RMS Mines
PSI *
Année 2019

Année -2.

Attention aux erreurs de frappes...

—© cours.

—♠ dur.

—♢ fondamental.

—♡ j'adore.

Algèbre 631. Soit (E) l'équation d'inconnue $P \in \mathbb{R}_n[X]$ définie par $P(\cos x) = \cos(P(x))$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

a) Trouver les solutions de (E) de degré 0.

b) Trouver les solutions de (E) de degré 1.

c) Résoudre (E).

Sol :

- Bien sur le poynôme nul n'est pas solution de (E).

- L'équation $\lambda = \cos(\lambda)$ a une unique solution réelle λ_0.

Plus précisément $\lambda_0 \in]0, \pi/2[$.

$P = \lambda_0$ est l'unique solution de degré 0.

- Soit $P = aX + b(a \neq 0)$ une solution de (E).

Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}, a \cos x + b = \cos(ax + b)(\star)$.

On dérive deux fois : $\forall x \in \mathbb{R}, \cos x = a \cos(ax + b)$.

En reportant dans $(\star)$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \left(a - \frac{1}{a}\right) \cos x + b = 0$$

Ainsi $b = 0$ et $a = \pm 1$.

Mais le cas $a = -1$ ne convient pas.

Il ne reste que $P = X$, qui convient effectivement.

- Par l'absurde, on suppose l'existence d'un polynôme solution P de degré $\geqslant 2$.

En dérivant (E) on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P'(x) \sin P(x) = (\sin x) P'(\cos x)$$

Du fait que $\deg P \geqslant 2$, on a :

$$\lim_{x \to +\infty} \left|P'(x)\right| = \lim_{x \to +\infty} |P(x)| = +\infty$$

On peut former une suite (x_n) telle que :

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = +\infty \text{ et } |P(x_n)| \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$$

L'égalité $(\star)$ donne alors :

$$\forall n \in N, \left|P'(x_n)\right| = \left|(\sin x_n) P'(\cos x_n)\right| \leqslant M$$

où $M = \sup_{[-1,1]} |P'(x)|$.

La suite $|P'(x_n)|$ est donc bornée, ce qui est absurde.

En conclusion : les seules solutions de l'équation (E) sont les polynômes λ_0 et X.

632. a) Montrer que $\dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = n(n+1)/2$.

b) Est-ce que l'ensemble des matrices nilpotentes est un espace vectoriel ?

c) Soit $\mathcal{N}$ un sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ composé de matrices nilpotentes.

Montrer que $\dim \mathcal{N} \leqslant n(n-1)/2$.

d) Peut-on avoir $\dim \mathcal{N} = n(n-1)/2$?

Sol : classique.

633. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $2 \leqslant k \leqslant n$ et $A_k = \left(a_{ij}^{(k)}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in M_n(\mathbb{R})$

telle que $a_{ij}^{(k)} = 1$ si $i - j = k - 1$, les autres coefficients étant nuls.

a) Calculer $A_k^T A_k$.

Soit p un projecteur de $\mathbb{R}^n$ tel que $p \neq \mathrm{id}$.

b) Démontrer que le rang de p est strictement inférieur à n.

c) Démontrer que p est la composée de deux endomorphismes nilpotents.

Sol :

a) $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, etc.

$A_k^T A_k = \left(\begin{array}{c|c} I_{n-k+1} & 0 \\ \hline O & 0_{k-1} \end{array}\right)$, pv par applications linéaires associées, pas par les coeff...

b) Si le rang de p est n, il est inversible, or dans une base adaptée un projecteur est diagonalisable avec des 1 au début et des 0 pour finir, ce serait donc l'identité. Impossible.

c) Soit p un vrai projecteur, on le diagonalise dans une base adaptée à $E = Im(p) \bigoplus \ker(p)$.

$P = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline O & 0_{n-r} \end{array}\right) = A_k^T A_k$ avec $k = n-r+1$, et ces 2 matrices sont nilpotentes (classique).

634. On note $\mathcal{H}$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ forme des matrices de trace nulle et $\mathcal{N}$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $M_n(\mathbb{C})$.

a) Les ensembles $\mathcal{H}$ et $\mathcal{N}$ sont ils des sous-espaces vectoriels ?

b) Montrer que $\mathcal{H} = \mathrm{Vect}(\mathcal{N})$.

Sol : a) $\mathcal{H}$ bien sûr est un hyperplan de référence (noyau de la trace) .

$\mathcal{N}$ non, car on prend $\left(\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline O & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline O & 0 \end{array}\right)^T = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array}\right)$ qui n'est pas nilpotent, donc pas de stabilité additive.

b) $\mathcal{N} \subset \mathcal{H}$ car on peut trigonaliser les nilpotents qui auront une diagonalle entièrement nulle.

Et la trace est un invariant de similitude.

Il vient donc que $\text{Vect}(\mathcal{N}) \subset \mathcal{H}$. Regardons une base classique de $\mathcal{H}$.

$(E_{i,j})$ pour $i \neq j$, et $E_{1,1} - E_{i,i}$, $i \geqslant 2$. Les premières sont nilpotentes.

Les suivantes, suivent le modèle suivant :

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ nilpotentes toutes les deux.

635. Soient $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ et $f \in \mathbb{C}[X], P \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k P(X+k)$.

Donner une CNS sur $(a_0, \ldots, a_n)$ pour que f soit un isomorphisme.

636. Soient E et F deux espaces vectoriels et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

On dit que $v \in \mathcal{L}(F, E)$ vérifie $(*)$ si $u \circ v \circ u = u$ et $v \circ u \circ v = v$.

a) Montrer que si $v \in \mathcal{L}(F, E)$ vérifie $(*)$, alors $E = \text{Im} v \oplus$ Ker u et $F = \text{Im}\, u \oplus \text{Ker}\, v$.

b) Soient E_1 un supplémentaire de Ker u dans E et F_1 un supplémentaire de $\text{Im}\, u$ dans F.

Montrer qu'il existe un unique $v \in \mathcal{L}(F, E)$ vérifiant à la fois $(*)$ et $E_1 = \text{Im}\, v, F_1 = \text{Ker}\, v$.

Sol :

a) Classique, mais attention aux ...,

on n'est pas en dim finie, pas de thm du rang, ni de base...

Par analyse synthèse, il vient $\forall x \in E, x = v \circ u(x) + (x - v \circ u(x))$.

Décomposition qui est du type : $E = \text{Im} v \oplus$ Ker u.

L'analyse a prouvé l'unicité !!!

L'autre somme directe est la même car les hypothèses sont symétriques.

b) Là , il faut secouer le c....

Mais pour clarifier, ce qui vient : u est injective sur E_1, car $\ker u_{/E_1} = E_1 \cap \ker u = \{\overrightarrow{0}\}$.

On va analyser, le problème ce qui déclenchera l'éventuelle unicité,

puis conclure par une vérification.

Il faut définir v sur F, mais comme on exige $v_{/F_1} = 0_{\mathcal{L}(F)}$, il ne reste qu'à définir v sur $Im(u)$.

Et on imposera , v nulle sur F_1.

Mais, un vecteur de $Im(u)$ a des antécédents dans E, grâce à la somme directe sur E,

on peut exiger un antécédent dans E_1, et il est alors unique, car u est injective sur E_1.

Bref $\forall z \in Im(u), z = u(e_1)$ avec unicité de ce e_1.

Si v existe avec toutes les hypothèses désirées, $v(u(e_1)) = w + a_1$ avec $w \in \ker(u), a_1 \in E_1$.

Mais on exige aussi que v aille vers E_1 donc w serait nul.

Par (*), il vient $u(v(u(e_1))) = u(a_1) = u(e_1)$ donc $a_1 = e_1$ par injectivité de u sur...

Il n'y aurait plus qu'un seul choix,

v enverrait les vecteurs de $Im(u)$ sur leur seul antécédent dans E_1.

Fin de l'analyse de la situation, soit v ainsi construit.

On le valide :

- Il est bien nul sur F_1 et (attention à l'autre inclusion),

pour $z \in \ker(v)$, $z = u(e_1) + f_1$, $v(z) = v(u(e_1)) = e_1 = \overrightarrow{0}$,

donc $z = f_1$! ainsi $\ker(v) \subset F_1$...Double inclusion.

- Par construction ,v envoie les vecteurs dans E_1, attention aussi, (pareil)

pour $z \in E_1$, $u(z) \in Im(u)$, $v(u(z)) = z \Rightarrow z \in Im(v)$, double inclusion...

- Soit $x \in E$, $x = w + e_1$, $u(x) = u(e_1)$, $v(u(x)) = v(u(e_1)) = e_1$, $u(v(u(x))) = u(e_1) = u(x)$.

- Soit $y \in F$, $y = u(b_1) + f_1$, $v(y) = v(u(b_1)) = b_1$, $v(u(v(y))) = v(u(b_1)) = b_1 = v(y)$.

La dernière est plus subtile : elle vient du fait que $u(v(y)) = u(b_1)$.

Car $v(y) = v(u(b_1)), u(v(y)) = u \circ v \circ u(b_1)$,

on applique u, puis on utilise $uvu = u$ déjà validé...

637. Soit S_n l'ensemble des bijections de $[\![1, n]\!]$ dans lui-même.

a) Rappeler le cardinal de S_n.

b) Soit $\sigma \in S_n$. Montrer que l'application $f \mapsto f \circ \sigma$ réalise une bijection de S_n sur S_n.

c) Soit E un espace vectoriel de dimension n et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

On note pour $\sigma \in S_n, f_\sigma$ le seul endomorphisme de E vérifiant $f_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$ pour tout i.

Montrer que l'application $p = \dfrac{1}{n!} \displaystyle\sum_{\sigma \in S_n} f_\sigma$ est un projecteur de E

dont on précisera le noyau et l 'image.

Sol :

Oral Centrale aussi !

a) Il est clair que $\varphi_\sigma \circ \varphi_{\sigma^{-1}} = \varphi_{\sigma^{-1}} \circ \varphi_\sigma = \mathrm{Id}_{S_n}$.

L'application φ_σ est une permutation de S_n, d'inverse $\varphi_{\sigma^{-1}}$.

b) Soit s, σ dans S_n, et $i \in [\![1, n]\!]$.

On a : $(f_s f_\sigma)(e_i) = f_s\left(e_{\sigma(i)}\right) = e_{(s\sigma)(i)}$, donc $f_s f_\sigma = f_{s\sigma}$.

Ainsi, pour tout $\sigma \in S_n$, on a :

$$
\begin{aligned}
p_n f_\sigma &= \frac{1}{n!} \sum_{s \in S_n} f_s f_\sigma = \frac{1}{n!} \sum_{s \in S_n} f_{s\sigma} \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{s \in S_n} f_s = p_n
\end{aligned}
$$

(on a utilisé ici le fait que $s \mapsto s\sigma$ est une permutation de S_n).

Du fait que $\operatorname{card}(S_n) = n!$), il en résulte :

$$
p_n^2 = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} p_n f_\sigma = \frac{1}{n!} \sum_{s \in S_n} p_n = p_n
$$

Ainsi p_n est un projecteur de $\mathbb{R}^n$.

- Si $\sigma \in S_n$ échange i et j, on a : $p_n(e_i) = (p_n f_\sigma)(e_i) = p_n(e_j)$.

Ainsi : $\forall (i, j) \in [[1, n]]^2, p_n(e_i) = p_n(e_j)$.

L'hyperplan $H = \text{Vect}\{e_j - e_1, j \in [[2,n]]\}$ est donc inclus dans $\text{Ker}(p_n)$.

Il en découle que, nécessairement, $\text{rg}(p_n) \leqslant 1$.

c) Soit $S_{n,j}$ l'ensemble des $(n-1)!\sigma \in S_n$ telles que $\sigma(1) = j$, avec j donné dans $[\![1,n]\!]$.

Ainsi S_n est l'union disjointe des $S_{n,j}$, pour $j \in [\![1,n]\!]$.

Avec ces notations, on obtient :

$$p_n(e_1) = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n} e_{\sigma(1)} = \frac{1}{n!}\sum_{j=1}^{n}\sum_{\sigma\in S_{n,j}} e_{\sigma(1)} = \frac{1}{n!}\sum_{j=1}^{n}\sum_{\sigma\in S_{n,j}} e_j = u,\ \text{où}\ u = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} e_j$$

Ainsi $\text{rg}(p) = 1$, avec $\text{Im}(p) = \mathbb{R}u$ et $\text{Ker}(p) = \text{Vect}\{e_j - e_1, j \in [\![2,n]\!]\}$.

638. Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$;

a) Montrer que la suite $\left(\text{Ker}\left(u^k\right)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante pour l'inclusion jusqu'à un certain rang $r \leqslant n$ au-delà duquel elle est constante.

Que dire de la suite $\left(\text{Im}\left(u^k\right)\right)_{k\in N}$?

b) Montrer que $\text{Im}\left(u^k\right)$ est stable par u pour tout $k \in \mathbb{N}$.

c) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\text{rg}\left(u^k\right) - \text{rg}\left(\mathrm{u}^{k+1}\right) = \dim\left(\text{Im}\left(u^k\right) \cap \text{Ker}u\ \right)$

Sol :

On note $\begin{cases} n_k = \dim\text{Ker}\left(u^k\right) \\ d_k = n_{k+1} - n_k \end{cases}$

Montrons que (n_k) est croissante et que (d_k) est décroissante.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\text{Ker}\left(u^k\right) \subset \text{Ker}\left(u^{k+1}\right)$.

Ainsi $n_k \leqslant n_{k+1}$: la suite (n_k) est croissante.

Enfin, si $\text{Ker}\left(u^k\right) = \text{Ker}\left(u^{k+1}\right)$, alors $\text{Ker}\left(u^{k+1}\right) = \text{Ker}\left(u^{k+2}\right)$ (classique et facile).

La suite (n_k) (qui ne saurait être indéfiniment strictement croissante car E est de dimension finie) est donc stationnaire.

- Soit v_k l'endomorphisme induit par u sur $\text{Im}\left(u^k\right)$ (sous-espace stable par u).

Le théorème du rang, appliqué à v_k, s'écrit :

$$\operatorname{rg}\left(u^{k}\right)=\operatorname{dim} \operatorname{Ker}\left(v_{k}\right)+\operatorname{dim} \operatorname{Im}\left(v_{k}\right)$$

Mais $\left\{\begin{array}{l}\operatorname{Ker}\left(v_{k}\right)=\operatorname{Im}\left(u^{k}\right) \cap \operatorname{Ker}(u) \\ \operatorname{Im}\left(v_{k}\right)=\operatorname{Im}\left(u^{k+1}\right)\end{array}\right.$

Ainsi (encore le théorème du rang) :

$$\begin{aligned} d_{k}=n_{k+1}-n_{k} & =\operatorname{rg}\left(u^{k}\right)-\operatorname{rg}\left(u^{k+1}\right) \\ & =\operatorname{dim}\left(\operatorname{Im}\left(u^{k}\right) \cap \operatorname{Ker}(u)\right)\end{aligned}$$

Mais $\operatorname{Im}\left(u^{k+1}\right) \subset \operatorname{Im}\left(u^{k}\right)$ donc $d_{k+1} \leqslant d_{k}$.

La suite $\left(d_{k}\right)_{k \geqslant 0}$ est donc décroissante (et elle finit par stationner en 0).

La décroissante de la suite $\left(d_{k}\right)$ s'appelle la propriété d'essouflement des noyaux.

639. Soit $E=\mathcal{M}_{2}(\mathbb{R})$ et D une application de E dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$\forall A, B \in E, D(A B)=D(A) D(B)$ et $D\left(I_{2}\right) \neq D\left(E_{2,1}+E_{1,2}\right)$.

a) Montrer que si $A \in E$ est nilpotente alors $D(A)=0$.

b) Montrer que $A \in E$ est inversible si, et seulement si, $D(A) \neq 0$.

Sol :

a) On a $\left\{\begin{array}{l}D\left(0_{n}\right)=D\left(0_{n}^{2}\right)=D\left(0_{n}\right)^{2} \\ D\left(I_{n}\right)=D\left(I_{n}^{2}\right)=D\left(I_{n}\right)^{2}\end{array}\right.$

On en déduit $\left\{\begin{array}{l}D\left(0_{n}\right) \in\{0,1\} \\ D\left(I_{n}\right) \in\{0,1\}\end{array}\right.$

L'égalité $D\left(0_{n}\right)=1$ impliquerait

$$\forall M \in E, D(M)=D(M) D\left(0_{n}\right)=D\left(0_{n}\right)=1$$

(absurde). Donc $D\left(0_{n}\right)=0$.

L'égalité $D\left(I_{n}\right)=0$ impliquerait

$$\forall M \in E, D(M)=D\left(M I_{n}\right)=D(M) D\left(I_{n}\right)=0$$

(absurde). Donc $D\left(I_{n}\right)=1$.

b) On a $D\left(M^{k}\right)=D(M)^{k}$ pour tout k (récurrence).

Soit A une matrice nilpotente.

Alors $A^n = 0$ donc $D(A)^n = D(0) = 0$.

c) Soit $A \in E$, inversible.

Alors $D(A)D\left(A^{-1}\right) = D\left(I_n\right) = 1$, donc $D(A) \neq 0$.

Supposons $\mathrm{rg}(A) = r < n$.

Alors : $\exists P, Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), A = P\begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q$.

Or $N = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est nilpotente donc $D(N) = 0$.

Ainsi $D(A) = D(P)D(N)D(Q) = 0$.

Conclusion : $(A$ inversible $) \Leftrightarrow D(A) = 0$.

640. a) Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Pour tout $n \in$ N, on pose $E_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{M^k}{k!}\cdot$.

Montrer que la suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

b) Montrer que pour tout $A \in GL_2(\mathbb{C})$, il existe $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{B^k}{k!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} A$.

Sol : Incomplet...

Je me permets de changer l'énoncé pour le valoriser.

1) Regardons l'exponentielle complexe : $\displaystyle\sum_{0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$. Converge par d'Alembert.

C'est une surjection vers $\mathbb{C}^*$, $e^{a+ib} = e^a(\cos(b) + i\sin(b)) = Z = \rho e^{i\theta}(*)$,

équivaut à $a = \ln(\rho)$ et $b = \theta[2\pi]$.

Regardons $e^z.e^u = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!}.\sum_{n\geqslant 0} \frac{u^n}{n!} = \sum_{n\geqslant 0}\sum_{p+q=n} \frac{z^p}{p!}\frac{u^q}{q!}$. Produit de Cauchy !

Par ailleurs, grâce au binôme :

$$\sum_{p+q=n} \frac{z^p}{p!}\frac{u^q}{q!} = \sum_{p=0}^{n} \frac{z^p}{p!}\frac{u^{n-p}}{(n-p)!} = \frac{1}{n!}\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p} z^p u^{n-p} = \frac{1}{n!}(z+u)^n.$$

Il vient $(**) e^z.e^u = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(z+u)^n}{n!} = e^{z+u}$. C'est d'ailleurs comme ça que l'on prouve (*).

a) La matrice A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Soit $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ tel que $A = P \begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \mu \end{pmatrix} P^{-1}$ avec $a \in \mathbb{C}$.

On a $\begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \mu \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & \delta_k \\ 0 & \mu^k \end{pmatrix}$, où $\delta_k = a \sum_{j=0}^{k-1} \lambda^j \mu^{k-1-j}$ (récurrence facile).

On a $|\delta_k| \leqslant k|a|\rho^{k-1}$, où $\rho = \max(|\lambda|, |\mu|)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!} = PT_kP^{-1}$,

avec $T_k = \begin{pmatrix} s_n(\lambda) & \sigma_n \\ 0 & s_n(\mu) \end{pmatrix}$, où $\sigma_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\delta_k}{k!}$.

La série $\sum \dfrac{\delta_k}{k!}$ converge (Alembert). Notons σ sa somme.

Alors la suite (T_k) converge vers $T^* = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^\lambda & \sigma \\ 0 & \mathrm{e}^\mu \end{pmatrix}$.

Il en résulte que $\sum \dfrac{A^k}{k!}$ converge vers PT^*P^{-1}.

On déduit que Sp $\big(\exp(A)\big) = \big\{\mathrm{e}^\lambda, \mathrm{e}^\mu\big\}$

où λ, μ sont les valeurs propres de A (éventuellement confondues).

Ainsi $\mathrm{Sp}(\exp(A)) = \exp(\mathrm{Sp}(A))$.

On note aussi que $\det(\exp(A)) = e^{\lambda+\mu} = e^{\mathrm{tr}(A)}$.

Ceci prouve l'inversibilité mais : on peut aussi remarquer que la même preuve par produit

de Cauchy prouverait que si 2 matrices communtent alors $exp(A)exp(B) = exp(A+B)$...

On en déduit que $(exp(A))^{-1} = exp(-A)$ ...

c) L'application $\varphi : A \mapsto \exp(A)$ n'est pas injective.

Par exemple, avect $A = \begin{pmatrix} 0 & -2\pi \\ 2\pi & 0 \end{pmatrix}$, on $a \exp(A) = I_2 = \exp(0)$.

Elle n'est pas surjective. En effet :

$\forall A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}), \det(\exp(A)) = \mathrm{e}^{\mathrm{tr}(A)} \neq 0$.

donc $\mathrm{Im}(\varphi) \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$.

Mais elle est surjective vers $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$.

On sépare les cas possibles :

- Si la matrice de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ est Dz : On se place dans la base de Dz.

Puis , on cherche un antécédent à $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$

Par surjectivité de l'exponentielle complexe λ et μ ont des antécédents : λ', μ'

On applique le calcul du a) à $\begin{pmatrix} \lambda' & 0 \\ 0 & \mu' \end{pmatrix}$.

Son exponentielle converge vers $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$.

- Sinon , on est dans le cas de deux vp égales et on peut trigonaliser ,

on se place dans la base qui réalise ça.

On cherche donc un éventuel antécédent à $\begin{pmatrix} \lambda & \gamma \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Calcul préalable utile !

$exp\left(\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, car en cas de nilpotence la somme est finie...

Soit α un antécédent de λ par exponentielle complexe et $\beta = \dfrac{\gamma}{e^{\alpha}}$.

Alors un antécédent recevable est $\alpha I_2 + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Qui commutent !

d) Non demandé mais...

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $A = R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

On a $A^k = R_{k\theta}$.

Ainsi $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!} = \begin{pmatrix} C_n(\theta) & -S_n(\theta) \\ S_n(\theta) & C_n(\theta) \end{pmatrix}$ où $\displaystyle C_n(\theta) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos k\theta}{k!}, S_n(\theta) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin k\theta}{k!}$.

