve la norme.

L'encadrement demandé est établi, si on ouvre les yeux.

Léa : Algèbre ... Classique . Solution facile d'accès sur le web.

Soit E de dimension finie n.

1. Montrer que si $\forall x \in E$, $(x, f(x))$ est lié alors f est une homothétie.

2. Montrer que si f est non nulle et de trace nulle alors $\exists u/(u, f(u))$ est libre .

3. En déduire que il existe une base où :

$Mat_\beta(f) = \begin{pmatrix} 0 & L \\ C & M_1 \end{pmatrix}$.

4. Montrer que toute application linéaire de trace nulle est semblable

à une matrice de diagonale nulle.

Analyse : Beaucoup moins classique...

$\mathcal{D} = \{(x, y), x^2 + y^2 \leqslant 16\}$.

$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + x^2 - 3$. Trouver les extremums de f sur $\mathcal{D}$.

Sol : Analyse.

Exercice technique, qui deviendra un exercice de référence.

Tout d'abord f est continue sur $\mathcal{D}$ qui est un fermé borné de $\mathbb{R}^2$.

Donc le cours nous indique que f aura un max et un min qui seront atteints sur $\mathcal{D}$.

Pour rappel max ou min global entraine local.

Attention, pour la méthode des points critiques il faudrait une fonction $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert...

Ici f perd la classe $\mathcal{C}^1$ en $(0, 0)$.

On étudie quand même pour voir ce qui se passe sur $\mathcal{D}^o = \{(x, y), x^2 + y^2 < 16\}$.

La nullité de $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, entraine $y = 0$.

L'autre $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ entrainerait $x = 0$...

Or l'origine n'est pas recevable...

Donc max et min locaux sont soit en $(0, 0)$ soit sur le "bord".

Il est facile de voir que $f(0, 0) = -3$ et que tous les autres sont au-dessus. Min local et global.

Pour être au max, il suffit de se placer en $(\pm 4, 0)$, qui est bien sur le bord.

On a optimisé les deux morceaux en même temps.

Adrien : Centrale .

Tout cela a déjà été vu avant . Mines 2003 ,Mp.

On introduit les familles presque orthogonale :

La famillle $(X_1, ..., X_n)$ de vecteurs est μ- presque orthogonale si :

α), les vecteurs sont unitaires , pour le produit scalaire canonique.

β), $\forall (a_n)$ suite finie , $\dfrac{1}{\mu}\displaystyle\sum_1^n a_i^2 \leqslant \|\sum_1^n a_i X_i\|^2 \leqslant \mu \sum_1^n a_i^2$, avec $\mu > 0$.

1. Montrer que 1- presque orthogonale ssi orthogonale.

2. μ- presue orthogonale entraine la liberté ss clause sur μ.

3. Soit $G = Q^T Q$ avec Q matrice de passage de la base canonique vers une base $(V_1, ..., V_n)$.

Montrer que il existe P telle que $G = P^T D P$,

avec D diagonale à coeff diagonaux strictement positifs.

4. Pas de suite, mais la réciproque est vraie...

Sol : elle arrive, sur le papier c'est fait.

1. D'abord si elle est bon, alors $\|\displaystyle\sum_1^n a_i X_i\|^2 = \sum_1^n a_i^2$. Cours...

Ds l'autre sens, si elle est 1 p-o, il manque l'orthogonalité 2 à 2.

$a_i = a_j = 1$ les autres nuls donne, $\|X_i + X_j\|^2 = 2$, donc

$\|X_i + X_j\|^2 = \|X_i\|^2 + \|X_j\|^2 + 2 < X_i, X_j >= 2$. C'est acté.

2. Soit $\displaystyle\sum_1^n a_i X_i = \overrightarrow{0}$, donc $\dfrac{1}{\mu}\displaystyle\sum_1^n a_i^2 \leqslant 0$, tous les a_i sont nuls. Gagné.

3. Q possède comme vecteurs colonnes les V_i décomposés sur la canonique qui est bon.

G est symétrique donc DZ ($\mathbb{R}$) en bon d'où $G = P^T D P$.avec P matrice orthogonale.