D'autre part, on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{ik\theta}}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left(e^{i\theta}\right)^k}{k!} = \exp\left(e^{i\theta}\right) = \exp(\cos\theta)(\cos(\sin\theta) + i\sin(\sin\theta))$$

Ainsi $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} C_n(\theta) = \exp(\cos\theta)\cos(\sin\theta) \\ \lim\limits_{n\to+\infty} S_n(\theta) = \exp(\cos\theta)\sin(\sin\theta) \end{cases}$ et

$$\exp\left(R_\theta\right) = \exp(\cos\theta)\begin{pmatrix} \cos(\sin\theta) & -\sin(\sin\theta) \\ \sin(\sin\theta) & \cos(\sin\theta) \end{pmatrix} = \exp(\cos\theta) R_{\sin\theta}$$

641. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie.

Un endomorphisme u de E est d'ordre $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ si $u^k = \text{id}$ et si,

pour tout $i \in \{1, \ldots, k-1\}, u^i \neq Id$.

a) Que dire en termes de réduction des endomorphismes d'ordre $k \geqslant 1$?

b) Préciser les ordres possibles pour une matrice carrée de taille 2 à coefficients entiers.

Sol :

a) La matrice A est annulée par $X^k - 1$ (scindé simple dans $\mathbb{C}$) donc est diagonalisable.

Ses valeurs propres sont des racines k -ièmes de 1 .

b) Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, d'ordre k.

Soit $\{\lambda_1, \lambda_2\}$ le spectre de A. On a $\lambda_1^k = \lambda_2^k = 1$.

La matrice A est semblable à $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.

Ces deux matrices ont donc le même ordre k.

On a $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$ donc : $|\operatorname{tr}(A)| = |\lambda_1 + \lambda_2| \leqslant 2$ et $|\det(A)| = 1$.

Mais $\operatorname{tr}(A)$ et $\det(A)$ sont entiers donc

$$\begin{cases} \operatorname{tr}(A) \in \{-2, -1, 0, 1, 2\} \\ \det(A) \in \{1, -1\} \end{cases}$$

On discute selon que P_A est scindé sur $\mathbb{R}$ ou non.

Si P_A est scindé sur $\mathbb{R}$, alors :

$$\begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 = 1 \\ k = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 = -1 \\ k = 2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \{\lambda_1, \lambda_2\} = \{1, -1\} \\ k = 2 \end{cases}$$

Sinon, il existe $\theta \in \mathbb{R}\backslash\{\pi\mathbb{Z}\}$ tel que

$$\lambda_1 = \mathrm{e}^{i\theta} \text{ et } \lambda_2 = \overline{\lambda_1}$$

On a alors $\begin{cases} \det(A) = 1 \\ \operatorname{tr}(A) = 2\cos(\theta) \in \{-1, 0, 1\} \end{cases}$

Si $2\cos(\theta) = -1$, alors :

$$\{\lambda_1, \lambda_2\} = \left\{j, j^2\right\} \text{ et } k = 3$$

Si $2\cos(\theta) = 0$, alors :

$$\{\lambda_1, \lambda_2\} = \{i, -i\} \text{ et } k = 4$$

Si $2\cos(\theta) = 1$, alors :

$$\{\lambda_1, \lambda_2\} = \left\{-j, -j^2\right\} \text{ et } k = 6$$

Ainsi les ordres possibles d'une matrice de $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ sont : $1, 2, 3, 4, 6$.

En particulier, si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ est d'ordre fini, alors $A^{12} = I_2$.

$642, a)$. Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = B^2 = 0$ et $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(B)$.

Montrer que les matrices A et B sont semblables.

b) Le résultat subsiste-t-il avec les hypothèses $A^3 = B^3 = 0$ et $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(B)$?

643. Soit $u \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ non nul tel que $u^3 = u^2$ et $C(u) = \left\{v \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right),\ u \circ v = v \circ u\right\}$.

Montrer que $C(u)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ et déterminer sa dimension.

Sol : Thématique classique .

D'abord les évidences utiles , c'est tjs un sev , par thm de caractérisation ou mieux,

c'est le noyau de l'application linéaire : $M \mapsto AM - MA$.

On présente d'abord des essentiels.

Les valeurs propres sont parmi les racines des polynômes annulateurs, ici $\{0, 1\}$.

Pour rappel , la commutation entraine la stabilisation des sep, et ça va servir.

On traite ensuite des cas essentiels.

Si un endo est DZ, notons $\lambda_1, ..., l_s$ les vp et $d_1, ..., d_s$ les mupliplicités respectives.

On va établir que la dimension du communtant est $\sum_1^s d_j^2$!!

L'explication, par stabilisation des sep, un endo qui commute possède ds un base adaptée une matrice : $\begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_4 \end{pmatrix}$.

Or sep par sep on a bien sûr une homothétie donc qui commute avec "tout",

donc la dim du commutant est la dim de l'espace présenté juste avant.

Maintenant , le cas d'un endo nilpotent d'ordre 2.

$u^2 = 0$ donc $Im(u) \subset \ker(u)$,

il faut adapter à la dimension de l'espace et penser au thm du rang.

En dimension n, il faudrait créer une base très adaptée pour y voir plus clair,

voir exo de première année et notre dm avec matrices blocs 3×3.

Mais ici, dim 3 voir 2 sur un cas particulier.

Si on est en dimension 2 avec $u^2 = 0, u \neq 0$, le rang est obligatoirement 1.

Le noyau est de dimension 1, je prends une base d'un supplémentaire de ce noyau $\overrightarrow{a}$.

Donc $u(a) \neq \overrightarrow{0}$ et la famille $u(a), a$ est libre avec $u(a) \in \ker(u)$.

Donc la matrice dans cette base est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

ceci obtenu par le choix de la base et pas par trigonalisation brutale.

Donc le commutant est de dimension 2, le mieux ici étant le calcul barbare.

En dimension 3, $u^2 = 0$ entraine que le rang est 1. Est-ce clair ?

Rq : thm du rang, inclusion de l'image ds le noyau, et on a déjà réglé les cas particuliers.

Base adaptée : a vecteur directeur d'un supplémentaire du noyau.

$u(a)$ est dans le noyau et non nul, on complète par b pour avoir une base du noyau.

Donc la matrice dans cette base est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

Pour avoir le commutant on cherche ss le format : stabi des sep...

$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ d & e & f \\ 0 & 0 & j \end{pmatrix}$, on peut encore plus efficace, mais...

On arrive à la dimension 5, $d = 0$, $j = \alpha$.

Revenons à notre exo du début :

D'abord, le lemme des noyaux (hors programme ds le cas général)

mais on le traite au cas par cas.

$u^2 \circ (u - I) = 0$, donc $E = \ker(u - I) \bigoplus \ker(u^2)$.

Preuve : $1.X^2 - (X + 1)(X - 1) = 1$ Bezout pour les intimes.

Trouvé à tâtons ou voir dm précité avant.

Donc $u^2 - (u + I) \circ (u - I) = I$.

En 2 temps, x dans l'intersection des noyaux, il est annulé par le côté gauche et donc

par I. De plus $\forall x, x = u^2(x) - (u + I) \circ (u - I)(x)$ qui répond aux exigences.

Regardons $h = u - u^2$, si il est nul, u projecteur donc DZ, vu plus haut,

discuter suivant le rang.

Si il est non-nul, u n'est plus DZ, car par l'absurde la diagonale aurait des 0 et des 1,

donc $u^2 = u$ bref il serait nul...

Rq : 0 est vp, sinon, inversible et $u = I$ vu avant.

Si $\ker(u) = \ker(u^2)$, $E_1 \bigoplus E_0 = E$ et DZ...

Donc $\ker(u) \subsetneq \ker(u^2)$, regardons de près la matrice M de u.

$M = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}$ Attention à la dimension de E_1 et au fait que $\ker(u^2)$ est stable par u.

Car annulé par u^2 entraine annulé par u^3.

N est aussi nilpotente car N^2 est la matrice de l'endo induit par u ds $\ker(u^2)$.

Si la dimension de E_1 est 0, u nilpotent et tout a été vu avant, $dim = 3$.

Si la dim est 3, c'est l'identité.

Si la dimension est 2 , N est nilpotente de taille 1 elle est nulle, DZ!!

Le cas intéressant est $dim E_1 = 1$, N est 2×2 et nilpotente!

Avec une base adaptée, $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On cherche le commutant avec la forme $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \gamma \\ 0 & d & e \end{pmatrix}$.

Car $u^2 \circ v = v \circ u^2$ entraine que v laisse stable $\ker(u^2)$ et sep...

On en sort, $d = 0$ et $b = e$, c'est de dimension 3.

Sol : ddl 279+25+252 et bureau autre ordi.

254 ddl, on doit pouvoir raisonner sur la trace, l'inversibilité , les multiplicités?

On change de bases.

644. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et φ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ défini par $M \mapsto M + \operatorname{tr}(AM)A$.

a) Étudier la diagonalisabilité de φ.

b) Calculer $\operatorname{tr}(\varphi)$ et $\det(\varphi)$.

Sol : cahier rouge (2 ème version).

On remarque que $\varphi(A) = \left(1 + \operatorname{tr}\left(A^2\right)\right) A$.

Ainsi A est vecteur propre de φ pour la valeur propre $\mu = 1 + \operatorname{tr}\left(A^2\right)$.

Soit M un vecteur propre (non colinéaire à A) pour la valeur propre λ.

On a $(1 - \lambda)M + \operatorname{tr}(AM)A = 0$ donc $\lambda = 1$ et $\operatorname{tr}(AM) = 0$.

Réciproquement si $\operatorname{tr}(AM) = 0$ alors $\varphi(M) = M$.

Ainsi $E_1(\varphi) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \operatorname{tr}(AM) = 0\}$.

Mais $M \mapsto \operatorname{tr}(AM)$ est une forme linéaire non nulle.

Ainsi $E_1(\varphi)$ est un hyperplan (H) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On trouve donc $\operatorname{Sp}(\varphi) = \left\{1, \mu = 1 + \operatorname{tr}\left(A^2\right)\right\}$.

De plus $E_1(\varphi) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \operatorname{tr}(AM) = 0\}$.

Et si $\operatorname{tr}\left(A^2\right) \neq 0, E_\mu = \operatorname{Vect}(A)$.

On observe que φ est diagonalisable si et seulement si $\operatorname{tr}\left(A^2\right) \neq 0$.

Éléments propres de φ (méthode 2)

On détermine un polynôme annulateur de φ.

Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a :

$$\varphi^2(M) = \varphi(M) + \operatorname{tr}(A\varphi(M))A$$

Par ailleurs, on a l'égalité :

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(A\varphi(M))A &= \left(1 + \operatorname{tr}\left(A^2\right)\right) \operatorname{tr}(AM)A \\ &= \left(1 + \operatorname{tr}\left(A^2\right)\right) (\varphi(M) - M) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\varphi^2(M) = \left(2 + \operatorname{tr}\left(A^2\right)\right) \varphi(M) - \left(1 + \operatorname{tr}\left(A^2\right)\right) M$$

Soit le polynôme :

$$P = X^2 - \left(2 + \operatorname{tr}\left(A^2\right) X + \left(1 + \operatorname{tr}\left(A^2\right)\right)\right.$$

II annule φ. Ses racines sont 1 et $1 + \operatorname{tr}\left(A^2\right)$.

Ainsi $\operatorname{Sp}(\varphi) \subset \left\{1, \mu = 1 + \operatorname{tr}\left(A^2\right)\right\}$ et on termine comme précédemment.

b) Trace et déterminant de φ.

Je sépare les deux cas pour clarifier :

Si $\operatorname{tr} A^2 \neq 0$. On diagonalise, base naturelle $H \bigoplus < A >$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tr}(\varphi) = (n^2 - 1) + \left(1 + \operatorname{tr}\left(A^2\right)\right) = n^2 + \operatorname{tr}\left(A^2\right) \\ \det(\varphi) = 1 + \operatorname{tr}\left(A^2\right) \end{array} \right.$$

Sinon :

$E = H \bigoplus < Z >$ avec $Z \notin H$.

$\varphi(Z) = Z + \operatorname{tr}(AZ)A$, qui a la composante 1 sur Z et le reste sur H.

Matrice triangulaire supérieure, mêmes résultats qu'avant

(en remplaçant par la bonne valeur de $\operatorname{tr}(A^2)$...

645. Pour $c \in \mathbb{R}$, on note $A(c) = \begin{pmatrix} -c & -1 & c \\ -1 & 1-c & 1 \\ c & -1 & -c \end{pmatrix}$.

a) Déterminer les réels c tels que $A(c)$ ne soit pas diagonalisable.

b) Soit d la plus petite de ces valeurs.

Trouver P inversible telle que $P^{-1}A(d)P$ soit triangulaire.

646. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{pmatrix}$ où $j = e^{2i\pi/3}$.

a) La matrice A est-elle diagonalisable ?

b) Déterminer le nombre de sous-espaces stables par A.

c) Soit $\mathcal{A} = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}), AM = MA\}$.

Déterminer la dimension de $\mathcal{A}$.

Sol :

a) Notons C_1, C_2, C_3 les colonnes de A.

On a $\begin{cases} C_2 = jC_1 \\ C_3 = j^2C_1 \end{cases}$ donc $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(u) = 1$.

De plus $A = C_1C_1^T$, avec $C_1^TC_1 = 1 + j + j^2 = 0$.

Ainsi $A^2 = 0$, (A est nilpotente) donc $\operatorname{Sp}(A) = \{0\}$.

A n'est donc pas diagonalisable, sans quoi A serait semblable (donc égale) à la matrice nulle.

b) On identifie A à un endomorphisme u de $\mathbb{C}^3$.

$\{0\}$ et $\mathbb{C}^3$ sont évidemment stables par u.

Les droites stables (donc propres) par u sont les droites incluses dans le plan $\operatorname{Ker}(u)$.

Soit F un plan stable par u.

La restriction v de u à F est nilpotente $\big(v^2 = 0\big)$, donc $\operatorname{rg}(v) \in \{0, 1\}$

Si $\operatorname{rg}(v)=0$, alors $F=\operatorname{Ker}(u)$.

Réciproquement $\operatorname{Ker}(u)$ est stable par u.

Si $\operatorname{rg}(v)=1$ alors $\operatorname{Im}(v)=\operatorname{Ker}(v)$.

On a alors $F=\operatorname{Vect}(x,u(x))$ où $x\in F\setminus\operatorname{Ker}(u)$.

Réciproquement $C_1=u\left(e_1\right)$ dirige $\operatorname{Im}(u)$.

Et oui, $\operatorname{Im}(u)\subset F$, car il est stable.

Les antécédents de $u\left(e_1\right)$ par u sont les

$$x=e_1+y \text{ avec } y\in\operatorname{Ker}(u)$$

Les plans stables par u sont donc les plans :

$$F=\operatorname{Vect}\left(e_1+y,C_1\right) \text{ avec } y\in\operatorname{Ker}(u)$$

c) On vérifie que $\left(jC_1-C_2,C_1,e_1\right)$ est libre.

La matrice $P=\begin{pmatrix} j & 1 & 1\\ -1 & j & 0\\ 0 & j^2 & 0\end{pmatrix}$ est donc inversible.

La matrice de u dans cette base est

$$T=P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

On a $MA=AM\Leftrightarrow TN=NT$ où $N=P^{-1}MP$.

Or $TN=NT\Leftrightarrow N=\begin{pmatrix} a & b & c\\ 0 & e & f\\ 0 & 0 & a\end{pmatrix}$.

Le commuant de A est donc de dimension 5 , voir 643...

647. Soient $E=\mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et $D:E\rightarrow E$ vérifiant :

$\forall f\in E,\forall x\in\mathbb{R},D(f)(x)=xf'(x)$.

a) Montrer que D est un endomorphisme et préciser son noyau.

b) Determiner l'ensemble des valeurs propres de D.

c) Quelle est l'image de D ?

Voir JMF fonctions ck à dérivées nulles ? ? ?

648. a) Soit $x = \cos(2\pi/5)$. Déterminer une équation du second degré dont x est racine

puis déterminer les valeurs de $\cos(2\pi/5)$ et $\cos(4\pi/5)$.

b) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^4 + A^3 + A^2 + A + I_n = 0$.

On suppose que la trace de A est un rationnel. Montrer que 4 divise n.

Sol :

a) Posons $\omega = \mathrm{e}^{2i\pi/5}$.

Les racines cinquièmes de l'unité sont $1, \omega, \bar{\omega}, \omega^2$, et $\bar{\omega}^2$.

On sait que leur somme S est nulle.

Posons $x = \cos(2\pi/5) \geqslant 0$. On a :

$\begin{cases} \omega + \bar{\omega} = 2x \\ \omega^2 + \bar{\omega}^2 = 2\cos(4\pi/5) = 4x^2 - 2 \end{cases}$ Ainsi $4x^2 + 2x - 1 = 0$, donc $x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

Endin $2\cos(4\pi/5) = 2x^2 - 1 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}$.

b) La matrice A est annulée par

$P = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$.

Donc $\mathrm{Sp}(A)$ est inclus dans l'ensemble des racines de P

(racines cinquièmes de l'unité autres que 1).

Comme $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, les valeurs propres de A sont conjuguées. On peut donc écrire :

$\chi_A = (X-\omega)^m (X-\bar{\omega})^m \left(X-\omega^2\right)^p \left(X-\bar{\omega}^2\right)^p$ avec $(m,p) \in \mathbb{N}^2$ et $2m + 2p = n$.

On en déduit :

$\mathrm{tr}(A) = 2m\cos(2\pi/5) + 2p\cos(4\pi/5) = -\dfrac{m+p}{2} + \dfrac{m-p}{2}\sqrt{5}$.

Supposons $\mathrm{tr}(A) = r \in \mathbb{Q}$.

Alors $\frac{m-p}{2}\sqrt{5} = r + \frac{m+p}{2} \in \mathbb{Q}$.

Mais $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$, donc $m = p$. Ainsi $n = 4p$, donc 4 divise n.

649. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice telle que $A^3 = A + I_n$.

Montrer que $\det A > 0$.

Sol : classique.

D'adord on regarde l'équation $x^3 - x - 1 = 0$, étude de fonction simple, on cherche des vp.

Il en sort une racine réelle α unique entre 1 et 2, les deux autres complexes β conjugées.

Cette matrice est diagonalisable sur $\mathbb{C}$! Mais le déterminant sera le même.

Annulée par un polynôme scindé à racines simples.

Mais la trace restera réelle donc la multiplicité des β et $\overline{\beta}$ sera la même ! !

Bref, le déterminant sera $\alpha^s \times (\beta.\overline{\beta})^q \in \mathbb{R}^{+*}$.

650. Soient $n \in \mathbb{N}$, $(a_0, ..., a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$.

a) Déterminer le polynome caractéristique χ_A de A.

b) Montrer que χ_A divise tout polynôme annulateutr de A.

c) Donner une CNS pour que A soit diagonalisable.

651. Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie.

On suppose que $f^2 = -id_E$.

a) Donner un exemple d'un tel endomorphisme.

b) Que dire des valeurs propres de f ?

c) Montrer que la dimension de E est paire.

d) Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale par blocs, de la forme $\operatorname{diag}(A, \ldots, A)$, où $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Sol :

a) Dans $E = \mathbb{R}^2$ euclidien orienté, la rotation vectorielle d'angle $\frac{\pi}{2}[2\pi]$ convient.

Sa matrice dans toute base orthonormale directe du plan E est $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Soit $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = \lambda x$.

Alors $\begin{cases} f^2(x) = \lambda^2 x \\ f^2(x) = -x \end{cases} \Rightarrow \left(\lambda^2 + 1\right) x = 0 \Rightarrow x = 0$.

Ainsi l'application f n'a pas de vecteur (ni évidemment de valeur) propre.

Le polynôme caractéristique de f, qui est de degré $\dim(E)$ n'a donc aucune racine réelle.

Il se factorise alors dans $\mathbb{R}[X]$ en facteurs irréductibles de degré 2 .

Il en résulte que la dimension E est un entier pair.

c) Soit $x \neq 0$ dans E.Alors x n'est pas vecteur propre de f et donc $f(x)$

n'est pas proportionnel à x.Ainsi x et $f(x)$ sont libres, et donc F_x est un plan vectoriel.

Soit $u = \lambda x + \mu f(x)$ un élément de F_x.

Alors $f(x) = -\mu x + \lambda f(x) \in F_x$, donc F_x est un plan stable.

d) On choisit $e_1 \neq 0$ dans E, et on forme le plan F_{e_1}.

Pour $1 \leqslant p < n$, on suppose connus p vecteurs $e_1, e_2, \ldots, e_p$ non nuls tels que la somme

$G = F_{e_1} + F_{e_2} + \cdots + F_{e_p}$ soit directe.

Alors G est stable par f, et $\dim(G) = 2p < 2n$.

On se donne alors $e_{p+1} \notin G$ (donc non nul).

Les sous-espaces $G, F_{e_{p+1}}$ et $H = G \cap F_{e_{p+1}}$, sont stables par f.

Nécessairement $H = \{0\}$, sinon H serait une droite propre de f.

Ainsi la somme $G + F_{e_{p+1}} = \sum_{k=1}^{p+1} F_{e_k}$ est directe.

Par récurrence finie, on en déduit l'existence de $(e_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ telle que $E = \bigoplus_{j=1}^{n} F_{e_j}$.

On sait que chaque $(e_j, f(e_j))$ est une base de F_{e_j}.

Par concaténation, la famille $(e_1, f(e_1), \ldots, e_n, f(e_n))$ est une base $\mathcal{B}$ de E.

e) Par construction, la matrice de f dans $\mathcal{B}$ est diagonale par blocs égaux à $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

652. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ définie par : $A_{i,i} = 0$ pour tout i et $A_{i,j} = i$ si $i \neq j$.

a) Montrer qu'un réel λ est valeur propre de A si et seulement si $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k+\lambda} = 1$.

b) En déduire que A est diagonalisable.

Lister les valeurs propres de A avec un encadrement le plus précis possible.

c) Déterminer la somme des valeurs propres de A. On note μ_n la plus grande d'entre elles.

Trouver $C \in \mathbb{R}$ tel que $\mu_n \sim Cn^2$ quand n tend vers l 'infini.

Sol : λ est vp ssi elle est annulée par χ_A.

Ce qui revient à annuler $\det(A - \lambda I_n)$, par multilinéarité :

$$A \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 2 & 0 & 2 & \cdots & 2 \\ 3 & 3 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & n-1 \\ n & n & \cdots & n & 0 \end{pmatrix}, \det(A - \lambda I_n) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & -\lambda/2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda/3 & 1 & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & \cdots & -\lambda/n \end{vmatrix} = 0.$$

On enlève la première ligne à toutes les autres, et on multiplie toutes les colonnes par -1.

Puis la première ligne par -1.

$$\det(A - \lambda I_n) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1+\lambda & 1+\lambda/2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1+\lambda & 0 & 1+\lambda/3 & 0 & \vdots \\ 1+\lambda & 0 & \cdots & \ddots & 0 \\ 1+\lambda & 0 & \cdots & \cdots & 1+\lambda/n \end{vmatrix} = 0.$$

Pour les divisions qui viennent, il faut écarter les $\lambda = -k$.

Par l'absurde, si $\lambda = -k$.

On reporte au début, il y a une ligne entière de 1, la k ième.

On enlève cette ligne à toutes les autres.

Ce nouveau déterminant se développe très bien, car plein de lignes creuses.

Il en sort $\prod_{s\neq k}(1+-k/s)\neq 0$. Absurde.

Par multilinéarité, on divise nos lignes par $1+\lambda/k\neq 0$.

On aboutit à $\det(A-\lambda I_n)=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda/(1+\lambda) & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1/(1+\lambda/2) & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1/(1+\lambda/3) & 0 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \cdots & \ddots & 0 \\ 1/(1+\lambda/n) & 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{vmatrix}=0.$

Là, on ouvre bien les yeux, les $n-1$ dernières lignes sont libres car diagonales parfaites.

Donc (seule possibilité) la première ligne est combi lin de ces $n-1$.

Tous les coefficients sont obligatoirement 1, car plein de 0.

On écrit $L_1=\sum_2 L_k$, on se fixe sur la première colonne.

Le λ du numérateur à gauche $\lambda+1-1$. Fini.

On se relit, tout par équivalences !

b) On va montrer que l'on a n vp 2 à 2 distinctes, DZ.

On regarde $f(x)=\sum_1^n \dfrac{k}{k+x}$. Dérivée clairement négative.

Donc f sera décroissante strictement sur les $]-k,-k+1[$, k va de n à 2.

Mais aussi sur $]-\infty,-n[$ et $]-1,+\infty[$.

On regarde les différentes limites aux points ambigus.

On applique n fois le thm de la bijection monotone.

Pas sur l'intervalle de gauche.

La valeur n est atteinte n fois, or par la cns d'avant, il ne peut y en avoir plus.

Ces vp sont 2 à 2 distinctes car obtenues ds des intervalles 2 à 2 disjoints.

Encadrement des vp , une supérieure à 0 car $f(0) = n > 1$.

Les $n-1$ premières entre $-k$ et $-k+1$, k de n à 2.

c) La somme des vp est nulle, car la trace de A est nulle et on aurait pu Tz.

Il est alors facile d'encadrer la somme de ces $n-1$ vp par la somme des entiers.

On obtient 2 extrémités équivalentes à $n^2/2$.

653. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$ on pose $u(P) = nXP + \left(1 - X^2\right) P'$.

a) Soit $P_k = (X+1)^k$. Calculer $u\left(P_{\mathrm{k}}\right)$ et montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ n & 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ 0 & n-1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & n \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

En utilisant la question précédente, montrer que A est diagonalisable et préciser son spectre.

Sol : voir 993 et 32 de la feuille 4 réduction.

654. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E tel que,

pour tout $x \in E$, il existe $\lambda_x, \mu_x \in \mathbb{C}$ vérifiant $u^2(x) = \lambda_x u(x) + \mu_x x$.

a) Montrer que u admet au plus deux valeurs propres.

b) Montrer que, pour tout $x \in E$ non nul, $\mathrm{Vect}(x, u(x))$ est stable par u.

Préciser la dimension de ce sous-espace.

c) On suppose que u admet une unique valeur propre α.

Que dire de λ_x et μ_x ?

655. Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et $p \in \mathbb{N}^*$.

Soient $u, v_1, \ldots, v_p$ des endomorphismes de E non nuls, $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ distincts.

On suppose $\forall n \in \{1, \ldots, p\}, u^n = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i^n v_i$.

a) Montrer que : $\forall P \in \mathbb{R}_p[X], P(0)=0 \Rightarrow P(u)=\sum_{i=1}^{p} P(\lambda_i) v_i$.

b) Prouver qu'il existe une base $(L_1, \ldots, L_p)$ de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$ telle que :

$\forall(i, j) \in \{1, \ldots, p\}^2, L_i(\lambda_j)=\delta_{j,j}$.

c) Montrer que $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\} \subset \operatorname{sp}(u) \subset \{0, \lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$.

Vu ? ? ? ?

656. Soient p un projecteur d'un espace vectoriel E de dimension n et

$\varphi: \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{L}(E),\ g \mapsto (g \circ p+p \circ g)/2$.

Montrer que φ est diagonalisable et préciser ses espaces propres.

657. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme nilpotent de E.

a) Montrer que $\det(u+Id)=1$.

b) Soit v un automorphisme de E tel que $u \circ v=v \circ u$. Montrer que $\det(u+v)=\det(v)$.

c) Soit f un endomorphisme de E qui s'écrit comme somme d'un endomorphisme

diagonalisable d et d'un endomorphisme nilpotent n qui commutent.

Montrer que $\det(f)=\det(d)$.

Sol :

a) Le polynôme caractéristique de u est :

$$\chi_u(X)=\det(X\mathrm{Id}-u)=X^p \text{ où } p=\dim(E)$$

En particulier :

$$\begin{aligned} \det(\mathrm{Id}+u) & =(-1)^p \det(-\mathrm{Id}-u) \\ & =(-1)^p \chi_u(-1)=1 \end{aligned}$$

b) On a $v+u=v \circ\left(\mathrm{Id}+v^{-1} u\right)$, donc :

$$\det(v+u)=\det(v) \det\left(\mathrm{Id}+v^{-1} u\right)$$

Or v^{-1} et u commutent.

Donc $v^{-1}u$ est (tout comme u) nilpotent.

Ainsi, d'après 1) : $\det\left(\mathrm{Id}+v^{-1}u\right)=1$.

Il en résulte $\det(v+u)=\det(v)$.

c) Posons $f=d+n$.

Si d est inversible, $\det(d+n)=\det(d)$ d'après b).

Sinon, soit $\lambda_1,\ldots,\lambda_r$ les valp distinctes de d et $E_1,\ldots,E_r$ les sous espaces propres associés.

Soit $\mathcal{B}$ une base de E adaptée à $E=\bigoplus_{i=1}^r E_i$.

On a $dn=nd$ donc $fn=nf$.

Les E_i sont donc stables par f et par n.

La matrice M de f dans $\mathcal{B}$ est donc diagonale par blocs

$$M=\operatorname{diag}\left(M_1,\ldots M_r\right)$$

Mais l'un des λ_j est nul, par exemple $\lambda_1=0$.

Sur E_1, la restriction de d est nulle, donc la restriction de f coincide avec

celle de n donc est nilpotente.

Ainsi $\det\left(M_1\right)=0$, donc $\det(f)=\det(M)=0$.

Conclusion : dans tous les cas $\det(d+n)=\det(d)$.

Si d non inversible, on remplace d par $d-\lambda I$, ça ne change aucune hypothèse,

donc $\det((d-\lambda I)+n)=det(d-\lambda I)$ pour tous les $\lambda\notin sp(d)$.

On fait tendre λ vers 0 , polynômes donc cie.

Voir ddl 286, mais aussi je l'ai fait ailleurs , où ?

Par densité aussi ?

658. Soit A une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients diagonaux deux à deux distincts.

a) Décrire $C(A)$, l'ensemble des matrices qui commutent avec A.

b) Montrer que $C(A) = \mathbb{R}_{n-1}[A]$, polynômes en A de degré inférieur ou égal à $n-1$.

c) Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E de dimension n.

On suppose que le polynôme caractéristique de u est scindé à racines simples.

Montrer qu'il existe une base de E constituée de vecteurs propres de u.

En déduire une condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme v

quelconque commute avec u.

d) Que peut-on retrouver ainsi concernant A ?

659. Soient $A, B \in \mathcal{M}_{\mathrm{n}}(\mathbb{C})$ et $\beta \in \mathbb{C}^*$ tels que $AB - BA = \beta B$.

a) Montrer que A admet un vecteur propre x puis que la suite de vecteurs $\left(B^k x\right)_k$

est nulle à partir d'un certain rang.

b) En déduire que A et B admettent un vecteur propre commun.

c) On suppose maintenant que $AB - BA = \alpha A + \beta B$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^*$.

Montrer que A et B ont un vecteur propre commun.

Vu ? ? JMF ? ?

660. Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et T l'endomorphisme de E associant à une suite u la suite w définie par :

$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \dfrac{1}{n+1} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k.$

Trouver les eléments propres de T.

661. On considère $E = M_n(\mathbb{C}), A, B \in E$ et les endomorphismes de

$E, u : M \mapsto AM$ et $v : M \mapsto MB$.

a) Montrer que u est un automorphisme si, et seulement si, A est inversible. Que dire pour v?

b) Montrer que u est diagonalisable si, et seulement si, A est diagonalisable.

Que dire pour v?.

c) On suppose A et B diagonalisables.

Montrer que l'application $\varphi : M \mapsto AMB$ est diagonalisable.

Que dire de la réciproque ?

Jmf , DDl ? ?255.256.
1212 ccp

Sol : Je fais évoluer l'énoncé.

D'abord cet exerrcice existe sous plusieurs formes, matricielles, ou version $f \mapsto g \circ f \circ h$.

Ou encore $M \mapsto AM$ ou MB ou $f \circ h$ etc...

La première idée pour moi, est d'abord de repérer la linéarité ($\dim n^2$).

La remarque de la transposition qui permet de changer le côté...

Puis , trés important , les cas de nullités.

1. Montrer que $\varphi = 0$ si et seulement si $A = 0$ ou $B = 0$.

Sol :

1. Bien sûr, si $A = 0$ ou $B = 0$, on a $\varphi = 0$.

On suppose donc $A \neq 0$ et $B \neq 0$, et il faut montrer $\varphi \neq 0$.

Première méthode : soient a, u, b dans $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ canoniquement associés à A, M, B.

Par hypothèse, il existe x, y non nuls tels que $x' = b(x) \neq 0$ et $y' = a(y) \neq 0$.

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ tel que $u(x') = y$.

Alors $(aub)(x) = (au)(x') = a(y) = y' \neq 0$.

Ainsi l'endomorphisme $v = aub$ est non nul, sa matrice AMB aussi, donc $\varphi \neq 0$.

Deuxième méthode : on raisonne avec les matrices $E_{i,j}$ de la base canonique.

Pour tous indices i, j, r, n, on a :

$$\begin{aligned}
[\varphi(E_{i,j})]_{r,s} &= \sum_{k,\ell=1}^{n} [A]_{r,k} [E_{i,j}]_{k,\ell} [B]_{\ell,s} \\
&= [A]_{r,i}[B]_{j,s}
\end{aligned}$$

Si $A \neq 0, B \neq 0$, il existe r, i, j, s tels que $[A]_{r,i} \neq 0$ et $[B]_{j,s} \neq 0$.

Avec ces notations : $\left[\varphi\left(E_{i,j}\right)\right]_{r,s} \neq 0$, donc $\varphi\left(E_{i,j}\right) \neq 0$, donc $\varphi \neq 0$.

2. Montrer que φ est nilpotente si et seulement si A ou B est nilpotente.

Sol :

Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a $\varphi^2(M) = A\varphi(M)B = A^2MB^2$.

Par récurrence évidente : $\forall r \in \mathbb{N}, \varphi^r(M) = A^rMB^r$.

Il est donc clair que si A ou B est nilpotente, alors φ est nilpotente.

Réciproquement, on suppose que $\varphi^r = 0$, pour un certain r dans $\mathbb{N}^*$.

Ainsi $M \mapsto A^rMB^r$ est l'application nulle,

donc $A^r = 0$ ou $B^r = 0$ (question 1) et c'est fini.

3. On suppose A et B diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On va montrer que φ est diagonalisable dans $\mathcal{L}\left(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})\right)$.

- Soit u, v dans $\mathcal{L}\left(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})\right)$ définis par :

$u(M) = AM$ et $v(M) = MB$. Montrer que u et v sont diagonalisables dans $\mathcal{L}\left(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})\right)$.

- Montrer plus précisément qu'il existe une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

formée de vecteurs propres à la fois pour u et v.

- En déduire que φ est diagonalisable.

Sol :

3. Notations uv ...Soit $u, v \in \mathcal{L}\left(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})\right)$ définis par : $u(M) = AM$ et $v(M) = MB$.

Ainsi $\varphi = u \circ v = v \circ u$,

et $\left\{\begin{array}{l} u^k(M) = A^kM \\ v^k(M) = MB^k \end{array}\right.$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

On en déduit, par linéarité :

$$\forall P \in \mathbb{C}[X], \begin{cases} P(u)(M) = P(A)M \\ P(v)(M) = MP(B) \end{cases}$$

On suppose que les matrices A et B diagonalisables.

Elles sont donc annulées par des polynômes scindés simples, respectivement P et Q.

Ainsi $P(u) = 0$ et $Q(v) = 0$, donc u et v sont diagonalisables dans $\mathcal{L}\left(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})\right)$.

- Notons $E_\lambda(u)$ le sous-espace propre de u pour la valeur propre λ.

On a donc la décomposition en somme directe : $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) = \overset{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)}{\oplus} E_\lambda(u)$.

Puisque $uv = vu$, chacun des $E_\lambda(u)$ est stable par v.

v étant diagonalisable, sa restriction v_λ à chaque $E_\lambda(u)$ est diagonalisable (cours).

On munit chaque $E_\lambda(u)$ d'une base de vecteurs propres de v_λ.

Soit (e) la base de E formée par concaténation des bases précédentes.

Par construction, (e) est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ formée de vecteurs propres de u et de v.

Dans cette base, les matrices de u et v, donc celle de $\varphi = uv$, sont diagonales.

On a ainsi montré que si A, B sont diagonalisables, alors φ est diagonalisable.

4. Retrouver le résultat de la question (3c), mais sans l'aide de u et v,

et en indiquant comment former une base de vecteurs propres de φ à partir d'une base

de vecteurs propres de A et d'une base de vecteurs propres de $B^\top$.

Sol :

4. La matrice $B^\top$, tout comme B, est diagonalisable.

Par ailleurs, on a $\mathrm{Sp}\left(B^\top\right) = \mathrm{Sp}(B)$ (les multiplicités étant les mêmes).

Soit $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une base de vecteurs propres de A, associées resp. aux $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$.

Soit $(Y_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ une base de vecteurs propres de $B^\top$, associées resp. aux v $(\mu_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$.

Pour i, j dans $[[1, n]]$, posons $M_{i,j} = X_i Y_j^\top \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On a successivement :

$$\begin{aligned}\varphi\left(M_{i,j}\right) &= AX_iY_j^\top B = \left(AX_i\right)\left(B^TY_j\right)^\top \\ &= \lambda_i\mu_jX_iY_j^\top = \lambda_i\mu_jM_{i,j}\end{aligned}$$

Montrons que les n^2 matrices $M_{i,j}$ sont libres donc forment une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Soit $(\lambda_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ des scalaires.

On suppose $\sum_{i,j=1}^{n}\lambda_{i,j}M_{i,j}=0$ c'est-à-dire $\sum_{i=1}^{n}X_i\sum_{j=1}^{n}\lambda_{i,j}Y_j^\top=0$.

Ainsi : $\forall Z\in\mathbb{C}^n, \sum_{i=1}^{n}X_i\left(\sum_{j=1}^{n}\lambda_{i,j}Y_j^\top Z\right)=0$

Dans cette égalité, les $\alpha_i=\sum_{j=1}^{n}\lambda_{i,j}Y_j^\top Z$ sont des scalaires.

La famille $(X_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ étant libre, il en résulte :

$$\forall i\in[[1,n]], \forall Z\in\mathbb{C}^n, \left(\sum_{j=1}^{n}\lambda_{i,j}y_j\right)^\top Z=0$$

On en déduit l'égalité $\sum_{j=1}^{n}\lambda_{i,j}Y_j=0$.

Par liberté de $(Y_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$, tous les $\lambda_{i,j}$ sont nuls.

La famille $(M_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est donc une base de vecteurs propres

de φ (dans cette notation, chaque $M_{i,j}$ est associée à $\lambda_i\mu_j$).

La méthode précédente montre que :

$$\operatorname{Sp}(\varphi)=\{\lambda\mu, \lambda\in\operatorname{Sp}(A), \mu\in\operatorname{Sp}(B)\}$$

1212. CCINP. Pour $A\in\mathcal{M}_{\mathrm{n}}(\mathbb{R})$, on note $f_A : M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\mapsto AM$.

a) Montrer que f_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b) Montrer que si $A^2=A$ alors f_A est un projecteur.

c) Montrer que A est diagonalisable si et seulement si f_A l'est.

d) Construire une matrice propre de f_A à l'aide d'un vecteur propre de A.

e) Construire un vecteur propre de A à l'aide d'une matrice propre de f_A.

f) En déduire que $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(f_A)$.

Sol : a) Facile , linéaire et de E vers E.

b) Si A projecteur , $\forall M, f_A \circ f_A(M) = A^2M = AM = f_A(M)$.

c) Si A diagonalisable, elle est annulée par un polynôme Q scindé simple.

Alors $Q(f_A) = f_{Q(A)} = 0$ donc par la réciproque du thm précité f_A est diagonalisable.

Réciproquement : si f_A est diagonalisable , elle est annulée par un polynôme S scindé simple.

$S(f_A) = 0$, mais $S(f_A) = f_{S(A)}$ donc $S(A)$ est nulle aussi.

Rq importante f_B nulle ssi $B = 0$, car si $B \neq 0$, $\exists M \neq 0$ telle que $f_B(M)$ non nulle .

Il suffirait de prendre une colonne de M dans un suppl de $\ker(B)$.

d) Soit $X \neq 0$ tel que $AX = \lambda X$, soit M dont les colonnes sont toutes X,

alors $f_A(M) = \lambda M$.

e) Si on a une matrice propre, avec un calcul similaire au précédent, $f_A(M') = \mu M'$,

en notant C_1 la première colonne de M' , on a $AC_1 = \mu C_1$.

f) Il ressort de ce qui précède que les vp de l'un sont vp de l'autre.

662. Soient $A \in M_n(K)$ et $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(K)$.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur A pour que B soit diagonalisable.

Sol : classique ... posé des centaines de fois depuis la nuit des temps.

D'abord par rec : $B^k = \begin{pmatrix} A^k & kA^k \\ 0 & A^k \end{pmatrix}$.

Donc pour tout polynôme P, $P(B) = \begin{pmatrix} P(A) & AP'(A) \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}$.

Rappel : thm M diagonalisable **SSI** un polynôme annulateur scindé à racines simples .

Donc , B diago entraine A aussi. Maizalor, comme P et P' n'ont pas de racines en commun.

λ annule P et XP' , bref λ est nulle . (Clair ?).

Donc $A = 0$ réciproque limpide.

663. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. On suppose que la matrice $B = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & A \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

Montrer que A est diagonalisable et que $I_n - A$ est inversible.

Sol :

Soit $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{K}^{2n}\right)$, de matrice B dans la base canonique $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant 2n}$.

f stabilise $E = \text{Vect}\,\{e_i, n+1 \leqslant i \leqslant 2n\}$.

f étant diagonalisable, sa restriction g à E l'est aussi, ainsi donc que la matrice A de g dans $(e_i)_{n+1 \leqslant i \leqslant 2n}$.

Soit $\chi_B(X)$ le polynôme caractéristique de B :

$$\begin{aligned} \chi_B(X) &= \begin{vmatrix} (X-1)I_n & 0 \\ -A & XI_n - A \end{vmatrix} \\ &= (X-1)^n \chi_A(X) \end{aligned}$$

Par définition de B : $B - I_{2n} = \begin{pmatrix} 0_n & 0_n \\ A & A - I_n \end{pmatrix}$.

En utilisant des opérations élémentaires $\mathrm{C}_j \leftarrow \mathrm{C}_j - \mathrm{C}_{n+j}$, on en déduit :

$$\begin{aligned} \text{rg}\,(B - I_{2n}) &= \text{rg}\,(A \mid A - I_n) \\ &= \text{rg}\,(I_n \mid A - I_n) = n \end{aligned}$$

Il en découle : $\dim \text{Ker}\,(B - I_{2n}) = 2n - n = n$.

Ainsi 1 est valeur propre de multiplicité n de B (rappel : B est diagonalisable).

Au vu de l'expression de χ_B, il en résulte $\chi_A(1) \neq 0$.

Conclusion : $I_n - A$ est inversible.

Sol : Là , je crois qu'on est max en algèbre linéaire avec exo ****!

664. Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel E de dimension finie.

a) On suppose u inversible.

Montrer que u est diagonalisable si, et seulement si, u^2 est diagonalisable.

b) Dans le cas général, montrer que u est diagonalisable si, et seulement si,

u^2 est diagonalisable et $\mathrm{Ker} u^2 = \mathrm{Ker} u$.

Sol : oui

665. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On suppose qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(A)$ est diagonalisable et $P'(A)$ est inversible.

Montrer que A est diagonalisable.

Sol : relire... ? ?JMF ? ? ? ? ?DDl 276 ? ?

On notera que P n'est pas constant (sinon $P'(A)$ ne serait pas inversible).

Notons $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ les p valeurs propres distinctes de $P(A)$.

Ainsi, $Q := \prod_{i=1}^{p} (P - \alpha_i)$ est un polynôme annulateur de A.

L'idée est d'éliminer les facteurs multiples de Q.

Supposons que l'un de ces polynômes $P - \alpha_i$ ait une racine multiple β.

Ainsi, $X - \beta$ divise P.

Ce qui donne une formule du type $P = (X - \beta)R$ avec $R \in C[X]$ et donc

$P(A) = (A - \beta I)R(A)$ ou encore $\det(P(A)) = \det(A - \beta I) \det(R(A))$.

Par hypothèse, on comprend que $A - \beta I$ est inversible

(c'est-à-dire que β n'est pas une valeur propre de A).

Finalement, on peut factoriser $Q = Q_1 Q_2$ où Q_2 est le produit de tous les $X - \beta$.

Par construction, Q_1 est scindé à racines simples

(on notera que les p polynômes $P - a_i$ n'ont aucune racine commune).

Ensuite, on a $0 = Q(A) = Q_1(A)Q_2(A)$ avec $Q_2(A)$ inversible.

Autrement dit, $Q_1(A) = 0$. Cela prouve que A est diagonalisable.

666. Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.

Soit $F \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$ tel que $\forall u \in \mathcal{L}(E), F(u) = f \circ u$.

a) Montrer que F est diagonalisable si et seulement si f l'est.

Dans ce cas, donner une relation entre les dimensions de $E_\lambda(f)$ et $E_\lambda(F)$.

b) Montrer que f et F ont les mêmes valeurs propres.

c) Tout élément de $\mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$ s'écrit-il sous la forme $u \mapsto f \circ$ u?

667. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ possédant n valeurs propres distinctes notées $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

On note $v_1, \ldots, v_n$ des vecteurs propres de M respectivement associés à $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

a) Montrer que M^T est diagonalisable et a les mémes valeurs propres que M.