Mais il a été vu que ce type de matrice n'a que des valeurs propres positives.

De plus $\det(Q) = (\det(G))^2 > 0$, car matrice de passage. On a tout.

4. Une famille qui est libre et unitaire est μ p-o.

La matrice $G = (g_{ij})$ vérifie $g_{ij} = \sum_{k=1}^{n} q'_{ik} q_{kj} = \sum_{k=1}^{n} < c_k, V_i >< c_k, V_j >$.

J'ai utilisé les coordonnées des V_i dans la canonique qui est BON ! !

D'ailleurs $< V_i, V_j >= \sum_{k=1}^{n} < c_k, V_i >< c_k, V_j >$, en développant.

J'introduis la matrice colonne $A = (a_1, ..., a_n)^T$, et $W = \sum_{1}^{n} a_i V_i$.

Par développement on trouve $\|W\|^2 = A^T GA = A^T P^T DPA = B^T DB$, avec $B = PA$.

Là, on peut relire ce que j'ai écrit pour Marin (CCINP).

Soit $(\lambda_i)_1^n$ le spectre de G rangé croissant.

Il vient $\lambda_1 \|B\|^2 \leqslant \|W\|^2 \leqslant \lambda_n \|B\|^2$, or comme $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $\|B\| = \|A\|$.

la famille (V_i) est donc μ p-o avec $\mu = max\left(\lambda_n, \frac{1}{\lambda_1}\right)$.

Clara Math-Info 2 :

Une matrice est dite de type n si $A^T = A^n$.

1. Ecrire une fonction, Type(M,n) qui renvoie un booléen indiquant si M est de type n.

2. Python.

Pour les matrices 2×2 à coeff ds $\{-1, 0, 1\}$, lister les matrices de type n non diagonales.

Pareil avec 3×3 à coeff ds $\{-1, 0, 1\}$. Ss entendu, modulaire obligatoire.

3. En dimension p, lister les types $0, 1, -1$.

4. Soit $A(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ Donner une CN(S) ? pour qu'elle soit de type n.

5. Soit A une matrice de type n.

a) Montrer que $A^{n^2} = A$.

b) Soit $B = A^{n+1}$. Montrer que B est une projection orthogonale.

Donner ses éléments propres.

c) Montrer que $\ker(A) \bigoplus Im(A) = E$.

d) ? ? ? C'est déjà pas mal ! ! Je vais essayer d'inventer une suite cohérente.

Sol :

Les codes :

```
from numpy import *
from numpy.linalg import *
import numpy.linalg as alg
def typ(M,n):
    B=np.transpose(M)
    A=alg.matrix_power(M,n)
    return ((B==A).all())
#E=[-1,0,1]
#HHH=[np.array([[x,y],[z,t]])for x in E for y in E for z in E for t in E if ((x,z)!=(0,0))]
#HHHHH=[np.array([[a,b,c],[d,e,f],[g,h,i]]) for a in E for b in E for c in E for d in E for e i
def test (K,n):
    W=[]
    for elt in K:
        if typ(elt,n):
            W.append(elt)

    return W
```

1. Voir codes , attention au test d'égalité entre matrices numpy.

Bien sûr cette question valorise les commandes obligatoires des feuilles fournies.

2. Ici je fais simple (produit cartésien) et on peut faire plus subtil, mais ici le temps manque.

HHH pour la dim 2 et HHHHH pour la dim 3 , regardez comment j'ai éliminé les diagonales.

3. Le type 0 donne $A^T = I_p$ donc $A = I_p$.

Le type 1 est formé des matrices symétriques.

Le type -1 est formé des matrices orthogonales.

4. La transposée de A est la rotation d'angle $-\theta$ d'axe orienté $< e_1 >$.

A^n est la rotation d'angle $n\theta$.

Donc être de type n revient à l'égalité des rootations de même axe orienté.

Soit $(n+1)\theta = 0[2\pi]$.