On note $w_1, \ldots, w_n$ des vecteurs propres de M^T respectivement associés à $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

b) Montrer que, pour tout $(i, j) \in \{1, \ldots, n\}^2$ tel que $i \neq j, \quad w_i^T \cdot v_j = 0$

et pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}, w_i^T \cdot v_i \neq 0$.

c) Pour $k \in \{1, \ldots, n\}$, on note $B_k = \frac{1}{w_k^T - v_k}\left(v_k \cdot w_k^T\right)$.

Montrer que, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}, B_k$ est diagonalisable.

d) Pour $r \in \mathbb{N}$, on pose : $G_r = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^r B_k$. Déterminer G_r.

668. Soit E un espace euclidien de dimension 4 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ une base

orthonormale de E.

Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur Vect

$(e_1 + e_2 + e_3 + \ e_4, 2e_2 + 3e_4)$ dans la base B.

669. On pose pour tout $k \in \mathbb{N}^*, I_k = \inf\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \left(\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(x^k - ax - b\right)^2 e^{-x} \, \mathrm{d}x \right)$.

Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}, I_k$ existe, est atteint, et calculer sa valeur.

670. Soit E l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour f et g dans E on pose :

$\varphi(f,g) = \displaystyle\int_0^1 \big(f(t)g(t) + f'(t)g'(t)\big)\,\mathrm{dt}.$

a) Montrer que φ est un produit scalaire sur E.

b) Soit $V = \{f \in E \mid f(0) = f(1) = 0\}$ et $W = \{f \in E \mid f = f''\}$.

Monter que V et W sont supplémentaires et orthogonaux.

c) Determiner la projection orthogonale de $f \in E$ sur V.

Sol : fait en cours ? c'est une vraie question.

671. a) Existence et calcul de $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,\mathrm{dt}.$

b) Montrer que I'application $(P,Q) \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n(X)$.

c) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note $\Pi_k = \displaystyle\prod_{i=1}^{k}(X+i)$ et on pose $\Pi_0 = 1$.

Montrer qu'il existe $p_0, \ldots, p_n \in \mathbb{R}$ tels que $(X-1)\ldots(X-n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} p_k \Pi_k$. Calculer p_0.

d) Montrer que $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} p_k X^k$ est orthogonal à $\mathrm{Vect}\,(X, \ldots, X^n)$.

e) Calculer la distance de 1 à Vect($X, \ldots, X^n$).

f) Calculer la distance de X^n à $\mathrm{Vect}\,\big(1, \ldots, X^{n-1}\big)$.

Voir cahier rouge ddl16 et 678...

672. Soit E un espace euclidien et f une application de E dans E vérifiant

$f(0) = 0$ et $\forall (x,y) \in E^2, \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$.

a) Montrer que, pour tout $x \in E$, on a $\|f(x)\| = \|x\|$.

b) Montrer que, pour tout $x \in E$, on a $f(-x) = -f(x)$.

c) Montrer que, pour tous $x, y \in E$, on a $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$.

d) Montrer que f est un automorphisme orthogonal.

Sol :

a) Pour tout $x \in E$, on a :

$$\|f(x)\| = \|f(x) - f(0)\| = \|x - 0\| = \|x\|$$

b) Soit $x \in E$ On a l'identité du parallélogramme :

$\|f(x) + f(-x)\|^2 + \|f(x) - f(-x)\|^2 \quad = 2\|f(x)\|^2 + 2\|f(-x)\|^2$.

Or $\begin{cases} \|f(x) - f(-x)\| = \|x - (-x)\| = 2\|x\| \\ \|f(x)\| = \|f(-x)\| = \|x\| \end{cases}$

Ainsi $\|f(x) + f(-x)\|^2 + 4\|x\|^2 = 4\|x\|^2$.

Finalement, on a bien : $f(-x) = -f(x)$.

c) Soit $(x, y) \in E^2$. On a l'identité de polarisation :

$(f(x) \mid f(y)) = \dfrac{1}{2}\left(\|f(x) + f(y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2\right)$.

Il en résulte que :

$$(f(x) \mid f(y)) = \frac{1}{2}\left(\|x - y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right) = (x \mid y)$$

d) Soit $(x, y) \in E^2$, et α, β réels.

$$\text{Posons } A = \|f(\alpha x + \beta y) - \alpha f(x) - \beta f(y)\|^2 \ .$$

Il s'agit de prouver que A est nul. On a :

$$\begin{aligned} A =& \|f(\alpha x + \beta y)\|^2 + \alpha^2\|f(x)\|^2 + \beta^2\|f(y)\|^2 \\ &- 2\alpha(f(\alpha x + \beta y) \mid f(x)) \\ &- 2\beta(f(\alpha x + \beta y) \mid f(y)) \\ &+ 2\alpha\beta(f(x) \mid f(y)) \end{aligned}$$

En utilisant plusieurs fois la question c), on trouve :

$$\begin{aligned} A =& \|(\alpha x + \beta y)\|^2 + \alpha^2\|x\|^2 + \beta^2\|y\|^2 \\ &- 2\alpha(\alpha x + \beta y \mid x) - 2\beta(\alpha x + \beta y \mid y) \\ &+ 2\alpha\beta(x \mid y) \\ =& \|(\alpha x + \beta y) - \alpha x - \beta y\|^2 = 0 \end{aligned}$$

On a donc toujours :

$$f(\alpha x+\beta y)=\alpha f(x)+\beta f(y)$$

L'application f est donc linéaire et ...

673. Soient $(E,<,>)$ un eve et $(e_i)_1^n$ une base orthonormée de E.

Soit $f\in\mathcal{L}(E)$ tel que : $\forall(x,y)\in E^2, \langle x,y\rangle=0\Longrightarrow\langle f(x),f(y)\rangle=0$.

a) Montrer qu'il existe $c\in\mathbb{R}^+$ tel que $\forall i\in\{1,\ldots,n\}, \|f\left(e_i\right)\|=c$.

b) Montrer qu'il existe $g\in\mathcal{O}(E)$ tel que $f=cg$.

Sol : exo "facile".

a) $\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $\langle e_i-e_j,e_i+e_j\rangle=0$, donc $\langle f(e_i-e_j),f(e_i+e_j)\rangle=0$.

Il vient en développant, $\|f(e_i)\|=\|f(e_j)\|$, qui est donc une constante (c>0).

b) Je pose $h=f/c$, on regarde pour tout x de E, $x=\sum\limits_1^n x_ie_i$, $\|x\|^2=\sum\limits_1^n x_i^2$.

Mais $(h(e_i))_1^n$ est une base orthonormée de E, car f conserve l'orthogonalité (h aussi)

et $\forall i\in[\![1,n]\!], \|h(e_i)\|=1$. Donc $\|h(x)\|^2=\|\sum\limits_1^n x_ih(e_i)\|^2=\|x\|^2$.

674. a) Montrer que, pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, il existe un unique polynôme T_n tel que,

pour tout $\theta\in\mathbb{R}, T_n(\cos\theta)=\cos(n\theta)$.

b) Calculer T_0,T_1 puis, montrer que, pour tout $n\geqslant 1, T_{n+1}=2XT_n-T_{n-1}$.

En déduire le degré et le coefficient dominant de T_n.

c) Montrer que l'application $(P,Q)\mapsto\displaystyle\int_{-1}^1\frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ dt est un produit scalaire sar $\mathbb{R}[X]$.

d) Montrer que la famille $(T_n)_n$ est orthogonale pour ce produit scalaire.

675. a) Montrer que l'application $(A,B)\mapsto\operatorname{tr}\left({}^tAB\right)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

b) Montrer que l'ensemble V des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b\\ -b & a\end{pmatrix}$ avec $a,b\in\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

c) Déterminer une base orthonormée de $V^{\perp}$.

d) Calculer la distance de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ à V.

676. On considère sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'application $(M, N) \mapsto \operatorname{tr}\left(N^T M\right)$.

a) Montrer que cette application est un produit scalaire.

b) Soit H le sous-espace des matrices de trace nulle et J la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1. Calculer la distance de J à H.

677. Soit $a \in \mathbb{R}$. On munit $\mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire défini par $< P, Q >= \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(a) Q^{(k)}(a)$.

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

Calculer $inf\,\{\|P - Q\|, Q \in \mathbb{R}_n[X] \text{ tel que } Q(a) = 0\}$.

Sol : voir exo 35 de la feuille 10.

D'abord c'est bien un ps grâce à la formule de Taylor des polynômes qui nous

assure que si ttes les dérivées sont nullles en a le poly est nul.

On projette sur un hyperplan noyau de forme linéaire non nulle.

La droite orthogonale à cet hyperplan est $< 1 >$, qui est normé.

La distance (cours) est $| < P, 1 > | = P(a)$.

678. a) Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. Montrer que l'application $(P, Q) \mapsto \int_0^{+\infty} P(t) Q(t) e^{-t} dt$

est correctement définie puis qu'il s'agit d'un produit scalaire sur E.

b) Soit $(P_0, \ldots, P_n)$ l'orthonormalisée de Gram-Schmidt de la base canonique de E.

Calculer $P_{\mathrm{k}}(0)^2$.

c) Soit F le sous-espace de E constitué des polynômes nuls en 0 .

Déterminer $F^{\perp}$ puis la distance du polynôme 1 à F.

Sol :

a) Pour $P, Q \in E$, la fonction $t \mapsto P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}$ est continue pm sur $[0, +\infty[$ et vérifie :

$$t^2 P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

On peut donc affirmer que cette fonction est intégrable sur $[0, +\infty[$ ce qui assure la bonne définition de $\langle,,\rangle$. On vérifie aisément que $\langle,,\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique positive. Si $\langle P, P\rangle = 0$ alors par nullité de l'intégrale d'une fonction continue positive.

$$\forall t \in \left[0, +\infty\right[, P(t)^2\mathrm{e}^{-t} = 0$$

On en déduit que le polynôme P admet une infinité de racines et donc $P = 0$.

b) Pour $k \geqslant 1$ ou $k = 0$, on peut affirmer que les polynômes P_k et P_k' sont orthogonaux.

Car $P_k' \in vect(P_0, ..., P_{k-1})$, le procédé de G-S conserve les sev...

Par une intégration par partie

$$0 = \int_0^{+\infty} P_k'(t)P_k(t)\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[P_k(t)^2\mathrm{e}^{-t}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} P_k(t)^2\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t$$

On en déduit

$$P_k(0)^2 = \|P_k\|^2 = 1$$

c) F est un hyperplan (car noyau de la forme linéaire non nulle $P \mapsto P(0)$).

Son orthogonal est donc une droite vectorielle.

Soit Q un vecteur directeur de celle-ci. On peut écrire :

$$Q = \sum_{k=0}^{n} \langle P_k, Q\rangle\, P_k$$

Or

$$\langle P_k, Q\rangle = \langle P_k - P_k(0), Q\rangle + P_k(0)\langle 1, Q\rangle$$

Puisque le polynôme $P_k - P_k(0)$ est élément de F, il est orthogonal à Q et l'on obtient

$$\langle P_k, Q\rangle = P_k(0)\langle 1, Q\rangle$$

ce qui permet d'écrire

$$Q = \lambda \sum_{k=0}^{n} P_k(0) P_k \text{ avec } \lambda = \langle 1, Q \rangle \neq 0$$

On en déduit

$$d(1, F) = \frac{|\langle 1, Q \rangle|}{\|Q\|} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{k=0}^{n} P_k(0)^2}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Car rappel :

$E = H \bigoplus < Q >$, $1 = h + h' = h + \alpha Q \Rightarrow \langle 1, Q \rangle = \alpha \|Q\|^2$.

$\|h'\| = \|\alpha Q\| = |\alpha| \|Q\| = \left| \frac{\langle 1, Q \rangle}{\|Q\|^2} \right| . \|Q\| = \frac{|\langle 1, Q \rangle|}{\|Q\|}$.

Enfin par Pythagore

$$\|1\|^2 = d(1, F)^2 + d\left(1, F^\perp\right)^2$$

et l'on obtient

$$d\left(1, F^\perp\right) = \sqrt{\frac{n}{n+1}}$$

679. Soit E un espace enclidien et u un endomorphisme symétrique de E de trace nulle.

Montrer qu'il existe une base orthonormée dans laquelle la matrice de u est à diagonale nulle.

680. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire défini par$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t) Q(t)$ dt.

a) Montrer que l'on definit un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}_n[X]$ en posant

$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], f_n(P) = \frac{1}{2}\left(X^2 - 1\right) P'' + X P' - P$.

Que peut-on dire de plus concernant f_n?

b) On pose $T_0 = 1$ puis, pour $j \in [1, n], T_j = X^j - P_{j-1}\left(X^j\right)$ où

P_{j-1} désigne la projection orthogonale sur $\mathbb{R}_{j-1}[X]$.

Montrer que $(T_0, \ldots, T_n)$ est une base orthogonale de vecteurs propres de f_n et

préciser les valeurs propres correspondantes.

681. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $S_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de taille n dont toutes les valeurs propres sont positives.

a) Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$. Montrer que $S \in S_n^+(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tXSX \geqslant 0$.

b) Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $S = A^tA$. Montrer que $S \in S_n^+(\mathbb{R})$.

Réciproquement, montrer que toute matrice $S \in S_n^+(\mathbb{R})$ peut s'écrire sous la forme $S = A^tA$ où $A \in M_n(\mathbb{R})$.

c) Soient $U \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\chi_{UV} = \chi_{VU}$.

d) Soient $U, V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, Montrer qu'il existe une suite d'élements de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ convergeant vers U. En déduire que $\chi_{UV} = \chi_{VU}$.

e) Soient $S, T \in S_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que $S + T \in S_n^+(\mathbb{R})$.

L'ensemble $S_n^+(\mathbb{R})$ est-il un sous-espace vectoriel de $S_n(\mathbb{R})$?

f) Soient $S, T \in S_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que ST est à valeurs propres réelles positives.

A t-on $ST \in S_n^+(\mathbb{R})$?

Sol cahier rouge avec le produit ! !

Sol :

a) Si X vp, $SX = \lambda X$, alors $X^T\lambda X \geqslant 0 \Rightarrow \lambda \geqslant 0$.

Récipt, si toutes les vp sont positives, $S = PDP^T$.

Remplaçons X par PZ , il vient $Z^TP^TPDP^TPZ = Z^TDZ = \sum \lambda_j z_j^2 \geqslant 0$.

Mais l'application $Z \longmapsto PZ$ est une bijection, donc on récupère le pour tout X.

b) D'abord $AA^T \in \mathcal{S}_n$, et $X^TAA^TX = \|A^TX\|^2 \geqslant 0$.

Récipt, $S = PD'P^T$, $D' = G^2$ ...G dz.

$S = (PG^T)(GP^T) = AA^T$.

c) d) Est-ce du cours ?

e) $S+T \in \mathcal{S}_n$, mais par a) $\forall X, X^T S X \geqslant 0$ et $\forall X, X^T T X \geqslant 0$, la somme aussi .

Pas un sev ! ! Car la multiplication par -1 pose un léger problème ...

f) A quoi sert ce qui précède ?

$S = AA^T, T = BB^T$, mais le spectre de $AA^T BB^T$ est le même que celui de $B^T AA^T B$ par d).

Et $B^T AA^T B = G^T G$ avec $G = A^T B$... Gagné ?

Non , ce n'est pas stable pour le produit car les symétriques ne le sont pas !

682. Soit E un espace euclidien et u un endomorphisme de E.

Montrer que deux des propriétés suivantes entraînent la troisième :

(i) u est une isométrie : (ii) $u^2 = -Id$ (iii) pour tout $x \in E, < u(x), x >= 0$.

Sol : Voir ma feuille exo 55.

Dans tout le corrigé, on notera $\mathcal{B} = (e_i)_1^n$ une bon de E, A la matrice de f dans $\mathcal{B}$, et si x (resp. y) est un vecteur de E, on notera X (resp. Y) la matrice colonne de ses coordonnées dans $\mathcal{B}$.

(1) (i) et (ii) $\Longrightarrow$ (iii)

Supposons f isométrie telle que $f^2 = -Id_E$, cad $A^T A = I_n$ et $A^2 = -I_n$.

On a donc $A^T A = -A^2$ et puisque A est inversible, en simplifiant on a $A^T = -A$.

On en déduit, pour tous $x, y \in E$:

$$(f(x) \mid y) = (AX \mid Y) = (AX)^T Y = X^T A^T Y = -X^T AY = -(x \mid f(y))$$

et, en particulier : $(f(x) \mid x) = -(x \mid f(x))$ d'où $(f(x) \mid x) = 0$.

(2) (ii) et (iii) $\Longrightarrow$ (i)

Déjà, on remarque que si (iii) est vérifié, $\forall (x,y) \in E^2$, $(f(x+y) \mid x+y) = 0$ donc :

$$(f(x) + f(y) \mid x+y) = \underbrace{(f(x) \mid x)}_{=0} + (f(y) \mid x) + (f(x) \mid y) + \underbrace{(f(y) \mid y)}_{=0} = 0$$

d'où

$$(f(x) \mid y) = -(x \mid f(y))$$

En particulier, pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]^2$ on a $a_{ji} = (f(e_i \mid e_j) = -(e_i \mid f(e_j)) = -a_{ij}$ cad que la matrice A est antisymétrique, et puisque $A^2 = -I_n$ on en déduit $A^T A = I_n$ donc f est une isométrie.

(3) (iii) et (i) $\Longrightarrow$ (ii) Même principe que ci-dessus.

683. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique.

On pose $\rho(A) = \max\{|\lambda|, \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\}$ et on note E l'ensemble des vecteurs propres

de A de norme 1 (pour la norme euclidienne canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$).

Pour $X \in E$, on pose $F(A, X) = \inf\left\{\mathrm{tr}\left(\left(A - uXX^T\right)^2\right), u \in \mathbb{R}\right\}$

puis $m(A) = \inf\{F(A, X), X \in E\}$.

Montrer que $m(A) = \mathrm{tr}\left(A^2\right) - \rho\left(A^2\right)$.

Sol :

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de $(A \mid B) = \mathrm{tr}\left(A^T B\right)$.

En particulier $\|A\|^2 = \mathrm{tr}\left(A^T A\right)$.

Pour $Q \in O(n)$, on a $\left\|Q^T A Q\right\|^2 = \|A\|^2$.

On notera $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Soit $(E_{i,j})$ celle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $D = \mathrm{diag}\left(\lambda_1, \cdots, \lambda_n\right)$ tels que : $A = PDP^T$.

Soit $X_i \in E$ la i -ème colonne de P (vecteur propre pour λ_i).

La matrice $A - \mu X_i X_i^T$ est symétrique donc

$$\mathrm{tr}\left(A - \mu X_i X_i^T\right)^2 = \left\|\left(A - \mu X_i X_i^T\right)\right\|^2 = \left\|P^T\left(A - \mu X_i X_i^T\right) P\right\|^2$$

De plus, on a :

$P^T\left(A - \mu X_i X_i^T\right) P = D - \mu\left(P^T X_i\right)\left(X_i^T P\right) = D - \mu\left(P^T X_i\right)\left(P^T X_i\right)^T$.

En particulier $Pe_i = X_i$ donc $P^T X_i = e_i$, d'où :

$$\left(P^T X_i\right)\left(P^T X_i\right)^T = e_i e_i^T = E_{i,i}$$

Il en résulte :

$$\operatorname{tr}\left(A - \mu X_i X_i^T\right)^2 = \left\|P^T\left(A - \mu X_i X_i^T\right)P\right\|^2 = \operatorname{tr}\left(D - \mu E_{i,i}\right)^2 = \sum_{k \neq i} \lambda_k^2 + \left(\lambda_i - \mu\right)^2$$

En choisissant $\mu = \lambda_i$, on trouve

$$F\left(A, X_i\right) = \sum_{k \neq i} \lambda_k^2 = \operatorname{tr}\left(A^2\right) - \lambda_i^2$$

Ceci étant vrai pour X_i de A, on trouve :

$$m(A) = \operatorname{tr}(A)^2 - \max\left(\lambda_i^2\right) = \operatorname{tr}(A)^2 - \rho\left(A^2\right)$$

Analyse

684. Soit E un espace vectoricl normé et A une partie ouverte de E.

Montrer que $\Omega = \bigcup_{\alpha \in A} \bar{B}(a,1)$ est un ouvert.

Sol :

On se donne $x \in \Omega$.

Il existe $\begin{cases} a \in A \\ u \in E \end{cases}$ tels que $x = a + u$ avec $\|u\| \leqslant 1$.

Comme A est ouvert, il existe $r > 0$ tel que la boule ouverte $B(a,r)$ soit incluse dans A.

On va montrer $B(x,r) \subset \Omega$. Pour cela on se donne z dans $B(x,r)$.

On écrit $z = x + w$ avec $\|w\| < r$. Avec ces notations : $z = a + u + w = (a + w) + u$.

Mais $a + w \in B(a,r)$ donc $a + w \in A$ et $\|u\| \leqslant 1$.

Ainsi $z \in \overline{B(a+w,1)}$, en particulier $z \in \Omega$.

On en déduit que $B(x,r)$ est incluse dans U.

En conclusion : Ω est un ouvert de E.

685. Soit $E = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ et $\varphi \in E$ telle que $\int_0^1 \varphi(t)\mathrm{d}t \neq 0$.

On pose, pour toute $f \in E$, $N(f) = |f(0)| + \int_0^1 \left|f'(t)\right| \mathrm{d}t$ et

$N_\varphi(f) = \left|\int_0^1 f(t)\varphi(t)\mathrm{d}t\right| + \int_0^1 \left|f'(t)\right| \mathrm{d}t$.

Montrer que N et N_φ sont des normes équivalentes sur E.

Sol :

- Les applications N et N_φ vérifient la positivité , l'homogénéité, et l'inégalité triangulaire.

Le seul point à vérifier est leur caractère "défini" "(l'axiome de séparation)".

Pour $f \in E$, l'égalité $N(f) = 0$ entraine :

$$\int_0^1 \left|f'(t)\right| \mathrm{d}t = 0 \text{ et } |f(0)| = 0$$

Par continuité et positivité, $f' = 0$ donc $f = \lambda$ sur $[0,1]$ (et $\lambda = 0$ car $f(0) = 0$).

De même, $N_\varphi(f) = 0$ implique :

$$f = \lambda \text{ et } \int_0^1 f(t)\varphi(t)\mathrm{d}t = 0$$

donc $\lambda = 0 \, \mathrm{car} \int_0^1 \varphi(t)\mathrm{d}t \neq 0$.

Suite :

Pour $f \in E$ et $t \in [0,1]$, on a :

$$f(t) = f(0) + \int_0^t f'(t)\mathrm{d}t$$

et en déduit :

$$|f(t)| \leqslant |f(0)| + \int_0^1 \left|f'(t)\right| \mathrm{d}t = N(f)$$

Il en découle :

$$\begin{aligned} \left|\int_0^1 f(t)\varphi(t)\mathrm{d}t\right| &\leqslant \|\varphi\|_\infty \int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t \\ &\leqslant \|\varphi\|_\infty N(f) \end{aligned}$$

On a donc obtenu l'inégalité :

$$N_\varphi(f) \leqslant (1 + \|\varphi\|_\infty)\, N(f)$$

Puis : La fonction $\phi(t) = \displaystyle\int_t^1 \varphi(u)\mathrm{d}u$ est dans E et :

$$\phi' = -\varphi, \quad \phi(0) = J, \quad \phi(1) = 0$$

Par intégration par partie :

$$\int_0^1 f(t)\varphi(t)\mathrm{d}t = [-f(t)\phi(t)]_0^1 + \int_0^1 f'(t)\phi(t)\mathrm{d}t = f(0)J + \int_0^1 f'(t)\phi(t)\mathrm{d}t$$

Ainsi $f(0) = \dfrac{1}{J}\left(\displaystyle\int_0^1 f(t)\varphi(t)\mathrm{d}t - \int_0^1 f'(t)\phi(t)\mathrm{d}t\right)$.

Enfin, par inégalité triangulaire :

$$|f(0)| \leqslant \frac{1}{|J|}\left(\left|\int_0^1 f(t)\varphi(t)\right| + \|\phi\|_\infty \int_0^1 \left|f'(t)\right|\right) \leqslant \frac{\max\left(1, \|\phi\|_\infty\right)}{|J|} N_\varphi(f).$$

Comme $\|\phi\|_\infty \leqslant \|\varphi\|_\infty$, on obtient :

$$N(f) \leqslant \left(1 + \frac{\max\left(1, \|\varphi\|_\infty\right)}{|J|}\right) N_\varphi(f)$$

Ainsi N et N_φ sont deux normes équivalentes sur E.

686. Soit E un espace vectoriel normé et $f : E \to E, x \mapsto \dfrac{x}{1 + \|x\|}$.

a) Montrer que f est surjective de E sur la boule unité ouverte de E.

b) Montrer que f est lipschitzienne.

Sol :

Pour tout $x \in E$, on a $\|f(x)\| = \dfrac{\|x\|}{1 + \|x\|} < 1$.

Ainsi f est à valeurs dans B.

Soient $z \in B$ et $x \in E$ tels que $z = \dfrac{x}{1 + \|x\|}$.

Alors $\|z\| = \dfrac{\|x\|}{1 + \|x\|}$, donc $\|x\| = \dfrac{\|z\|}{1 - \|z\|}$.

Nécessairement $x = (1 + \|x\|)z = \dfrac{z}{1 - \|z\|}$.

Réciproquement, avec ces notations, on a $f(x)=z$.

En conclusion, f est bijective de E sur B.

L'injectivité est-elle claire ?

Puis : Pour tout $(x,y)\in E^2$, on a :

$$f(x)-f(y)=\frac{(x-y)+\|y\|x-\|x\|y}{(1+\|x\|)(1+\|y\|)}=\frac{(1+\|y\|)(x-y)+(\|y\|-\|x\|)y}{(1+\|x\|)(1+\|y\|)}.$$

On en déduit :

$$\|f(x)-f(y)\|\leqslant\frac{(1+\|y\|)\|x-y\|+\|x-y\|\|y\|}{(1+\|x\|)(1+\|y\|)}=\frac{1+2\|y\|}{(1+\|x\|)(1+\|y\|)}\|x-y\|\leqslant 2\|x-y\|$$

L'application f est donc 2 -lipschitzienne.

687. Soient $(E,\|\|)$ un espace vectoriel normé, A une partie non vide de E et $k\in\mathbb{R}^{+*}$.

Soit $f:A\to\mathbb{R}$ une application k -lipschitzienne et $g:x\in E\mapsto\inf\limits_{y\in A}\{k\|x-y\|+f(y)\}$.

Montrer que g est bien définie et qu'on peut prolonger f par g sur E.

Montrer que g est k -lipschitzienne.

Sol :

1. Soit $x\in E$, et soit a_0 un élément fixé de A. Pour tout a dans A, on :

$|f(a)-f(a_0)|\leqslant k\|a-a_0\|$, donc $f(a)\geqslant f(a_0)-k\|a-a_0\|$.

On en déduit :

$$f(a)+k\|x-a\|\quad\geqslant f(a_0)-k(\|a-a_0\|-\|x-a\|)\geqslant f(a_0)-k\|x-a_0\|.$$

Ainsi Δ_x est minoré par $f(a_0)-k\|x-a_0\|$.

Donc admet Δ_x une borne inférieure, notée $g(x)$.

2. Si x est dans A, alors :

$g(x)=\inf\{f(a)+k\|x-a\|,a\in A\}=f(x)($ minimum atteint en $a=x)$.

Il reste à montrer que g est k -lipschitzienne sur E.

Soit $(x,x')\in E$. Pour tout $a\in A$, on a :

$g(x) \leqslant f(a)+k\|x-a\| \leqslant \underbrace{f(a)+k\left\|x^{\prime}-a\right\|}_{\star}+k\left\|x-x^{\prime}\right\|$

Ainsi $g(x) \leqslant g\left(x^{\prime}\right)+k\left\|x-x^{\prime}\right\|$, en passant à la borne inférieure sur $a \in A$ dans $(\star)$.

Par symétrie : $\left|g(x)-g\left(x^{\prime}\right)\right| \leqslant k\left\|x-x^{\prime}\right\|$.

L'application g est donc k -lipschitzienne sur E.

688. Soient $(\alpha, \beta) \in\left(\mathbb{R}_{+}^{*}\right)^{2}$. Soient $\left(a_{n}\right)_{n \geqslant 1}$ et $\left(b_{n}\right)_{n} \geqslant 1$ les suites définies par

$a_{1}=b_{1}=1$ et, pour $n \geqslant 1, a_{n+1}=a_{n}+\beta b_{n}, b_{n+1}=\dfrac{n}{n+1}\left(\alpha a_{n}+b_{n}\right)$.

a) Justifier que $\lim\limits_{n \rightarrow+\infty} a_{n}=\lim\limits_{n \rightarrow+\infty} b_{n}=+\infty$.

b) On suppose dorénavant que la suite $\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_{n}}\right)_{n \geqslant 1}$ est monotone à partir d'un certain rang.

Montrer qu'elle est convergente et déterminer sa limite.

c) En déduire que $b_{n} \underset{n \rightarrow+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}} a_{n}$.

Sol :

1. Par récurrence immédiate :

$$\forall n \in \mathbb{N}^{*}, a_{n+1}>a_{n} \geqslant 1 \text { et } b_{n}>0$$

Supposons $\lim\limits_{+\infty} a_{n}=\ell \in \mathbb{R}$.

Alors $\lim\limits_{+\infty} b_{n}=0$ d'après (1).

Donc $0=\alpha \ell$ d'après (2) : absurde car $\ell \geqslant 1$.

Ainsi $\lim\limits_{+\infty} a_{n}=+\infty$, donc $\lim\limits_{+\infty} b_{n}=+\infty$.

En effet (2) implique $b_{n+1} \geqslant \dfrac{n}{n+1} \alpha a_{n}$.

2. Pour simplifier un peu les notations, on pose :

$$q_{n}=\frac{a_{n+1}}{a_{n}}>1 \text { et } r_{n}=\frac{b_{n}}{a_{n}}>0$$

L'égalité (1) s'écrit $\left(1^{\prime}\right)$: $q_{n}=1+\beta r_{n}$.

Les deux suites ont donc même monotonie.

L'égalité (2) donne $r_{n+1} = \dfrac{n}{n+1} \dfrac{\alpha a_n + b_n}{a_n + \beta b_n}$.

Ainsi $\left(2'\right) : r_{n+1} = \dfrac{n}{n+1} \dfrac{\alpha + r_n}{1 + \beta r_n}$.

Par l'absurde, on suppose que (q_n) diverge.

D'après $\left(1'\right), \lim\limits_{+\infty} q_n = \lim\limits_{+\infty} r_n = +\infty$.

Mais $(2')$ donne $\lim\limits_{+\infty} r_n = \dfrac{1}{\beta}$ (contradiction).

Ainsi les suites (q_n) et (r_n) convergent.

Soit $\lambda = \lim\limits_{+\infty} r_n$. L'égalité $(2')$ donne $\lambda = \dfrac{\lambda + \alpha}{\beta\lambda + 1}$.

Mais $\lambda \geqslant 0$ donc $\lambda = \sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}$(cqfd).

689. Soit $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs convergeant vers une limite $r > 0$.

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par $a_0 = b_0 = 1$ et, pour

$n \geqslant 0$, $a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{2} b_n, b_{n+1} = r_n\left(4a_n + b_n\right)$.

a) Justifier que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = +\infty$.

On pose $q_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ et on suppose à partir de maintenant que la suite

(q_n) est monotone à partir d'un certain rang.

b) Établir que, pour tout entier $n, q_{n+1} = 1 + r_n + \dfrac{r_n}{q_n}$.

c) Montrer que la suite (q_n) est convergente.

d) En déduire qu'il existe $k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} k a_n$ et donner, en fonction de r,

la valeur du réel k.

Sol :

a) Les suites (a_n) et (b_n) sont à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$.

La suite (a_n) est donc croissante.

Supposons $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R}($ donc $\ell \geqslant 1)$.

Alors $\lim_{+\infty} b_n = 0$ d'après (1).

(2) donne alors $0 = 4r\ell$ donc $\ell = 0$ (absurde).

Ainsi, $\lim_{+\infty} a_n = +\infty$.

(2) donne $b_{n+1} \geqslant 4r_n a_n$ donc $\lim_{+\infty} b_n = +\infty$.

b) D'après les égalités (1) et (2) :

$$\begin{aligned} q_{n+1} &= 1 + \frac{b_{n+1}}{2a_{n+1}} = 1 + \frac{4r_n a_n + r_n b_n}{2a_{n+1}} \\ &= 1 + r_n + \frac{r_n}{q_n} \end{aligned}$$

La suite (q_n) est monotone positive.

La relation précédente exclut $\lim_{+\infty} q_n = +\infty$.

Ainsi $\lim_{+\infty} q_n = q > 1$, avec $q = 1 + r + \frac{r}{q}$.

II vient $q = \dfrac{1 + r + \sqrt{r^2 + 6r + 1}}{2}$.

(1) donne alors $\dfrac{b_n}{2a_n} = q_{n+1} - 1$.

On trouve donc : $b_n \sim 2(q-1)a_n$.

690. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $x_n > 0$ tel que $x_n^n + x_n = 3$

puis déterminer la limite de la suite (x_n) ainsi définie.

Sol :

Posons $f_n(x) = x^n + x - 3$;

f_n est continue strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

Elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $[-3, +\infty[$.

On a $f_n(1) = -1$ et $f_n(2) = 2^n - 1 > 0$.

Il existe donc un unique $x_n \in]1, 2[$ tel que $f_n(x_n) = 0$.

L'égalité $f_n(x_n) = 0$ donne $(\star)$: $n \ln x_n = \ln(3 - x_n)$.

Ainsi $\ln x_n = \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n}\right)$ donc $\lim\limits_{+\infty} x_n = 1$.

Posons $x_n = 1 + y_n$ (donc $\lim\limits_{+\infty} y_n = 0$).

On obtient $n \ln(1 + y_n) = \ln(2 - y_n)$.

Ainsi $ny_n \sim \ln 2$, et on reporte dans $(\star)$:

$$\begin{aligned} \ln x_n &= \frac{\ln 2}{n} + \frac{1}{n} \ln\left(1 - \frac{y_n}{2}\right) \\ &= \frac{\ln 2}{n} - \frac{\ln 2}{2n^2} + \circ\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

Il en résulte :

$$\begin{aligned} x_n &= \exp\left(\frac{\ln 2}{n} - \frac{\ln 2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= 1 + \frac{\ln 2}{n} + \frac{\ln 2(\ln 2 - 1)}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

691. Soit $c \in \mathbb{R}^{+*}$. On considère l'équation (E) d'inconnue $x \in \mathbb{R}, x \sin x - c \cos x = 0$.

On note pour tout $n \in \mathbb{N}, I_n =]\, n\pi, n\pi + \dfrac{\pi}{2}[$.

a) Montrer que (E) possède une unique solution x_n dans chaque I_n

et que l'ensemble des x_n coincide avec

l'ensembie des solutions positives de (E).

b) Donner un développement asymptotique à trois termes de x_n.

Sol :

a) Les réels $x \equiv \dfrac{\pi}{2} [\pi]$ ne sont pas solutions.

Donc $(E) \Leftrightarrow \varphi(x) = 0$, avec $\varphi(x) = \tan x - \dfrac{c}{x}$.

La fonction φ, bijective croissante de I_0 sur $\mathbb{R}$, s'annule en un unique x_0 de I_0.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $J_n =]\, n\pi - \pi/2, n\pi + \pi/2[$.

La fonction φ est bijective croissante de J_n sur $\mathbb{R}$.

De plus $\varphi(n\pi) = -\dfrac{c}{n\pi} < 0$.

Pour $n \geqslant 1$, l'unique solution x_n de (E) dans J_n est donc dans I_n.

b) Soit $y_n = x_n - n\pi \in I_0$. On a $\tan(y_n) = \dfrac{c}{n\pi + y_n}$.

Ainsi $y_n = \arctan\left(\dfrac{c}{n\pi + y_n}\right) \sim \dfrac{c}{n\pi}$.

On peut alors écrire :

$$\begin{aligned}\frac{c}{n\pi + y_n} &= \frac{c}{n\pi}\left(1 + \frac{y_n}{n\pi}\right)^{-1} \\ &= \frac{c}{n\pi} - \frac{c^2}{\pi^3 n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}x_n &= n\pi + y_n \\ &= n\pi + \arctan\left(\frac{c}{n\pi} - \frac{c^2}{\pi^3 n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\ &= n\pi + \frac{c}{n\pi} + \frac{c^2(c-3)}{3\pi^3 n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\end{aligned}$$

692. Soit f une fonction continue et décroissante de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$.

On considère une suite de réels (r_n) strictement décroissante, convergeant vers 1

et l'on pose $f_n = r_n f$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que f (resp. f_n) admet un unique point fixe ℓ (resp. ℓ_n).

b) Etudier la convergence de la suite (ℓ_n).

Sol :

a) On définit les fonctions $\begin{cases} g(x) = f(x) - x \\ g_n(x) = r_n f(x) - x \end{cases}$

On observe que $\begin{cases} g(0) = f(0) \geqslant 0 \\ g_n(0) = r_n f(0) \geqslant 0 \end{cases}$

Les fonctions g et g_n sont continues et strictement décroissantes sur $\mathbb{R}^+$.

On a $\lim\limits_{+\infty} f \in \mathbb{R}^+$, donc $\lim_{+\infty} g = \lim_{+\infty} g_n = -\infty$.

Ainsi g (resp. g_n) s'annule en unique I (resp. I_n) de $\mathbb{R}^+$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $r_n f\left(I_{n+1}\right) \geqslant r_{n+1} f\left(I_{n+1}\right)$.

Ainsi $g_n\left(I_{n+1}\right) \geqslant g_{n+1}\left(I_{n+1}\right) = 0 = g_n\left(I_n\right)$.

La décroissance de g_n donne alors $0 \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$.

Posons $\lim\limits_{+\infty} I_n = L \in \mathbb{R}^+$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $r_n f\left(I_n\right) = I_n$.

Donc $f(L) = L$ par passage à la limite.

Par unicité du point fixe de f, on $L = I$.

Ainsi $\lim\limits_{+\infty} I_n = I$.

693. On s'intéresse aux suites $\left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant $u_n \neq u_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

On dit qu'une telle suite est lentement convergente lorsqu'elle est convergente

et qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ et $p > 0$ tels que : $\forall n \geqslant N, \left|\dfrac{u_{n+1} - u_n}{v_n - u_{n-1}}\right| \geqslant p$.

a) Soit $q \in \mathbb{C}^*$ tel que avec $|q| < 1$.

Montrer que toute suite géométrique de raison q est lentement convergente.

b) Montrer que la suite définie par $t_n = 1/n!$ n'est pas lentement convergente.

c) Montrer que pour toute suite lentement convergente on a nécessairement $p \in]0, 1[$.

Sol :

a) La raison q de $\left(u_n\right)_{n \geqslant 0}$ vérifie $0 < |q| < 1$.

Pour $n \geqslant 1$, on a : $\left|u_{n+1} - u_n\right| = |q|\left|u_n - u_{n-1}\right|$.

Ainsi la suite $\left(u_n\right)$ converge lentement.

Posons maintenant $u_n = \dfrac{1}{n!}$. Pour $n \geqslant 2$, on a :

$$\frac{\left|u_{n+1} - u_n\right|}{\left|u_n - u_{n-1}\right|} = \rho_n = \frac{n}{n^2 - 1}$$

La suite (ρ_n) n'est pas minorable par $\rho > 0$.

La suite (u_n) n'est donc pas lentement convergente.

b) Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite lentement convergente :

$$\exists \rho \geqslant 0, \exists n_0 \geqslant 1, \forall n \geqslant n_0, |u_{n+1} - u_n| \geqslant \rho\, |u_n - u_{n-1}|$$

Alors, par récurrence :

$$\forall n \geqslant n_0, |u_{n+1} - u_n| \geqslant \rho^{n-n_0}\, |u_{n_0+1} - u_{n_0}|$$

Puisque (u_n) converge, il en résulte :

$$\lim_{n\to+\infty} \rho^{n-n_0}\, |u_{n_0+1} - u_{n_0}| = 0$$

ce qui exige $0 < \rho < 1$.

694. Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \cos\left(n^2\pi \ln\left(\dfrac{n-1}{n}\right)\right)$.

Sol : un DL précis de $\ln(1+u)$ s'impose...

$n^2\pi \ln\left(\dfrac{n-1}{n}\right) = n^2\pi\left(-\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} - \dfrac{1}{3n^3} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^4}\right)\right) = -n\pi - \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{3n} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Il vient $u_n = (-1)^n \cos\left(-\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{3n} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right) = (-1)^{n+1}\sin\left(\dfrac{\pi}{3n} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$.

Attention ! ! ! Trigo...

Et après un DL impeccable cf $\sin(u) = u + \mathcal{O}(u^2)$,

$(-1)^{n+1}\sin\left(\dfrac{\pi}{3n} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right) = (-1)^{n+1}.\dfrac{\pi}{3n} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Attention à la composée des DL...

Série convergente.Clair ? CSSA pour la première et absolue convergence pour la deuxième.

695. Déterminer selon les valeurs des réels a et b la nature de la série

de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n^a + (-1)^n n^b}$.

Sol : On fait un DL au premier ordre en discutant sur les paramètres forcément distincts !

Rq : un cas alterné , l'autre à signe constant.

-Si $a = b$, la série n'est pas définie.

- Si $a < b$, alors $n^a = \mathrm{o}\left(n^b\right)$ donc $u_n \sim \dfrac{1}{n^b}$.

Alors $\sum u_n$ converge si et seulement si $b > 1$.

On suppose maintenant $a > b$, donc $|u_n| \sim \dfrac{1}{n^a}$.

La série $\sum u_n$ diverge grossièrement si $a \leqslant 0$.

On suppose donc $a > 0$ et $a > b$. Alors :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^a}\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^{a-b}}\right)^{-1} = \frac{(-1)^n}{n^a}\left(1 - \frac{(-1)^n}{n^{a-b}} + o\left(\frac{1}{n^{a-b}}\right)\right).$$

Ainsi $u_n = v_n - w_n$, où :

$$v_n = \frac{(-1)^n}{n^a} \text{ et } w_n \sim \frac{1}{n^{2a-b}}$$

La série $\sum v_n$ converge (en vertu du TSSA).

la série positive $\sum w_n$ converge $\Leftrightarrow 2a - b > 1$.

Ainsi $\sum u_n$ converge si et seulement si $\Leftrightarrow 2a - b > 1$.

- En définitive, on peut énoncer :

$$\left(\sum u_n \text{ converge }\right) \Leftrightarrow \begin{cases} (a < b \text{ et } b > 1) \text{ ou} \\ a > \max(0, b, (1+b)/2) \end{cases}$$

696. Soit $a > 0$. Déterminer la nature des séries de termes généraux :

$$u_n = n^a / \prod_{k=1}^{n}\left(1 + a^k\right), v_n = \arccos\left(\frac{n^a}{1+n^a}\right), w_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(\ln(1+x))dx.$$

Sol :

Posons $y = \arccos x$, où $0 \leqslant x \leqslant 1$. Donc $x = \cos y$.

On a : $1 - x = 1 - \cos y = 2\sin^2 \frac{y}{2}$.

On peut donc écrire : $y = \sqrt{2(1-x)}$.

Ainsi : $\arccos x \overset{x \to 1^-}{\sim} \sqrt{2(1-x)}$.

En particulier $v_n \sim \sqrt{2\left(1 - \dfrac{n^a}{1+n^a}\right)} \sim \dfrac{\sqrt{2}}{n^{a/2}}$.

Conclusion : $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ converge $\Leftrightarrow a > 2$.

Si $a \geqslant 1$, on a les inégalités $1 + a^k \geqslant 2$.

Ainsi $u_n \geqslant \dfrac{2^n}{n^a} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Dans ce cas $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ diverge grossièrement.

Si $0 < a < 1$, on a $1 + a^k \geqslant 1$ donc $u_n \geqslant \dfrac{1}{n^a}$.

Dans ce cas $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ diverge par comparaison.

Si on regarde $1/u_n$, si $a \geqslant 1$, avec le raisonement précédent $u_n \leqslant \dfrac{n^a}{2^n}$, cvte par Alembert.

Si $0 < a < 1$, le dénominateur a une limite finie, il suffit de regarder son log

qui amène à une série convergente par équivalent géométrique.

Donc $u'_n \sim C.n^a$, divergence grossière.

Pour w_n, on rappelle que $\ln(1 + x) \leqslant \ln(x)$, ici tout reste dans $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Donc par monotonie du cos, $w_n \geqslant \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n(t)dt$, Wallis!!

Or Wallis est équivalente à $\sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$ qui est divergente.

697. Soit $u_n = (\mathrm{ch}(1/n) - 1)^{\mathrm{sh}(1/\mathrm{n})}$.

a) Déterminer, si elle existe, la limite de u_n quand n tend vers l' infini.

b) Déterminer la nature de la série de terme général $u_n - 1$.

Sol : exo de DL!

a) On restructure l'objet et on fait un DL précis mais économe ... Regarde!

$$(\mathrm{ch}(1/n) - 1)^{\mathrm{sh}(1/\mathrm{n})} = \left(\frac{1}{2n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)^{\frac{1}{n}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)} = e^{\cdots}.$$

Je regarde l'exposant : $\left(\dfrac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^3}\right)\right) . \left(-\ln(2n^2) + \ln\left(1 + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)\right)$.