5.a. $A^{n^2} = (A^n)^n = (A^T)^n = (A^n)^T = A$.

b. $B = A^{n+1} = A^T.A$, elle est donc symétrique, donc dz.

$B^2 = B$ car $B^n = (A^{n+1})^n = A^{n^2+n} = A.A^n = B$, par a.

Il s'en suit que les valeurs propres de B sont nulles ou de module 1.

On a utilisé le polynôme annulateur $X(X^{n-1} - 1)$.

Mais B dz réelle ! et comme $B = A^T A$ elle est à valeurs propres positives ou nulles.

Preuve : $A^T AX = \lambda X \Rightarrow X^T A^T AX = \lambda X^T X = \lambda \|X\|^2 = \|AX\|^2$.

Il ne reste que $0, 1$ disponibles et elle est dz donc c'est une projection.

Mais B est symétrique donc noyau et image en somme directe orthogonale

(fait ds le cours isométries).

C'est bien une projection orthogonale.

Pour les éléments propres, $B = A^T A$ donc $\ker(A) \subset \ker(B)$.

Mais (vu en cours) l'autre inculsion aussi.

Preuve : $A^T AX = 0 \Rightarrow X^T A^T AX = 0 \Rightarrow \|AX\|^2 = 0$.

Donc la projection se fait parallélement à $\ker(A)$.

Mais A et A^T commutent (A commute avec A^n), donc $Im(B) \subset Im(A)$.

Et les dimensions sont les mêmes puisque les noyaux sont égaux.

Donc on projette sur $Im(A)$ qui est (vu avant c'est l'orthogonal de $\ker(A)$).

c. Bien sûr, car B étant une projection, noyau et image en somme directe.

Je n'ai pas dit que A était une projection.

Je trouve cet exo très long.

Clara Centrale 1 sans préparation.

Soit $P = \sum_{0}^{n} a_q X^q \in \mathbb{C}[X]$, $\rho \in \mathbb{R}_*^+$ puis $\mathcal{C} = \{z/|z| = \rho\}$.

1. Montrer que sur $\mathcal{C}$, $|P|$ atteint sa borne supérieure $M(\rho)$.

2. $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n+1}}$, pour tout couple (p,q) d'entiers calculer la somme $\sum_{k=0}^{n} \omega^{k(p-q)}$.

3. En déduire, pour $p = 0, 1, ...q$, $|a_p| \leqslant \dfrac{M(\rho)}{\rho^p}$.

Le correcteur a proposé de l'aide (voir corrigé).

Sol : 1. Avec nos outils, la fonction qui à z associe $|P(z)|$ est continue (somme, composée).

Notre domaine (le cercle est un fermé borné en dimension finie).

Donc elle atteint sa borne supérieure (qui existe...).

Si on veut faire simple, on se ramène au segment $[0, 2\pi]$ et on regarde la fonction continue,

$t \mapsto \left| \sum_{0}^{n} a_q \rho^q e^{iqt} \right|$.

2. Calcul très classique sur les complexes (revu en cours, somme géométrique) .

La somme est nulle ssi $(p-q)$ non multiple de $n+1$.

Sinon cette somme vaut $n+1$.

3. On calcule $\sum_{k=0}^{n} P(\rho\omega^k)\omega^{-pk} = \sum_{k=0}^{n}\sum_{q=0}^{n} a_q(\rho^q\omega^{kq})\omega^{-pk}$.

On inverse les signes sommes, on utilise 2, il reste $(n+1)a_p\rho^p$.

De plus $\sum_{k=0}^{n} P(\rho\omega^k)\omega^{-pk}$ est controlable par inégalité triangulaire, par $M(n+1)$.

Tout y est .

Camille Centrale 1 ss préparation.

Soit $\varphi(x,y) = \int_{-1}^{1} |t-x|.|t-y|dt$, soit ¥ $= \min_{[-1,1]^2}(\varphi(x,y))$.

a. Prouver l'exisrence de ¥.

b. Soit $T = \{(x,y)/ -1 < x < y < 1\}$.