Cet exposant est équivalent à $-2\dfrac{\ln(n)}{n}$ qui tend vers 0. Donc u_n tend vers 1.

b) Notre objet est du type $e^v - 1$ avec v qui tend vers 0 . C'est équivalent à v.

Soit $-2\dfrac{\ln(n)}{n}$ terme général de série divergente car plus fort que harmonique divergente.

698. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^{+*})^N$ une suite telle que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{\alpha}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$..

On pose $b_n = \ln(n^\alpha u_n)$ et $a_n = b_{n+1} - b_n$.

Déterminer la nature de la série $\sum a_n$. En déduire qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $u_n \sim \dfrac{\lambda}{n^\alpha}$.

699. Soit $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sigma(3n) = 4n$ et

$\forall n \in \mathbb{N}, \sigma(3n+1) = 4n+2$, $\sigma(3n+2) = 2n+1$

a) Montrer que σ est bijective.

b) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ et $v_n = u_{\sigma(n)}$.

Montrer que les séries de terme généraux respectifs u_n et v_n sont convergentes

et calculer leurs sommes.

Sol :

a) On va montrer que σ est bijective en formant $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telle que $f \circ \sigma = \sigma \circ f = \mathrm{Id}$.

Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On discute module 4 .

-si $m = 4n$, on pose $f(m) = 3n$.

- si $m = 4n-2$, on pose $f(m) = 3n-2$.

- si $m = 4n-1 = 2(2n)-1$, on pose $f(m) = 3(2n)-1 = 6n-1$.

- si $m = 4n-3 = 2(2n-1)-1$, on pose $f(m) = 3(2n-1)-1 = 6n-4$.

Par construction, $\sigma(f(m)) = m$ pour tout $m \in \mathbb{N}^*$.

On trouve de même : $\forall n \in \mathbb{N}^*, f(\sigma(n)) = n$ (distinguer suivant la valeur de n modulo 3).

Ainsi σ est une bijection de $\mathbb{N}^*$ et $f = \sigma^{-1}$.

b) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge (série harmonique alternée).

On sait en outre que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$.

Pour étudier $\displaystyle\sum_{n\geq 1} v_n$, on groupe 3 termes consécutifs.

Posons $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$S_{3n} = \sum_{k=1}^{3n} v_k = \sum_{k=1}^{n} w_k$$

où $w_k = v_{3k-2} + v_{3k-1} + v_{3k}$.

Mais $v_{3k-2} = u_{\sigma(3k-2)} = u_{4k-2} = \dfrac{1}{2(2k-1)}$.

De même : $v_{3k-1} = u_{\sigma(3k-1)} = u_{2k-1} = -\dfrac{1}{2k-1}$.

Enfin : $v_{3k} = u_{\sigma(3k)} = u_{4k} = \dfrac{1}{4k}$.

On en déduit :

$$w_k = \frac{1}{2(2k-1)} - \frac{1}{2k-1} + \frac{1}{4k} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k-1}\right).$$

Finalement, on trouve :

$$S_{3n} = \sum_{k=1}^{n} w_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k-1}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^k}{k}$$

donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_{3n} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k} = -\frac{\ln 2}{2}$.

Mais $\begin{cases} S_{3n-1} = S_{3n} - u_{3n} \\ S_{3n-2} = S_{3n} - u_{3n} - u_{3n-1} \end{cases}$

Du fait que $\displaystyle\lim_{\infty} u_n = 0$, on en déduit :

$$\lim_{\infty} S_{3n-1} = \lim_{\infty} S_{3n-2} = \lim_{\infty} S_{3n} = -\frac{\ln 2}{2}$$

Finalement : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \lim_{\infty} S_n = -\frac{\ln 2}{2}$.

c) Quelques remarques sur le résultat de cet exercice.

La série $\sum v_n$ est obtenue par une permutation de l'ordre des termes de la série $\sum u_n$.

Mais les deux séries, qui sont convergentes, n'ont pas la même somme !

D'une façon un peu vague mais très évocatrice :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} u_n &= -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \\ &\quad - \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} + \frac{1}{12} \\ &\quad - \cdots = -\ln 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} v_n &= \underbrace{\frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{4}}_{(u_1+u_2)/2} + \underbrace{\frac{1}{6} - \frac{1}{3} + \frac{1}{8}}_{(u_3+u_4)/2} \\ &\quad + \underbrace{\frac{1}{10} - \frac{1}{5} + \frac{1}{12}}_{(u_5+u_6)/2} + \underbrace{\frac{1}{14} - \frac{1}{7} + \frac{1}{16}}_{(u_7+u_8)/2} \\ &\quad + \cdots = -\frac{\ln 2}{2}\end{aligned}$$

On montre que lorsqu'une série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ est abs cvte (ce qui n'était pas le cas ici),

tout série obtenue par permutation des termes est encore absolument convergente,

et que les sommes des deux séries sont égales.

700. Soit l'équation $(E) : \forall x \geqslant 0, x^2 f(x) = 2\displaystyle\int_0^x t f(x-t)\mathrm{d}t$, d'inconnue $f \in C^0(\mathbb{R}_+)$.

a) Montrer que toute solution f est nécessairement de classe C^∞.

b) Trouver une équation différentielle d'ordre 2 vérifiée par f.

c) En déduire toutes les solutions de (E).

Sol :

a) Avec $u = x - t, (E)$ devient :

$$(\star) : \forall x \geqslant 0, x^2 f(x) = 2x \int_0^x f(u)\mathrm{d}u - 2\int_0^x u f(u)\mathrm{d}u$$

Soit $f \in C^0(\mathbb{R}^+)$ une solution de (E').

Supposons f de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Alors l'égalité :

$$\forall x > 0, f(x) = \frac{2}{x}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u - \frac{2}{x^2}\int_0^x uf(u)\mathrm{d}u$$

montre que f est $\mathcal{C}^{k+1}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Finalement, f est $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

b) En dérivant (E'), on obtient :

$$\forall x > 0, 2xf(x) + x^2 f'(x) = 2\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$$

Une nouvelle dérivation donne :

$$\forall x > 0, x^2 f''(x) + 4xf'(x) = 0$$

Ainsi f est solution sur $\mathbb{R}^{+*}$ de :

$$y'' + \frac{4}{x}y' = 0$$

qui s'intègre en $y = \dfrac{\mu}{x^3} + \gamma$ avec $(\mu, \gamma) \in \mathbb{R}^2$.

Mais f est continue en 0.

Ainsi f est constante sur $\mathbb{R}^{+}(\mu = 0)$. La réciproque est claire.

Les solutions de (E) sont donc les fonctions constantes.

701. Soit F l'ensemble des fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ telles que $f(1) = 1$ et $f(0) = 0$.

a) Montrer que, pour tout $f \in F$, $\displaystyle\int_0^1 \left|f'(t) - f(t)\right| \mathrm{d}t \geqslant e^{-1}$.

b) Montrer que $\displaystyle\inf_{f\in F}\int_0^1 \left|f'(t) - f(t)\right| dt = e^{-1}$.

Sol :

Soit $f \in F$. Posons $g(t) = \mathrm{e}^{-t} f(t)$.

On a $g'(t) = \big(f'(t) - f(t)\big)\,\mathrm{e}^{-t}$, donc

$$\int_0^1 \big(f'(t) - f(t)\big)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = [g(t)]_0^1 = \mathrm{e}^{-1}$$

On peut donc écrire :

$\mathrm{e}^{-1} \leqslant \int_0^1 \left|f'(t) - f(t)\right| \mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t \overset{(\star)}{\leqslant} \int_0^1 \left|f'(t) - f(t)\right| \mathrm{d}t.$

Par l'absurde, on suppose que $(\star)$ est une égalité.

Alors : $\forall t \in [0,1], \left|f'(t) - f(t)\right| \left(1 - \mathrm{e}^{-t}\right) = 0.$

Il en résulte $f' = f$ (donc g constante) sur $[0,1]$.

Mais c'est absurde car $g(1) = \mathrm{e}^{-1}$ et $g(0) = 0$.

On va former une suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ de F telle que :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \left|f_n'(t) - f_n(t)\right| \mathrm{d}t = \frac{1}{\mathrm{e}}$$

Trouver f_n, c'est trouver $g_n : t \mapsto f_n(t)\mathrm{e}^{-t}$.

La fonction g_n doit être $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Elle doit aussi vérifier $g_n(0) = 0$ et $g_n(1) = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

On a alors : $\forall t \in [0,1], g_n'(t) = \left(f_n'(t) - f_n(t)\right) \mathrm{e}^{-t}$.

On cherche g_n croissante pour avoir $f_n'(t) - f_n(t) \geqslant 0$.

Dans ces conditions :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left|f_n'(t) - f_n(t)\right| \mathrm{d}t &= \int_0^1 \left(f_n'(t) - f_n(t)\right) \mathrm{d}t \\ &= 1 - \int_0^1 g_n(t)\mathrm{e}^t\ \mathrm{d}t\end{aligned}$$

On maximise $\displaystyle\int_0^1 g_n(t)\mathrm{e}^t\ \mathrm{d}t$ avec les contraintes sur g_n.

On pose $g_n(t) = \dfrac{1}{\mathrm{e}}\left(1 - (1-t)^n\right)$.

La fonction g_n est $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, croissante.

Enfin, elle vérifie bien $g_n(0) = 0$ et $g_n(1) = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

On a alors :

$$\int_0^1 \left|f_n'(t) - f_n(t)\right| \mathrm{d}t = 1 - \int_0^1 \left(1 - (1-t)^n\right) \mathrm{e}^{t-1}\ \mathrm{d}t \quad = \frac{1}{\mathrm{e}} + \int_0^1 (1-t)^n \mathrm{e}^{t-1}\ \mathrm{d}t$$

Or $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^1 (1-t)^n \mathrm{e}^{t-1}\,\mathrm{d}t = 0$ (majorer e^{t-1} par 1).

Donc $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^1 \left|f_n'(t) - f_n(t)\right|\mathrm{d}t = \frac{1}{\mathrm{e}}$(cqfd).

702. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $M_n(f) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

Montrer que $M_n(f) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t + \frac{f(1)-f(0)}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Sol :

Pour simplifier les notations, on pose $x_k = \dfrac{k}{n}$.

La fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ est $\mathcal{C}^3$ sur $[0,1]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on peut alors écrire :

$$\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = F(1) - F(0) = \sum_{k=0}^{n-1}\left(F\left(x_{k+1}\right) - F\left(x_k\right)\right)$$

Avec la formule de Taylor avec reste intégral, on a :

Rappel : $g(b) = g(a) + g'(a)((b-a)^1)/1! + 1/2(b-a)^2 g"(a) + 1/2.\displaystyle\int_a^b (b-t)^2 g'''(t)dt$.

$F\left(x_{k+1}\right) - F\left(x_k\right) = \dfrac{1}{n} f\left(x_k\right) + \dfrac{1}{2n^2} f'\left(x_k\right) + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}}\left(x_{k+1}-t\right)^2 f''(t)\mathrm{d}t.$

On obtient par sommation :

$\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = M_n(f) + \frac{1}{2n^2}\sum_{k=0}^{n-1} f'\left(x_k\right) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\left(x_{k+1}-t\right)^2 f''(t)\mathrm{d}t.$

La fonction f' étant continue sur $[0,1]$:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f'\left(x_k\right) = \int_0^1 f'(t)\mathrm{d}t = f(1) - f(0)$$

Ainsi : $\dfrac{1}{2n^2}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f'\left(x_k\right) = \frac{f(1)-f(0)}{2n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$.

Soit $M = \sup\limits_{[0,1]}\left|f''\right|$. On a la majoration :

$\left|\displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}}\left(x_{k+1}-t\right)^2 f''(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant M\int_{x_k}^{x_{k+1}}\left(x_{k+1}-t\right)^2\,\mathrm{d}t = \frac{M}{3n^3}.$

Ainsi : $\displaystyle\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}(x_{k+1}-t)^2 f''(t)\mathrm{d}t=\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Finalement, on a obtenu :

$$\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = M_n(f)+\frac{f(1)-f(0)}{2n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

Remarque : posons $\displaystyle M_n'(f)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

On a $\displaystyle M_n'(f)=M_n(f)+\frac{f(1)-f(0)}{n}$.

On peut alors écrire :

$$M_n'(f)=\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t+\frac{f(1)-f(0)}{2n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

703. Soit $y\in\mathbb{R}$. Calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^2y^2)}$.

Sol : voir 704.

704. Soit $y\in\mathbb{R}$. Justifier l'existence et calculer $\displaystyle I(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+ixy)}$.

Sol :

Posons $\displaystyle f(x,y)=\frac{1}{(1+x^2)(1+ixy)}$. Ainsi $\displaystyle F(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x$.

Les fonctions $\left\{\begin{array}{l} x\mapsto f(x,y)\\ y\mapsto f(x,y)\end{array}\right.$ sont continues sur $\mathbb{R}$.

De plus $\displaystyle 0\leqslant |f(x,y)|\leqslant\varphi(x)=\frac{1}{1+x^2}$.

La fonction φ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Ainsi F est continue sur $\mathbb{R}$, et on a :

$$F(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^2y^2)}-iy\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\ \mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^2y^2)}.$$

La deuxième intégrale est nulle par imparité.

$$\text{Ainsi}\ \ F(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)\mathrm{d}x,\ \text{où}\ g(x,y)=\frac{1}{(1+x^2)(1+x^2y^2)}.$$

(en particulier F est à valeurs réelles, et paire).

On va calculer $F(y)$ pour $y > 0$ et $y \neq 1$.

On trouve la décomposition :

$g(x,y) = \dfrac{a(y)}{1+x^2} + \dfrac{b(y)}{1+x^2y^2}$ avec $a(y) = \dfrac{1}{1-y^2}$ et $b(y) = -\dfrac{y^2}{1-y^2}$.

On en déduit :

$$\begin{aligned} F(y) &= a(y)\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} + b(y)\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2y^2} \\ &= \pi a(y) + \frac{b(y)}{y}[\arctan(yx)]_{-\infty}^{+\infty} = \pi a(y) + \pi\frac{b(y)}{y} \end{aligned}$$

On trouve donc, pour tout $y \in \mathbb{R}^{+*}\backslash\{1\}$:

$$F(y) = \frac{\pi - \pi y}{1-y^2} = \frac{\pi}{1+y}$$

Par continuité, ce résultat est valable sur $\mathbb{R}^+$.

La fonction F étant paire, on obtient : $\forall y \in \mathbb{R}, F(y) = \dfrac{\pi}{1+|y|}$.

705. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$. Étudier la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\exp\left(\frac{\sin^2 t}{t^\alpha}\right) - 1\right) \mathrm{d}t$.

Sol : Posons $f_\alpha(t) = \exp\left(\dfrac{\sin^2 t}{t^\alpha}\right) - 1$.

Pour tout réel α, f_α est continue positive sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Étude sur $]0,1]$: on note que : $\dfrac{\sin^2 t}{t^\alpha} \overset{0}{\sim} t^{2-\alpha}$.

Si $\alpha \leqslant 2, f_\alpha$ a une limite finie en 0 .

Dans ce cas, J_α est faussement impropre en 0.

Si $\alpha > 2$, alors au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned} f_\alpha(t) &\overset{0}{\sim} \exp\left(\frac{\sin^2 t}{t^\alpha}\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{t^{\alpha-2}} + o\left(\frac{1}{t^{\alpha-2}}\right)\right) = h(t) \end{aligned}$$

Mais $\dfrac{1}{t^{\alpha-2}} + o\left(\dfrac{1}{t^{\alpha-2}}\right) + \ln t \overset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{t^{\alpha-2}}$.

On en déduit :

$$h(t)t = \exp\left(\frac{1}{t^{\alpha-2}} + o\left(\frac{1}{t^{\alpha-2}}\right) + \ln t\right) \overset{t\to 0}{\to} +\infty$$

Ainsi $\lim\limits_{t\to 0^+} tf_\alpha(t) = +\infty$.

Alors $\displaystyle\int_0^1 f_\alpha(t)\mathrm{d}t$ diverge, donc J_αn 'existe pas.

Étude sur $[1,+\infty[$, quand $\alpha > 0$:

On a : $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^\alpha} = 0$, donc :

$$f(t) \overset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\sin^2 t}{t^\alpha} = \frac{1}{t^\alpha} - \frac{\cos 2t}{t^\alpha}$$

Pour $x > 1$, on a :

$$\int_1^x \frac{\cos 2t}{t^\alpha}\mathrm{d}t = \left[\frac{-\sin 2t}{2t^\alpha}\right]_1^x - \frac{\alpha}{2}\int_1^x \frac{\sin 2t}{t^{\alpha+1}}\ \mathrm{d}t$$

Le terme entre crochets est de limite finie en $+\infty$.

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin 2t}{t^{\alpha+1}}\ \mathrm{d}t$ converge absolument car $\alpha + 1 > 1$.

On en déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2t}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ converge.

Ainsi $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_\alpha(t)\mathrm{d}t$ a même nature que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$.

Elle converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Étude sur $[1,+\infty[$, dans le cas $\alpha \leqslant 0$:

On rappelle que : $\forall u \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^u - 1 \geqslant u$. Ainsi :

$\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f_\alpha(t)\mathrm{d} \geqslant \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin^2 t}{t^\alpha}\mathrm{d}t \geqslant \int_{\pi/4+k\pi}^{3\pi/4+k\pi} \frac{\sin^2 t}{t^\alpha}\mathrm{d}t \geqslant \frac{\pi}{4}\frac{1}{(\pi/4+k\pi)^\alpha}$.

(qui ne tend pas vers 0 quand $k \to +\infty$).

Si $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_\alpha(t)\mathrm{d}t$ convergeait, on aurait :

$$\lim_{k\to+\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f_\alpha(t)\mathrm{d}t = 0$$

ce qui n'est pas.

Ainsi $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_\alpha(t)\mathrm{d}t$ diverge.

Conclusion : $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_\alpha(t)\mathrm{d}t$ converge $\Leftrightarrow 1 < \alpha \leqslant 2$.

706. Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

b) Établir que $g : t \mapsto \dfrac{\sin t - t}{t^2}$ est bornée sur $\mathbb{R}^{+*}$.

En déduire que $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\ln x$.

d) Montrer que f est intégrable sur R^{+*} et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f = \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u$.

Sol :

a) La fonction $f : t \mapsto \dfrac{\sin t}{t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Sur $[x, +\infty[$(avec $x > 0$), elle est dominée par $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$.

La fonction f donc est intégrable sur $[x, +\infty[$.

Ainsi la fonction F est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Pour tout $x > 0$, on a $F(x) = F(1) - \displaystyle\int_1^x f(t)\mathrm{d}t$.

Sur $\mathbb{R}^{+*}$, f est continue donc F est $\mathcal{C}^1$ avec :

$$\forall x > 0, F'(x) = -f(x) = -\frac{\sin x}{x^2}$$

b) La fonction g est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

On a $g(t) \overset{t\to 0}{\sim} -\dfrac{t}{6}$ donc $\displaystyle\lim_{t\to 0} g(t) = 0$.

D'autre part $\displaystyle\lim_{t\to +\infty} g(t) = 0$ donc g est bornée sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Posons $M = \displaystyle\sup_{x>0} |g(x)|$. Pour $x > 0$, on a :

$$\begin{aligned} F(x) &= F(1) - \int_1^x g(t)\mathrm{d}t + \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} \\ &= F(1) - \int_1^x g(t)\mathrm{d}t + \ln x \end{aligned}$$

Pour $0 < x < 1$ on a $\left|\int_1^x g(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant M(1-x) \leqslant M$.

Ainsi $F(x) \overset{0^+}{=} -\ln x + O(1)$, donc $F(x) \overset{0^+}{\sim} -\ln x$.

c) La fonction F est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Elle est donc intégrable sur tout segment de $\mathbb{R}^{+*}$.

On a $F(x) \overset{0^+}{\sim} -\ln x$, donc F est intégrable sur $]0,1]$.

Pour $x > 0$, en intégrant par parties :

$$\begin{aligned} F(x) &= \left[\frac{-\cos t}{t^2}\right]_x^{+\infty} + 2\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t^3}\ \mathrm{d}t \\ &= \frac{\cos x}{x^2} + 2\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t^3}\ \mathrm{d}t \end{aligned}$$

Mais $\left|\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t^3}\ \mathrm{d}t\right| \leqslant \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^3} = \frac{1}{2x^2}$.

Il en résulte $F(x) \overset{+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

Ainsi F est intégrable sur $[1,+\infty[$, donc sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Pour calculer $\int_0^{+\infty} F(x)\mathrm{d}x$, on procède par IPP.

On sait que $\lim\limits_{+\infty} xF(x) = 0 \lim\limits_{0} xF(x) = 0$, et on en déduit :

$\int_0^{+\infty} F(x)\mathrm{d}x = [xF(x)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} xF'(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\ \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$(classique).

707. Soit $\alpha \in [0,1[$ et $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+^*$ continue par morceaux

telle que $f(x+1)/f(x) \to \alpha$ lorsque $x \to +\infty$.

Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Sol :

Il suffit de montrer que $x \mapsto \int_A^x f(x)\mathrm{d}x$ est majorée.

Soit $\mu \in]\alpha, 1[$. Il existe $A > 0$ tel que :

$$\forall x \geqslant A, 0 \leqslant \frac{f(x+1)}{f(x)} \leqslant \mu$$

Par une récurrence facile :

$$\forall x \geqslant A, f(x+k) \leqslant \mu^k f(x)$$

et on en déduit :

$$\begin{aligned}\int_A^{A+n} f(x)\mathrm{d}x &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{A+k}^{A+k+1} f(x)\mathrm{d}x \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_A^{A+1} f(x+k)\mathrm{d}x \\ &\leqslant \left(\sum_{k=0}^{n-1} \mu^k\right) \int_A^{A+1} f(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$\leqslant \frac{1}{1-\mu} \int_A^{A+1} f(x)\mathrm{d}x$$

Ainsi la suite $n \mapsto \int_A^{A+n} f(x)\mathrm{d}x$ est majorée.

La fonction croissante $x \mapsto \int_A^x f(x)\mathrm{d}x$ est donc elle aussi majorée.

Il en résulte que la fonction f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

708.a) Montrer que l'intégrale $I = \int_1^{+\infty} e^{-x^2/2}\ \mathrm{d}x$ est convergente puis,

à l'aide d'une minoration usuelle de l'exponentielle, montrer que $I > 1/10$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique réel u_n

tel que $\int_{1/n}^{u_n} e^{-x^2/2}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{10\text{n}}$.

Montrer que la suite (u_n) est convergente.

c) Montrer que $\left(u_n - \frac{1}{n}\right) e^{-u_n^2/2} \leqslant \frac{1}{10n} \leqslant \left(u_n - \frac{1}{n}\right) e^{-1/2n^2}$.

En déduire un équivalent de u_n quand n tend vers l'infini.

709. Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \ln\left(1+e^{-nx}\right)$.

a) Déterminer le domaine de définition I de f.

b) Montrer que f est continue et strictement décroissante sur I.

c) Montrer que f admet en $+\infty$ une limite finie que l'on déterminera.

d) Trouver un équivalent de f en 0. On donne : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

Sol 709.

1. $t \mapsto f_n(x) = \ln(1+e^{-nx})$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Elle est à valeurs strictement positives.

Pour $x < 0$ on a $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = +\infty$.

On a $f_n(0) = \ln(2)$ pour tout n.

La série $\sum f_n(x)$ est donc grossièrement divergente pour $x \leqslant 0$.

Pour $x > 0$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 < f_n(x) \leqslant \left(\mathrm{e}^{-x}\right)^n$$

(terme général série convergente).

Ainsi la fonction f est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.

2. Comme chaque f_n pour $n \geqslant 1$, la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Pour $a > 0$, on a $\sup_{x\geqslant a} |f_n(x)| = f_n(a)$ (c'est le terme général d'une série convergente).

Ainsi $\sum f_n$ est CVU sur $[a, +\infty[(a > 0)$.

La continuité de f sur $\mathbb{R}^{+*}$ en résulte.

3. On note que $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$ pour $n \geqslant 1$.

Mais f_0 est constante en $\ln(2)$.

La CVU autorise le théorème de la double limite.

On a donc : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \to +\infty} f_n(x) = \ln(2)$.

La fonction f, décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, a une limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ quand $x \to 0^+$.

Par l'absurde, supposons $\ell \in \mathbb{R}$.

Alors, pour tous $x > 0$ et $N \in \mathbb{N}$:

$$0 < \sum_{n=0}^{N} f_n(x) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \leqslant \ell$$

Quand $x \to 0$, on trouve : $\forall N \in \mathbb{N}, 0 < \sum_{n=0}^{N} \ln(2) \leqslant \ell$, ce qui est absurde.

Ainsi $\lim_{x \to 0+} f(x) = +\infty$.

4. Pour $x > 0, g_x : t \mapsto \ln\left(1 + e^{-xt}\right)$ est continue, décroissante positive sur $[0, +\infty[$.

Par comparaison série-intégrale, on obtient :

$$\int_0^{n+1} g_x(t)\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=0}^{n} g_x(k) \leqslant g_x(0) + \int_0^n g_x(t)\mathrm{d}t$$

Le changement de variable $u = \mathrm{e}^{-nx}$ conduit à :

$$\int_0^n g_x(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{x} \int_{\mathrm{e}^{-nz}}^{1} \frac{\ln(1+u)}{u} \mathrm{~d}u$$

On en déduit les inégalités, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{x} \int_{\mathrm{e}^{-(n+1)x}}^{1} \frac{\ln(1+u)}{u} \mathrm{~d}u \\
&\quad \leqslant \sum_{k=0}^{n} g_x(k) = \sum_{k=0}^{n} \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-kx}\right) \\
&\quad \leqslant g_x(0) + \frac{1}{x} \int_{\mathrm{e}^{-nx}}^{1} \frac{\ln(1+u)}{u} \mathrm{~d}u \quad (\star)
\end{aligned}$$

Or $u \mapsto \dfrac{\ln(1+u)}{u}$ est continue sur $]0, 1]$.

D'autre part $\lim_{u \to 0} \dfrac{\ln(1+u)}{u} = 1$.

Ainsi $u \mapsto \dfrac{\ln(1+u)}{u}$ est intégrable sur $]0,1]$.

Soit $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}\, \mathrm{d}u$.

Quand $n \to +\infty$ dans $(\star)$ on obtient :

$$\frac{J}{x} \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \ln\left(1+\mathrm{e}^{-kx}\right) = f(x) \leqslant \ln 2 + \frac{J}{x}$$

On multiplie $x > 0$.

Quand $x \to 0^+$on obtient : $\lim\limits_{x\to 0} x f(x) = J$.

Ainsi $f(x) \overset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}\, \mathrm{d}u$.

Par ailleurs, on a (sous réserve d'interversion) :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}\, \mathrm{d}u &= \int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}\frac{u^{n-1}}{n}\, \mathrm{d}u \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \int_0^1 \frac{u^{n-1}}{n}\, \mathrm{d}u \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}\end{aligned}$$

L'interversion est justifiée car $\sum (-1)^{n-1}\dfrac{u^{n-1}}{n}$ est uniformément convergente sur $[0,1]$.

En effet, avec le théorème des séries alternées :

$$\left|\sum_{n=N+1}^{+\infty} (-1)^{n-1}\frac{u^{n-1}}{n}\right| \leqslant \frac{u^N}{N+1} \leqslant \frac{1}{N+1}$$

En conclusion : $f(x) \sim \dfrac{\pi^2}{12x}$ quand $x \to 0$.

710. a) Montrer que la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+n^2x}$ est définie et dérivable sur $]0,+\infty[$.

b) Trouver les limites de f en 0 et en $+\infty$, puis des équivalents de f en 0 et en $+\infty$.

Sol :

On pose $f_n(x) = \dfrac{1}{n(nx+1)}$.

Les f_n sont définies et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ (au moins).

On a $f_n(0) = \dfrac{1}{n}$ (terme général série DV).

Si $x > 0, f_n(x) \sim \dfrac{1}{n^2 x}$ (terme général série CV).

La somme f est donc définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Par ailleurs $f_n'(x) = -\dfrac{1}{(nx+1)^2}$.

- Pour $a > 0$, on trouve :

$$\sup_{x \geqslant a} \left|f_n'(x)\right| = \left|f_n'(a)\right| = \frac{1}{(na+1)^2}$$

(terme général série convergente).

Ainsi $\sum f_n'$ converge normalement donc uniformément sur $[a, +\infty[$.

Par le thm de dérivation des séries de fonctions, f est $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ (pour tout $a > 0$).

Il en résulte que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ (caractère local de la dérivabilité). Plus précisément :

$$\forall x > 0, f'(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(nx+1)^2}$$

Soit $x > 0$. Posons $h(t) = \dfrac{1}{t(1+tx)}$.

La fonction h est continue et décroissante sur $[1, +\infty[$.

Par comparaison série-intégrale, on a :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(1+tx)} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{1+x^2} + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(1+tx)}$$

On trouve ensuite :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t(1+tx)} \mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t} - \frac{x}{1+tx}\right) \mathrm{d}t = \left[\ln\left(\frac{t}{tx+1}\right)\right]_1^{+\infty} = -\ln(x) + \ln(1+x).$$

Ainsi, pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} &-\ln(x) + \ln(1+x) \leqslant f(x) \\ &\leqslant -\ln(x) + \ln(1+x) + \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

donc $f(x) \overset{0}{\sim} -\ln x$.

Posons $x \mapsto g_n(x) = xf_n(x) = \dfrac{x}{n(nx+1)}$.

g_n est positive croissante, majorée par $\dfrac{1}{n^2}$.

Il y a donc convergence uniforme de $\sum g_n(x)$ et le théorème de la double limite donne

$$\lim_{x\to+\infty} xf(x) = \lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(nx+1)}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{n(nx+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Ainsi $\lim\limits_{+\infty} xf(x) = \dfrac{\pi^2}{6}$, c'est-à-dire $f(x) \overset{+\infty}{\sim} \dfrac{\pi^2}{6x}$.

Sur $[0,2]$, on trace $\sum\limits_{n=0}^{2} f_n$ (tirets), $\sum\limits_{n=0}^{5} f_n$ (pointillés) et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ (trait plein) : ?

711. Soit $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \dfrac{e^x}{4} + \dfrac{3e^{-x}}{4} + \dfrac{xe^x}{2}$.

a) Justifier que f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

b) On note alors $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 2, a_n \neq 0$ et que $\dfrac{1}{a_n} \in \mathbb{N}$.

712. Déterminer le rayon de convergence puis calculer la somme de la série entière

$\sum \dfrac{x^n}{(2n)!}$ en discutant selon le signe de x.

713. On considère la suite $(a_n)_n$ définie par $a_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n t \ \mathrm{dt}$.

a) Étudier les variations de la suite $(a_n)_n$ puis sa limite.

b) Déterminer une relation de récurrence entre a_{n+1} et a_{n-1}.

c) Justifier la convergence de la série de terme général $(-1)^n a_n$

d) Montrer que la série entìre de coefficient a_n a un rayon de convergence supérieur

ou égal à 1 puis montrer que la somme de cette série est solution de l 'équation différentielle $\left(1-x^2\right) y' - xy = 1$.

Sol :

La suite (a_n) tend vers 0 (classique) TCD.

Elle décroit par calcul de la différence.

b) IPP classique de première année.

c) On a tout pour le TSSA.

Le rayon R vérifie (a_n) tend vers 0... donc $R \geqslant 1$.

Sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ on a $\cos(t) \geqslant 1 - \frac{2}{\pi}t$, donc :

$$a_n \geqslant \int_0^{\pi/2} \left(1 - \frac{2}{\pi}t\right)^n \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2(n+1)}$$

Ainsi $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ diverge, donc $R = 1$.

Pour $|x| < 1$ (interversion justifiée par CVN) :

Oui car 1)segment 2) $|x.\cos(t)|^n \leqslant x^n$, géom à x fixé.

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n &= \int_0^{\pi/2} \sum_{n=0}^{+\infty} (x\cos t)^n \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{1 - x\cos t}\end{aligned}$$

Enfin, avec $u = \tan\frac{t}{2}$ puis $v = u\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$:

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{1 - x\cos t} = \int_0^1 \frac{2\,\mathrm{d}u}{(1+u^2) - x\left(1-u^2\right)}$
$= \int_0^1 \frac{2\,\mathrm{d}u}{(1-x) + (1+x)u^2} = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \arctan\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

d) Plus malin en cours, méthode de la série entière ds l'équa diff, on retouve b)

et on regarde la condition initiale en 0 ...

714.a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note p_n le nombre de partitions de $\{1, \ldots, n\}$.

On pose $p_0 = 0$.

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, p_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p_k$.

b) Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{p_n}{n!} x^n$

est supérieur ou égal a 1.

c) Calculer la somme de cette série entière.

715. a) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière de coefficients $(-1)^n \ln(n)$.

b) On note S la somme de cette série, Calculer $(x+1)S(x)$.

c) En déduire que S admet une limite finie en R que l'on calculera.

716. Une involution d'un ensemble X est une application $f : X \to X$ telle que $f \circ f(x) = x$

pour tout $x \in X$. On note I_n le nombre d'involations de $[\![1, n]\!]$.

a) Calculer I_1, I_2, I_3.

b) Montrer que, pour tout $n, I_{n+2} = I_{n+1} + (n+1)I_n$.

Que peut-on en déduire sur le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{I_n}{n!} x^n$?.

c) On note $S(x)$ la somme de cette série entière.

Calculer $(1+x)S(x)$ puis en déduire une expression de I_n sous forme de somme.

Sol :

On pose $X = X_n = \{1, 2, \ldots, n\}$.

1. On a $I_1 = 1, I_2 = 2$ et $I_3 = 4$ (les involutions de X_3 sont Id et les trois transpositions).

Soit à former une involution σ de X_{n+1}.

- Premier cas : $\sigma(n+1) = n+1$.

Il reste alors à définir la restriction σ' de σ à X_n.

Mais σ' doit être une involution de X_n, ce qui laisse I_n possibilités.

- Deuxième cas : $\sigma(n+1) = k < n+1$.

Ainsi σ échange k et $n+1$.

Il y a n façons de choisir cet entier k.

La restriction de σ à $Y_{n-1} = X_{n+1} \backslash \{k, n+1\}$ doit alors être une des I_{n-1} involutions de Y_{n-1}.

Ce dénombrement conduit donc à la relation :

$$\forall n \geqslant 1, I_{n+1} = I_n + nI_{n-1}$$

2. Les involutions de X_n sont des bijections.

On a donc toujours $I_n \leqslant n!$.

Ainsi $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{I_n}{n!} x^n$ est de rayon $R \geqslant 1$.

3. Sur $]-R, R[$, on note que :

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{I_n}{(n-1)!} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{I_{n+1}}{n!} x^n$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
(1+x)S(x) &= (1+x) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{I_n}{n!} x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{I_n}{n!} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{I_{n-1}}{(n-1)!} x^n \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{I_n + nI_{n-1}}{n!} x^n \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{I_{n+1}}{n!} x^n = S'(x)
\end{aligned}$$

La fonction $x \mapsto S(x)$ est donc la solution de $y' = (1+x)y$ telle que $S(0) = 1$.

On en déduit :

$$\begin{aligned}
S(x) &= \exp\left(x + \frac{x^2}{2}\right) \\
&= \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^j}{j!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{2^k k!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{I_n}{n!} x^n
\end{aligned}$$

Finalement, on trouve :

$$I_n = \sum_{j+2k=n} \frac{n!}{2^k j!k!} = \sum_{k=0}^{n/2} \frac{n!}{2^k (n-2k)!k!}$$

717. Soient $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \cdots + \frac{1}{n}\right) x^n$ et $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n) x^n$.

a) Donner le rayon de convergence de f puis calculer $f(x)$.

b) Donner le rayon de convergence de g.

c) Montrer que $f(x) \sim g(x)$ quand $x \to 1$.

d) Montrer que $g(x)$ converge quand $x \to -1$ Ind. Considérer $(1-x)g(x)$.

Sol : a) On sait que $H_n \sim \ln n$, donc f, g ont même rayon R.

Posons $u_n(x) = \ln(n) x^n$, pour $x \neq 0$.

Alors $\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} |x| \overset{n \to +\infty}{\sim} |x|$.

Donc $\sum_{n \geqslant 1} u_n(x)$CV si $|x| < 1$, et DV si $|x| > 1$.

Le rayon de convergence de f et g est donc $R = 1$.

Par produit de Cauchy, pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = -\frac{\ln(1-x)}{1-x}$$

b) Soit $\varepsilon > 0$. Il existe n_0 tel que :

$$\forall n > n_0, |\ln n - H_n| \leqslant \varepsilon H_n$$

Ainsi, pour tout $x \in [0, 1[$:

$$|g(x) - f(x)| \leqslant \sum_{n=0}^{n_0} |\ln n - H_n| \, x^n + \varepsilon \sum_{n > n_0} H_n x^n \leqslant \sum_{n=0}^{n_0} |\ln n - H_n| + \varepsilon f(x).$$

On en déduit :

$$\left|\frac{g(x)}{f(x)}-1\right| \leqslant \frac{1}{f(x)}\left(\sum_{n=0}^{n_0}|\ln n - H_n|\right)+\varepsilon$$

Or $\dfrac{1}{f(x)} = -\dfrac{1-x}{\ln(1-x)} \overset{1^-}{\to} 0$.

Il existe donc $\alpha \in]0,1[$ tel que :

$$\forall x \in \left[1-\alpha, 1\right[, \left|\frac{g(x)}{f(x)}-1\right| \leqslant 2\varepsilon$$

Ainsi : $f(x) \overset{x\to 1^-}{\sim} g(x)$.

c) Sur $]-1,0[$, on a :

$$(1-x)g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\ln(n)x^n - \sum_{n=2}^{+\infty}\ln(n-1)x^n = \sum_{n=2}^{+\infty}u_n(x) \text{ où } u_n(x) = \ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right)x^n.$$

Sur $]-1,0\,[$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}u_n(x)$ obéit aux hypothèses du théorème spécial des séries alternées, donc converge.

Pour $n \geqslant 2$, on a alors :

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}u_k(x)\right| \leqslant |u_{n+1}(x)| \leqslant \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \overset{+\infty}{\to} 0$$

Ainsi $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}u_n(x)$ converge uniformément sur $]-1,0]$.

De plus $\displaystyle\lim_{x\to -1}u_n(x) = (-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right)$.

Par le théorème de la double limite, on en déduit :

$$\lim_{x\to -1}(1-x)g(x) = \sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right)$$

II suffit de trouver la limite de

$$N \mapsto S_{2N} = \sum_{n=2}^{2N}(-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right)$$

On trouve :

$$S_{2N} = \sum_{n=1}^{N} \ln \frac{2n}{2n-1} - \sum_{n=1}^{N-1} \ln \frac{2n+1}{2n} = \ln \frac{\left(2^{4N}\right)(N!)^4}{(2N)!(2N+1)!} \sim \ln\left(\frac{N\pi}{(2N+1)}\right) \sim \ln\frac{\pi}{2}.$$

(on a utilisé l'équivalent de Stirling).

On en déduit finalement : $\lim\limits_{x \to -1} g(x) = \ln \dfrac{\pi}{2}$.

718. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On pose $g(x) = \displaystyle\int_0^1 f(xt)\ln(t)\ \mathrm{d}t$.

a) Monter que g est définie sar $\mathbb{R}$ et calculer $g(0)$.

b) Monter que g est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer $g'(0)$.

Sol : Soit h définie sur $\mathbb{R}\times]0,1]$ par : $h(x,t) = f(xt)\ln t$.

Soit x un réel quelconque.

La fonction $t \mapsto h_x(t) = h(x,t)$ est continue sur $]0,1]$.

Elle est dominée par $\ln t$ en 0 (car f est continue donc bornée au voisinage de 0).

Ainsi h_x est intégrable sur $]0,1]$.

En déduit que g est définie sur $\mathbb{R}$.

En particulier : $g(0) = f(0)\displaystyle\int_0^1 \ln t\ \mathrm{d}t = -f(0)$.

Pour $t \in]0,1], x \mapsto h(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

De plus $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t) = tf'(xt)\ln t$.

Soit $a > 0$, et $M_a = \sup\limits_{[-a,a]} \left|f'\right|$.

Pour $x \in [-a,a]$ et $t \in [0,1]$, on a :

$$\left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant t|\ln t|M_a \leqslant \frac{M_a}{\mathrm{e}}$$

Le théorème de dérivabilité des intégrales à paramètres s'applique. Ainsi :

$$g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \text{ et } g'(x) = \int_0^1 tf'(xt)\ln t\ \mathrm{d}t$$

En particulier,

$$\begin{aligned} g'(0) &= f'(0)\int_0^1 t\ln t \, \mathrm{d}t \\ &= f'(0)\left(\left[\frac{t^2}{2}\ln t\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t}{2}\, \mathrm{d}t\right) = -\frac{f'(0)}{4} \end{aligned}$$

719. On pose, pour tout réel $x > 1, F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\frac{\operatorname{sh} t}{t}\, \mathrm{d}t$.

a) Vérifier que la fonction F est bien définie.

b) Déterminer le comportement asymptotique de F en $+\infty$.

c) Calculer $F(x)$.

Sol : 719

$\boldsymbol{f} : (x,t) \mapsto e^{-xt}\dfrac{\operatorname{sh}t}{t}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]1,+\infty\,[\times\mathbb{R}^{+*}$

On se donne x dans $]1,+\infty[$.

$t \mapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}^+($ avec $f(0) = 1)$.

Pour tout $t \geqslant 1$, on a :

$$0 \leqslant e^{-xt}\frac{\operatorname{sh} t}{t} \leqslant \frac{1}{2t}e^{-(x-1)t}$$

Par domination, f_x est donc intégrable sur $[1,+\infty[$.

En conséquence, F est bien définie sur $]1,+\infty[$.

On va montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$.

Pour cela, soit (x_n) une suite de $[2,+\infty[$.

On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.

Il s'agit de montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} F\left(x_n\right) = 0$.

On définit les fonctions $f_n : t \mapsto f\left(x_n, t\right)$.

Ainsi $F\left(x_n\right) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t$.

Chaque f_n est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, et (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^{+*}$ vers la fonction nulle.

La suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t > 0$, on a :

$$0 \leqslant f_n(t) \leqslant e^{-2t} \frac{\operatorname{sh} t}{t}$$

(fonction intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$).

Ainsi $\lim_{n \to +\infty} F(x_n) = 0$ (convergence dominée).

Donc $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 0$ (caractérisation séquentielle).

- On en vient au calcul de F par une première méthode.

On va montrer que F est $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$.

Ensuite on calculera $F'(x)$ pour en déduire $F(x)$.

Pour $x > 1, f_x : t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Pour $t > 0, x \mapsto f(x,t)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$.

De plus $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -e^{-xt}\operatorname{sh} t$.

On se donne $a > 1$. Pour $x \geqslant a$ et $t > 0$, on a :

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \right| \leqslant \mathrm{e}^{-at} \operatorname{sh}(t) \leqslant \frac{1}{2} \mathrm{e}^{-(a-1)t}$$

(intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$).

Le théorème de dérivabilité d'une intégrale à paramètre s'applique.

Donc F est $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$ et :

$$\begin{aligned} F'(x) &= -\int_0^{+\infty} e^{-xt} \operatorname{sh} t \, \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \left(e^{-t(1+x)} - e^{t(1-x)} \right) \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{e^{-t(1+x)}}{-(1+x)} - \frac{e^{t(1-x)}}{(1-x)} \right]_0^{+\infty} \end{aligned}$$

On trouve donc $F'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$.

Ainsi $F(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$

- Deuxième méthode, avec le DSE de $t \mapsto \text{sh}t$:

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(t)\mathrm{d}t \text{ où } g_n(t) = \frac{e^{-xt}t^{2n}}{(2n+1)!}$$

Chaque g_n est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

De plus $\sum\limits_{n\geqslant 0} g_n$ est CVS sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Sa somme $t \mapsto e^{-xt}\dfrac{\text{sh}t}{t}$ est cpm sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons :

$$\begin{aligned} J_n &= \int_0^{+\infty} |g_n(t)|\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{(2n+1)!}\int_0^{+\infty} e^{-xt}t^{2n}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Le changement de variable $u = xt$ (recevable ?) donne :

$$\begin{aligned} J_n &= \frac{1}{(2n+1)!}\frac{1}{x^{2n+1}}\int_0^{+\infty} e^{-u}u^{2n}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{(2n+1)x^{2n+1}} \leqslant \frac{1}{x^{2n+1}} \end{aligned}$$

Sachant $x > 1$, la série $\sum \displaystyle\int_0^{+\infty} |g_n(t)|\,\mathrm{d}t$ converge.

Le théorème d'intégration terme à terme donne :

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} g_n(t)\mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)x^{2n+1}} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \end{aligned}$$

On en déduit par équivalent de première année que $F \underset{\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$.

Rq : pour Clément L : cet équivalent se trouve assez facilement par IPP.

$u' = e^{-xt}$, le crochet est convergent et vaut $\dfrac{1}{x}$.

Le morceau restant est de type $\frac{1}{x}o(1)$, pour les mêmes raisons que $F \to 0$.

720. Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+t^x)}$.

a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}^+$. Calculer $f(0)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Calculer $f(x)$.

Sol :

a) Pour $x \geqslant 0$, posons $f_x(t) = \frac{1}{(1+t^2)(1+t^x)}$.

La fonction f_x est continue positive sur $\mathbb{R}^+$.

On a : $0 \leqslant f_x(t) \leqslant \frac{1}{1+t^2}$ (intégrable sur $\mathbb{R}^+$).