Démontrer que sur T , $\varphi(x,y) = \frac{1}{3}(x-y)^3 + \frac{2}{3} + 2xy$.

c. Trouver les minimums de $\varphi(x,y)$ sur T.

d. Conclure .

Sol : C'est très technique et calculatoire ...

1. Tout d'abord $[-1,1]^2$ est un fermé borné en dimension finie (compact),

si on prouve la continuité de φ le minimum existera et sera atteint.

L'application φ est lipschitzienne de rapport 8 pour la norme 1.

Preuve : $|\varphi(x+a,y+b) - \varphi(x,y)| \leqslant \int_{-1}^{1} ||\alpha| - |\beta||$, par croissance le l'intégrale.

Là, petite feinte, inégalité triangulaire inversée : rq (a,b) "petits".

$|\varphi(x+a,y+b) - \varphi(x,y)| \leqslant \int_{-1}^{1} |ab - a(t-y-b) - b(t-x-a)|dt(*)$.

Or les quantités comme $(t-y-b)$ sont majorées par 3 à cause du placement de nos variables.

$|ab| \leqslant |a|$. On majore (*) par inégalité triangulaire normale.

Donc l'objet dans l'intégrale se contrôle par $4(|a|+|b|)$, intégré sur une longueur 2. D'où 8.

2. Tout d'abord T est un ouvert, comme l'intersection de 3 ouverts

(images réciproques d'ouverts par des fonctions continues).

Par ex $y < 1$ est ouvert grâce à $g(y) = 1 - y$ cie et on regarde l'image réciproque de $\mathbb{R}_*^+$.

Remarque T est un triangle que l'on peut dessiner au tableau pour clarifier.

On est au dessus la première bissectrice et coincé dans le carré $[-1,1]^2$.

Là, ce n'est que du calcul, $\varphi(x,y) = \int_{-1}^{x} + \int_{x}^{y} + \int_{y}^{1}$. Pour virer les valeurs absolues.

On arrive à $\int_{-1}^{1} (x-t)(y-t)dt + 2\int_{x}^{y} (t-x)(t-y)dt$.

Le plus simple est de ne surtout pas développer comme un bourrin, mais par IPP, plein d'objets nuls, le résultat proposé dans l'énoncé est validé.

3. Notre fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert, on cherrche les points critiques.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 2y - (y-x)^2 = 0 \\ \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 2x + (y-x)^2 = 0 \end{cases}, \text{ on additionne , CN } x+y=0.$$

Le seul point recevable est $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$, car $(0,0)$ n'est pas dans T.

Mais est-il un minimum ? La réponse sera oui.

Calcul de $\varphi\left(-\dfrac{1}{2}+a, \dfrac{1}{2}+b\right) - \varphi\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$, mais nous savons que les constantes et les termes en a et b vont disparaitre (DL avec gradient nul).

Il reste (attention aux erreurs) $a^2+b^2+o(...)$.

4. Pour finir le travail, x et y jouent le même rôle donc sur T' pareil.

Il resterait à voir les "bords" , sur lesquels ce mini n'est pas battu.

Calculs peu amusants... $\varphi(x,x)$ et $\varphi(1,x)$ les autres sont redondants ! ! !

Tout y est.

Mélange Léa et Théo Centrale-Mines .

$f(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^x(t)dt.$

1. Ensemble de définition.

2. Continuité et dérivabilité , $f' =?$.

3. Trouver une relation entre $f(x)$ et $f(x+2)$.

4. Trouver un équivalent de f en -1^+.

5. Trouver la limite de f en $+\infty$.

6. Prouver la convergence de $K = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\ln(\sin(t))|dt.$

Prouver que f est K lipschitzienne .

Sol : Variante réelle de Wallis, pour d'autres questions voir Wallis.

1. La fonction est continue positive sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, en 0^+, l'équivalent est $\frac{1}{t^{-x}}$.

Rq : le cas $x \geqslant 0$ est clair, $\mathcal{D}f =]-1, \infty[$.

2. Attention la variable est x, on va prouver que $f'(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t)).e^{x\ln(\sin(t))}dt$.

Ici , on parle de thms techniques.

Pour la continuité $g(x,t)$ est continue en x, cpm en t.

Mais il faudrait une fonction indépendante de x qui contrôle et intégrable.

Sur tout l'intervalle, non. On utilise le caractère local de la continuité ,

on se place sue $\left[a, \frac{\pi}{2}\right]$ avec $a > -1$. $\varphi(t) = \sin^a(t)$ fait l'affaire .

Continuité sur $\left[a, \frac{\pi}{2}\right]$ et donc sur $\mathcal{D}f$.

Pour la dérivabilité, idées similaires, on revient en exp pour y voir clair.

Il a été vu que $g(x,t) \in \mathcal{L}^1$ à x fixé.

La dérivée partielle par rapport à x est cpm.

Pour le contrôle, aspect local. $\psi(t) = \ln(\sin(t)).e^{a\ln(\sin(t))}$ fait l'affaire .

3. C'est la fameuse IPP de Wallis, la variable est t, on l'effectue dans $f(x+2)$.

Il vient sur $\mathcal{D}f$, $f(x+2) = \frac{x+1}{x+2}f(x)$, donc $f(x) \underset{-1^+}{\sim} \frac{1}{x+1}$, car $f(1) = 1$.

5. La fonction f est décroissante (voir f'), on regarde Wallis $f(n)$,

qui tend vers 0 par thm de convergence dominée. Ref de cours !

6. La fonction est continue positive sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Attention à ne pas composer les équivalents, la fonction intégrée est équivalente

en 0^+ à $-\ln(t)$, qui est soit une référence, soit négligeable devant $\frac{1}{\sqrt{t}}$.

On applique l'inégalité des accroissements finis, car $|f'|$ est majorée par K.

Camille Centrale math-info. Enoncé qui me semble curieux...Mais maintenant ça passe.

On pose $A_n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1.Prouver que A_n possède n valeurs propres réelles, notées $(\lambda_1^{(n)}, ..., \lambda_n^{(n)})$.

.

2. Ecrire une fonction `rectangle`(f), qui en utilisant la méthode des rectangles permet de calculer une valeur approchée de $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-2}^{2} f(t+2)/\sqrt{4-t^2}dt$, avec f continue .

3. Ecrire une fonction `demicercle`(n, f) qui calcule $\dfrac{1}{2n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{\lambda_k^{(n)}}{1.}\right)$.

4. Afficher les résultats des 2 fcts pour $n \in \{10, 100, 1000\}$ et $f : t \mapsto 1$, $f : t \mapsto t$.

Faire une conjecture.

5. Soit $\lambda \in Sp(A_n)$ et $X = (x_1, ..., x_n)^T$ un vecteur propre associé.

Démontrer que pour $k \in [\![1, n]\!]$, $x_{k-1} + (2-\lambda)x_k + x_{k+1} = 0$.

En posant $x_0 = x_{n+1} = 0$.

6. En déduire le spectre de A_n.

7. Conclure sur la conjecture précédente.

Sol : Il y a peut-être un énoncé qui chamboule moins le retour de Camille, mais ça va.

Les codes qui vont être utiles : disk dur centrale camille 2021.

```
from math import *
from numpy import *
from numpy.linalg import *
import numpy.linalg as alg
def rectangle(f,n):# intégrale généralisée donc rectangle milieu
#pour éviter le message d'erreur
    h=4/n
    x,s = -2.+h/2,0.
```

```
    for k in range(n):
        s += f(x+2)/sqrt(4.-x*x)
        x += h
    return h*s/2/np.pi
def f(t):
    return 1.
def g(t):
    return t+0.0
def h(t):# pour faire des tests
    return sqrt(t+3.)+0.0
def  virginie(n): # Nos matrices
    V=np.zeros((n,n))
    for i in range (0,n):
        V[i,i]=2
    for j in range(0,n-1):
        V[j,1+j]=1
    for k in range(1,n):
        V[k,k-1]=1
    return V
def vp(M): # pour visualiser le spectre
    return list(alg.eigvals(M))
def demicercle(n,f):
    L=vp(virginie(n))
    S=0
    for j in range(0,n):
        S=S+f(L[j])
    return S/n/2
```

1. A_n est symétrique réelle donc $\mathbb{R}$ dz.

2. Voir codes , attention aux erreurs...

Rq : intégrale généralisée convergente, car aux extrémités on a dominant

de type Riemann convergente.

3. Voir codes qui valorisent les feuilles "Centrale".

4. L'égalité bien sûr.

5. Cela a été fait au tableau, matrices de Toeplitz (Centrale PSI 2018) et encore en ligne ...

6. On trouve n valeurs propres : $k \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_k^{(n)} = 2 + 2\cos\left(\dfrac{k\pi}{n+1}\right)$.

7. On fait le changement de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone : $t = 2\cos(\theta)$.

On aboutit à : $\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f(2+2\cos(\theta))d\theta$. D'où l'idée du demi-cercle.

On nous a imposé la méthode des rectangles , invitation directe aux sommes de Riemann.

On l'évalue : $\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n} f\left(2+2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)$.

Elle ressemble beaucoup à celle qui est dans l'énoncé.

Les deux convergent bien vers la même limite car $\frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{n}$.

Et on évalue la dernière en $n+1$, il y a alors un terme en trop, il tend vers 0.

Enzo CCINP :

Analyse : Soit une suite (a_n) définie par $a_0 = a_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = a_{n+1} + (n+1)a_n$.

On pose $f(x) = \sum_0^{\infty} \frac{a_n x^n}{n!}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{a_n}{n!} \leqslant 1$. En déduire le rayon R de f.

2. Trouver une équation différentielle d'ordre 1 vérifiée par f.

3. Résoudre cette équation.

4. Exprimer a_{2p} et a_{2p+1} en fonction de p.

Algèbre : exo fait en révision d'oraux le 1207.

Sol :

1. C'est une récurrence à deux prédécesseurs (assez simple).

On ne peut pas en déduire le rayon, mais ceci garantit que $R \geqslant 1$.

Cela permet d'ailleurs de justifier la validité des calculs qui vont suivre.

2. On calcule $f'(x) = \sum_0^{\infty} \frac{a_{j+1}x^j}{j!}$.

On utilise la relation de l'énoncé, on range, il vient $f'(x) = (x+1)f(x)$.

Rq : on utilise $a_0 = a_1$ ds le téléscopage.

3. Equation linéaire homogène, avec les conditons initiales, solution unique, $exp(x + \frac{x^2}{2})$.

4. On pense à un produit de Cauchy, les calculs semblent vilains, car l'un des deux est lacunaire.

On peut aussi penser que connaitre $f^n(0)$, permettrait d'avoir le coeff de la DSE.

Je teste (bêtement) la formule de Leibniz, echec cuisant. Mon calcul se termine par $0 = 0$...

Je relis l'énoncé, on nous suggère de séparer les pairs des impairs, je retourne vers Cauchy...

Le calcul (selon moi) aboutit à un truc vilain, mais je pense que l'objectif de l'interrogateur

est le suivant : attendre de tester les propositions du candidat, de connaitre les hypothèses

sur les rayons pour effectuer le produit de Cauchy.

Puis de poser le début du calcul avec vérification de la formule, puis stopper le massacre.

Je vous le fait quand même, $f(x) = e^x.e^{\frac{x^2}{2}}$.

Je pose $b_k = \dfrac{1}{k!}$, $a_{2k} = \dfrac{1}{2^k.k!}$, lacunaire.

Je traite le cas pair pour éviter la partie entière, et simplifier les écritures.

Il vient : $\displaystyle\sum_0^p a_{2p}b_{2p-2s} = \sum_0^p \frac{1}{s!2^s(2p-2s)!}$, au $(2p)!$ près.

Je ne vois pas de simplifications, si besoin je reviens vers vous.

J'ai bien sûr testé bcp d'autres idées mais , je suis coi .

Enzo Centrale 2 :

Soit $Q(x) = (x-1)(x^2-2)^2$.

Soit (x_n), telle que $x_{n+1} = f(x_n)$ avec $x_0 = 10$.

On se donne $f(x) = x - \dfrac{Q(x)}{Q'(x)}$.

1. Ecrire une fct Python `Suite (N)`, qui renvoie la liste des $N-1$ premiers termes de x_n.

Vérifier que (x_n) tend vers $\sqrt{2}$.

2. Montrer que Q' est à racines simples, et on admettra qu'il en est de même pour Q".

3. Montrer que f est strictement croissante sur $]\sqrt{2}, +\infty[$.

4. En déduire que (x_n) décroit vers $\sqrt{2}$.

5. Ecrire une fonction Python `Graphe (N)` représentant $(k, \ln(x_k - \sqrt{2}))$.

Pour $k \in [\![0, N-1]\!]$.

6. Déduire de ce graphe, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $ln(x_k - \sqrt{2}) = a - bk + o(1)$.

7. ? ? ?

Prouver la conjecture ? Si c'est ça, pas facile ...

Camille Mines 15 min de préparation ... Ca fait court, pour ce qui vient ...

Algèbre : Calculer la limite de la puissance n-ième de $A_n = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda/n \\ \lambda/n & 1 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Fait en cours, exemple de référence, suites de matrices (EVN).

Analyse : Soit l'équation différentielle $x^2y" - x(2x^2 - 1)y' - (1 + 2x^2)y = 0$.

1. Trouver une solution DSE, donner son rayon.

2. Trouver la solution.

Sol : On cherche une solution $f(x) = \sum_0^{\infty} a_n x^n$, avec un rayon de convergence non nul .

On remplace, on fait les changements d'indices classiques,

il vient $\sum_0^{\infty} a_n x^n (n^2 - 1) = 2\sum_2^{\infty} (n-1) a_{n-2} x^n$.

On en déduit $a_0 = 0$, $(n+1)a_n = 2a_{n-2}$, donc les termes pairs sont nuls.

Si on ne voit pas, on calcule les premiers termes, $a_{2j+1} = \dfrac{1}{(j+1)!}$.

Démo par récurrence aisée, de rayon inini car, $\left| \dfrac{x^{2j+1}}{(j+1)!} . \dfrac{j!}{x^{2j-1}} \right|$ tend vers 0.

On peut l'écrire en développée, il sort : $a_1 \dfrac{e^{x^2} - 1}{x}$.

2. Rq : comme elle est DSE, elle est $\mathcal{C}^{\infty}$.

Mais le thm de Cauchy-Lipschitz linéaire nous assure (hypothèses ok ?),

que l'espace vectoriel des solutions est de dimension 2 sur $\mathbb{R}_*^+$! ! !

Il nous manque donc un "copain" sur $\mathbb{R}_*^+$, pareil sur l'autre...

Là, plusieurs plans, mais "l'autre" ne peut être DSE.

Méthode " maladroite " mais pas de honte pour autant, si on est coi,

on pose $y(x) = g(x)\dfrac{e^{x^2}-1}{x}$.

Elle aboutit, avec des calculs "raisonnables"...

Mais l'élève "malin" (;-)) aura vu immédiatement que $y_0(x) = \dfrac{1}{x}$, est solution...

Donc sur $\mathbb{R}_*^+$, $y(x) = \dfrac{\alpha}{x} + \beta\dfrac{e^{x^2}-1}{x}$ et sur $\mathbb{R}_*^-$, $y(x) = \dfrac{\alpha'}{x} + \beta'\dfrac{e^{x^2}-1}{x}$.

Le prolongement va nous " concrétiser " l'énoncé, à savoir, "LA" solution.

La limite en 0 exige $\alpha = \alpha' = 0$ (immédiat).

Pour les "autres , il vient, $\beta = \beta'$, non pas par continuité mais égalité des dérivées à "g,d" .

Il ne reste que notre DSE qui est donc $\mathcal{C}^\infty$, et unique !

Ss entendu, espace vectoriel des solutions sur $\mathbb{R}$ de dimension 1.

Pour les maths-infos Centrale, il me les faut en format lisible.