Ainsi f_x est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Cela assure l'existence de $F(x)$ pour $x \geqslant 0$.

b) On a bien sur $F(0) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}$.

Soit (x_n) une suite de $\mathbb{R}^+$, tendant vers $+\infty$.

On pose $g_n(t) = \frac{1}{(1+t^2)(1+t^{x_n})}$.

La suite (g_n) est CVS sur $\mathbb{R}^+$ vers g, où :

$$g(t) = \frac{1}{1+t^2} \text{ sur } [0,1[, g(t) = 0 \text{ si } t > 1$$

On a $0 \leqslant g_n(t) \leqslant \varphi(t)$ (intégrable sur $\mathbb{R}^+$).

Le théorème de convergence dominée s'applique :

$$\lim_{+\infty} \int_0^{+\infty} g_n(t)\mathrm{d}t = \lim_{+\infty} F(x_n) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}$$

Ainsi $\lim_{x\to+\infty} F(x) = \frac{\pi}{4}$ (caractérisation séquentielle).

c) En fait on va voir que F est constante.

On effectue le changement de variable $u = \frac{1}{t}$. (Recevable) ? On trouve :

$$\begin{aligned}F(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{(u^2+1)(1+u^{-x})} \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{u^x\ \mathrm{d}u}{(u^2+1)(u^x+1)} \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} - F(x)\end{aligned}$$

Autrement dit $2F(x) = \dfrac{\pi}{2}$, donc $F(x) = \dfrac{\pi}{4}$.

721. On considère les fonctions définies pour $x > 0$:

$f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2} dt, g : x \mapsto \left(\int_\alpha^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t\right)\cos x - \left(\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\ \mathrm{d}t\right)\sin x.$

a) Vérifier que les intégrales dans l'expression de g sont convergentes.

b) Montrer que f et g vérifient l ' équation différentielle : $y'' + y = \dfrac{1}{x}$.

c) Montrer que $f = g$ et établir l'égalité $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$.

Sol :

a) C'est classique, après intégration par partie.

b) f est définie sur $\mathbb{R}^+$ et g est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.

$h(x,t) = \dfrac{e^{-tx}}{1+t^2}$ est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$.

De plus : $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t) = -\dfrac{t\mathrm{e}^{-tx}}{1+t^2}$.

Ensuite : $\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,t) = \dfrac{t^2\mathrm{e}^{-tx}}{1+t^2}$.

Pour $x > 0, t \mapsto \dfrac{e^{-tx}}{1+t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Pour $x > a > 0$, et $t > 0$, on a :

$$\left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| = \frac{t\mathrm{e}^{-tx}}{1+t^2} \leqslant \mathrm{e}^{-ta}.$$
$$\left|\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,t)\right| = \frac{t^2\mathrm{e}^{-tx}}{1+t^2} \leqslant \mathrm{e}^{-ta}.$$

Enfin, $t \mapsto \mathrm{e}^{-ta}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Donc f est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ avec :

$$f''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 \mathrm{e}^{-tx}}{1+t^2} \, \mathrm{d}t$$

Ainsi, pour tout $x > 0$:

$$f''(x) + f(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{x}$$

On pose $S(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, \mathrm{d}t$.

De même, soit $C(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t} \, \mathrm{d}t$.

Ainsi $g(x) = \cos(x)S(x) - \sin(x)C(x)$.

S est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ avec $S'(x) = -\dfrac{\sin x}{x}$.

C est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ avec $C'(x) = -\dfrac{\cos x}{x}$.

Ainsi g est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ avec :

$$g'(x) = -\sin(x)S(x) - \cos(x)C(x)$$

Elle est même $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ avec :

$$\begin{aligned} g''(x) &= \frac{1}{x} + \sin(x)C(x) - \cos(x)S(x) \\ &= \frac{1}{x} - g(x) \end{aligned}$$

Ainsi f et g vérifient $y'' + y = \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

c) La fonction $h = f - g$ vérifie $h'' + h = 0$.

Il existe donc : α, β tels que :

$\forall x > 0, h(x) = \alpha \cos x + \beta \sin x$ On a : $0 \leqslant f(x) \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{x}$.

Ainsi $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

De même $|g(x)| \leqslant |C(x)| + |S(x)|$.

Or $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} C(x) = \lim_{x \to +\infty} S(x) = 0$.

Donc $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$.

Ainsi $h = f - g$ tend vers 0 en $+\infty$.

Or h est 2π -périodique : nécessairement $h \equiv 0$.

d) On a : $|h(x,t)| \leqslant \dfrac{1}{1+t^2}$ (intégrable sur $\mathbb{R}^+$).

On en déduit que f(donc g) est continue sur $\mathbb{R}^+$.

En particulier :

$$\lim_{0^+} g = g(0) = f(0) \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} \, \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

Par ailleurs, on note que :

$$\begin{aligned} C(x) &= C(1) - \int_1^x \frac{\cos t}{t} \, \mathrm{d}t \\ &= C(1) - \int_1^x \frac{\cos t - 1}{t} \, \mathrm{d}t - \ln x \end{aligned}$$

La fonction $t \mapsto \dfrac{\cos t - 1}{t}$ est continue sur $[0,1]$ (prolongée en 0 par la valeur 0).

Ele est donc bornée sur $]0,1]$.

Il en résulte $C(x) \overset{0}{\sim} -\ln(x)$.

Ainsi $\lim_{x \to 0} \sin(x) C(x) = 0$.

Enfin $\lim_{x \to 0^+} \cos(x) S(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, \mathrm{d}t$.

On obtient donc $\lim_{x \to 0^+} g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, \mathrm{d}t$.

On retrouve la célèbre intégrale de Dirichlet :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

722. Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(tx) \mathrm{d}t$.

a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que f est solution d'une équation différentielle.

c) En déduire f.

sol exo 13 feuille8.

723. Soit $f : x \mapsto \int_0^1 \ln(t)\ln\left(1-t^x\right) \mathrm{dt}$.

a) Déterminer le domaine de définition de f.

b) Écrire f comme somme d'une série de fonctions.

c) Déterminer la limite de f en 0 .

Sol :

a) Fixons $x>0$. Posons $g_x(t)=\ln(t)\ln\left(1-t^x\right)$.

Pour $0<t<1$, on a $0<1-t^x<1$.

Ainsi g_x est continue sur $]0,1[$.

Par ailleurs $g_x(t) \overset{t\to 0}{\sim} -t^x\ln(t)$.

Ainsi $\lim_{t\to 0} g_x(t)=0$ (croissance comparée).

Ensuite $1-t^x \overset{t\to 1}{\sim} x(1-t)$.

Il en résulte : $\ln\left(1-t^x\right) \overset{t\to 1}{\sim} \ln(1-t)$.

Ainsi $g_x(t) \overset{t\to 1}{\sim} (t-1)\ln(1-t) \overset{t\to 1}{\to} 0$.

Donc g_x est continue sur $[0,1]$, ce qui assure l'existence de $f(x)$ pour $x>0$.

b) On sait que : $\ln(1-u)=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{u^k}{k}$ sur $]-1,1[$.

On en déduit :

$$\forall x>0, f(x)=-\int_0^1 \ln(t)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{t^{kx}}{k}\ \mathrm{d}t$$

Soit $u_n(x,t)=-\frac{1}{n}\ln(t)t^{nx}$ (fonction positive).

Avec ces notations :

$$\forall x > 0, f(x) = \int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x,t)\mathrm{d}t$$

Mais une intégration par partie donne :

$$\int_0^1 u_n(x,t)\mathrm{d}t = \left[-\frac{\ln(t)t^{nx+1}}{n(nx+1)}\right]_{t=0}^{t=1} + \frac{1}{n(nx+1)}\int_0^1 t^{nx}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{n(nx+1)^2}.$$

Donc, pour $x > 0, \sum \int_0^1 |u_n(x,t)|\,\mathrm{d}t$ converge.

On peut donc appliquer le théorème d'intégration terme à terme. Pour tout $x > 0$, on a

$$f(x) = \int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x,t)\mathrm{d}t \quad = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 u_n(x,t)\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(nx+1)^2}.$$

c) Posons $f_n(x) = \dfrac{1}{n(nx+1)^2}$.

Les f_n sont décroissantes sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Par sommation, il en est donc de même de f.

Ainsi f a une limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ quand $x \to 0^+$.

Par l'absurde, on suppose $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$.

Alors, pour $N \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$:

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(nx+1)^2} \leqslant f(x) \leqslant \ell$$

Dans la somme finie précédente, on peut faire tendre x vers 0^+. Il en résulte :

$$\forall N \geqslant 1, \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \leqslant f(x) \leqslant \ell$$

C'est contradictoire (divergence série harmonique).

En conclusion : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$.

724. Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-tx}}{1+t^2}\ \mathrm{d}t$.

a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Trouver un équivalent simple de f en $+\infty$.

c) Trouver un équivalent simple de f en 0 .

a) Posons $f(x,t) \mapsto \dfrac{1-e^{-tx}}{1+t^2}$.

On pose aussi $\varphi(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$ (intégrale sur R^+).

- Pour $x \geqslant 0, t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

- Pour $t \geqslant 0, x \mapsto f(x,t)$ est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^+$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{t\mathrm{e}^{-tx}}{1+t^2} \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x,t) = \frac{-t^2\mathrm{e}^{-tx}}{1+t^2}$$

- Pour $k \in \{1,2\} : \forall (x,t) \in \mathbb{R}^+, \left|\dfrac{\partial^k f}{\partial^k x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)$.

Par théorème de dérivabilité, F est donc $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

b) Soit (x_n) une suite de $\mathbb{R}^+$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.

On pose $g_n(t) = \dfrac{1-e^{-tx_n}}{1+t^2}$.

La suite (g_n) est CVS sur $\mathbb{R}^+$ vers (et dominée par) φ.

Ainsi $\lim\limits_{+\infty} xF(x) = \displaystyle\int_{t\geqslant 0} \varphi = \frac{\pi}{2}$ (convergence dominée).

Il en résulte : $F(x) \overset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2x}$.

c) Soit $x > 0$. Avec $u = tx$: $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-u}}{x^2+u^2}\, du$.

On découpe l'intégrale en deux :

$$F(x) = \int_0^1 \frac{1-e^{-u}}{x^2+u^2}\,\mathrm{d}u + \int_1^{+\infty} \frac{1-e^{-u}}{x^2+u^2}\,\mathrm{d}u$$

D'une part :

$$0 \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{1-e^{-u}}{x^2+u^2}\,\mathrm{d}u \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^2} = 1$$

Par convergence dominée, on a alors :

$$\lim_{x\to 0}\int_1^{+\infty}\frac{1-e^{-u}}{x^2+u^2}\ \mathrm{d}u=\int_1^{+\infty}\frac{1-e^{-u}}{u^2}\ \mathrm{d}u$$

D'autre part :

$$\int_0^1\frac{1-e^{-u}}{x^2+u^2}\ \mathrm{d}u \quad =\int_0^1\frac{1-u-e^{-u}}{x^2+u^2}\ \mathrm{d}u+\int_0^1\frac{u\ \mathrm{d}u}{x^2+u^2}.$$

$u\mapsto \dfrac{e^{-u}-1+u}{u^2}$ se prolonge en 0 par $\dfrac{1}{2}$.

Elle est donc intégrable sur $[0,1]$. Ainsi :

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1\frac{1-u-e^{-u}}{x^2+u^2}\ \mathrm{d}u\right| &= \int_0^1\frac{e^{-u}-1+u)}{x^2+u^2}\ \mathrm{d}u\\ &\leqslant \int_0^1\frac{e^{-u}-(1-u)}{u^2}\ \mathrm{d}u\end{aligned}$$

Enfin, on trouve :

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{u}{x^2+u^2}\ \mathrm{d}u &= \frac{1}{2}\left[\ln\left(x^2+u^2\right]_0^1\right.\\ &= \frac{1}{2}\left(\ln\left(x^2+1\right)-\ln x^2\right)\\ &= -\ln x+O(1)\end{aligned}$$

Conclusion : $F(x)\overset{x\to 0}{=}-\ln x+O(1)\overset{x\to 0}{\sim}-\ln(x)$.

725. Soient $\beta\in\mathbb{R}^{++}$ et $I_\beta : x\in\mathbb{R}\mapsto\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos(xt)e^{-\beta t}}{1+t^2}\ \mathrm{d}t$.

a) Montrer que I_β est de classe $\mathcal{C}^2$ et que I_β est solution de l'équation différentielle (E) :

$y''-y=\dfrac{-\beta}{\beta^2+x^2}$.

Pour $x\in\mathbb{R}$, on pose : $F_\beta(x)=\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\beta e^{-t}}{\beta^2+t^2}\ \mathrm{d}t$ et $J_\beta(x)=\dfrac{1}{2}\left(e^xF_\beta(x)+e^{-x}F_\beta(-x)\right)$.

b) Montrer que J_β vérifie (E) puis que $J_\beta=I_\beta$.

c) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}F_{\frac{1}{n}}(x)=0$ si $x>0$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}F_{\frac{1}{n}}(0)=\frac{\pi}{2}$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}F_2(x)=\pi$ si $x<0$

726. Soit $f : x\mapsto\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\arctan(tx)}{t\left(t^2+1\right)}\mathrm{d}t$.

a) Déterminer le domaine de définition de f puis montrer que f est impaire.

b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.

c) Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,0,1\}$. Trouver des réels a et b pour que, pour tout $T>0$,

$$\frac{1}{(1+T)\left(1+x^2 T\right)}=\frac{a}{1+T}+\frac{b}{1+x^2 T}.$$

En déduire $f'(x)$ pour tout $x \geqslant 0$.

d) Déterminer l'expression de $f(x)$.

727. Soit $a>1$ et $f: t \mapsto \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\left(t^2+x^2\right)^a}$.

a) Donner l'ensemble de définition D de f.

b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer sa dérivée.

c) Montrer que f est intégrable sur D.

Sol :

a) La fonction $f:(x, t) \mapsto \dfrac{1}{\left(x^2+t^2\right)^a}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x, t) \overset{t \rightarrow+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{2a}}$.

Comme $2a>1, F$ est définie sur $\mathbb{R}$.

On va utiliser ici la majoration $2|x| t \leqslant\left(x^2+t^2\right)$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\right|=\frac{2a|x|}{\left(x^2+t^2\right)^{a+1}} \leqslant \frac{a}{t\left(x^2+t^2\right)^a} \leqslant \frac{a}{t^{2a}} \text{ et } 2a>1.$$

Cette domination (uniforme en x) permet le thm de dérivation des intégrales à param.

Ainsi F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F'(x)=-\int_1^{+\infty} \frac{2ax \mathrm{~d}t}{\left(x^2+t^2\right)^{a+1}}$$

b) Pour tout réel x, on note que :

$$-xF'(x)=2aF(x)+\int_1^{+\infty} \frac{-2at^2 \mathrm{~d}t}{\left(x^2+t^2\right)^{a+1}}$$

On fait une IPP et on obtient :

$$\int_1^{+\infty} \frac{-2at^2}{(x^2+t^2)^{a+1}}\ \mathrm{d}t \quad = \left[\frac{t}{(x^2+t^2)^{-a}}\right]_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(x^2+t^2)^a} \quad = -\frac{1}{(x^2+1)^a} - F(x).$$

Ainsi F vérifie l'équation différentielle :

$$\forall x \in \mathbb{R}, xF'(x) + (2a-1)F(x) = \frac{1}{(x^2+1)^a}$$

c) La fonction F est continue sur $\mathbb{R}$, et paire.

Il suffit de montrer que F est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Soit $x \geqslant 1$, le chgt de var $u = x/t$ est $\mathcal{C}^1$, stm décroissant de $[1, +\infty[$ sur $]0, x]$.

Ainsi : $F(x) = \dfrac{1}{x^{2a-1}} J_x$, avec :

$$J_x = \int_0^x \frac{u^{2a-2}}{1+u^{2a}}\ \mathrm{d}u \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{u^{2a-2}}{1+u^{2a}}\ \mathrm{d}u$$

Donc : $\forall x \geqslant 1, 0 \leqslant F(x) \leqslant \dfrac{J}{x^{2a-1}}$(avec $2a-1>1$).

Ainsi F est intégrable sur $[1, +\infty[$(donc sur $\mathbb{R}$).

728. a) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$. Montrer : $\displaystyle\frac{x}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{-\left(\frac{k\pi}{n}\right)^2} \leqslant \int_0^x e^{-t^2}\ \mathrm{d}t \leqslant \frac{x}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{-\left(\frac{k\pi}{n}\right)^2}$.

b) On considère $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-\left(1+t^2\right)x^2}}{1+t^2}\ \mathrm{d}t$.

Déterminer le domaine de définition et de dérivabilité de g puis montrer que

$g'(x) = -2e^{-x^2}\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\ \mathrm{d}t$.

c) En déduire $g(x)$ en fonction de $\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\ \mathrm{d}t$ puis calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

729. Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^x(t+1)} dt$.

a) Déterminer le domaine D de définition de f puis montrer que f est continue sur D.

b) Trouver une relation entre $f(x)$ et $f(1-x)$ pour $x \in D$.

c) Déterminer les limites et des équivalents de f aux bornes de D.

730. a) Soit $g :]0,+\infty[, x \mapsto \dfrac{1-\cos x}{x^2}$. Montrer que g est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

b) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(tx)}{t^2\left(1+t^2\right)}\mathrm{d}t$.

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$. Calculer $f(0)$ et $f'(0)$.

Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leqslant x^2$.

c) On pose $a = \displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t$.

Montrer que f est solution de l'équation différentielle :

$y'' - y = \dfrac{\pi}{2} - ax$.

d) En déduire que $a = \dfrac{\pi}{2}$ et que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{\pi}{2}\left(e^{-x} + x - 1\right)$.

Sol :

a) La fonction g est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

On a $g(x) \overset{0}{\sim} \dfrac{1}{2}$ et $g(x) \overset{+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

Ainsi g est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

b) Pour $x \in \mathbb{R}$ et $t > 0$, on pose

$$g(x,t) = \frac{1-\cos(tx)}{t^2\left(1+t^2\right)}$$

La fonction g est $\mathcal{C}^2$ avec :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \frac{t\sin(tx)}{t^2\left(1+t^2\right)} \text{ et } \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t) = \frac{\cos(tx)}{1+t^2}$$

Pour $x \in \mathbb{R}, g_x(t) = \dfrac{1-\cos(tx)}{t^2\left(1+t^2\right)}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

De plus $g_x(t) \overset{0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}, g_x(t) \overset{+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.

Ainsi g_x est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

On a : $\dfrac{\partial g}{\partial x} = \dfrac{t\sin(tx)}{t^2\left(1+t^2\right)}$ et $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \dfrac{t^2\cos(tx)}{t^2\left(1+t^2\right)}$.

Ces fonctions sont continues en x et continues par morceaux en t.

Pour $x \in \mathbb{R}, h_x : t \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

(limite x si $t \to 0$, et $\mathcal{O}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ si $t \to +\infty$).

- Pour $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$, on a :

$$\left|\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)$$

où $\varphi : t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Il en résulte que f est $\mathcal{C}^2$ avec :

$f'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\sin(tx)}{t^2(1+t^2)}\mathrm{d}t$ et $f''(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$

On note $f(0) = f'(0) = 0$.

Montrons que $f(x) \leqslant x^2$ sur $\mathbb{R}$.

Pour $u \in \mathbb{R}$, on a :

$$1 - \cos u = 2\sin^2\left(\frac{u}{2}\right) \leqslant 2\left(\frac{u}{2}\right)^2 = \frac{u^2}{2}$$

Ainsi : $\forall t > 0, \dfrac{1-\cos(tx)}{t^2(1+t^2)} \leqslant \dfrac{x^2}{2(1+t^2)}$.

Les intégrales étant convergentes, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{x^2\,\mathrm{d}t}{2(1+t^2)} = \frac{\pi x^2}{4} \leqslant x^2$$

c) Pour $x \in \mathbb{R}^*$, et avec le changement $u = tx$, on a :

$$\int_0^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(ux)}{xu^2}\,\mathrm{d}u$$

Ainsi, pour tout x (aussi en 0) :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(ux)}{u^2}\,\mathrm{d}u = x\int_0^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t$$

On peut donc écrire :

$$f''(x) - f(x) + x\int_0^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{t^2} - \frac{1-\cos(tx)}{t^2\,(1+t^2)} + \frac{1-\cos(tx)}{t^2} = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}.$$

La fonction f est donc solution sur $\mathbb{R}$ de :

$$y'' - y = \frac{\pi}{2} - x\int_0^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t(\star)$$

d) On rappelle que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} = \frac{\pi}{2}$.

On note que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\ \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} = \frac{\pi}{2}$$

En effet :

$$\int_a^b \frac{\sin t}{t} = \left[\frac{1-\cos t}{t}\right]_a^b + \int_a^b \frac{1-\cos t}{t^2}\ \mathrm{d}t$$

et on obtient le résultat quand $\begin{cases} a \to 0 \\ b \to +\infty \end{cases}$.

La fonction $h : x \mapsto \dfrac{\pi}{2}\left(e^{-x} + x - 1\right)$ est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et vérifie :

$h(0) = 0, h'(0) = 0h''(x) - h(x) = -\dfrac{\pi}{2}(x-1) = \dfrac{\pi}{2} - x\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t.$

Ainsi h et f sont deux solutions de $(\star)$ avec les mêmes conditions initiales.

Le théorème de Cauchy linéaire assure que $f = h$.

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{\pi}{2}\left(e^{-x} + x - 1\right)$.

731. Soit Γ la fonction de la variable réelle x définie par $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t$.

a) Donner le domaine de définition de Γ.

b) Donner un équivalent en $+\infty$ de $f(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} \ln(\Gamma(u))du$.

c) En déduire un équivalent en $+\infty$ de $\ln(\Gamma(x))$.

Sol :

a) C'est une question de cours !

La fonction $\gamma : t \mapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc intégrable sur tout segment de $\mathbb{R}^{+*}$.

On a $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2\gamma(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} t^{x+1}\mathrm{e}^{-t} = 0$.

Ainsi γ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Enfin on a $\gamma(t) \overset{t\to 0^+}{\sim} t^{x-1}$.

La fonction γ est donc intégrable sur $]0, 1]$ si et seulement si $x - 1 > -1$.

Conlusion : $\Gamma(x)$ est défini si et seulement si $x > 0$.

On rappelle les propriétés classiques suivantes :

D'une part, $\forall x > 0, \Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$.

D'autre part, Γ est croissante sur $[2, +\infty[$.

b) La fonction γ est continue et strictement positive sur $\mathbb{R}^{+*}$, donc Γ est à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$.

Ainsi $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^{x+1} \ln\Gamma(t)dt$ est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Soit $F(x) = \displaystyle\int_2^x \ln\Gamma(t)\mathrm{d}t$ pour $x \geqslant 2$

. On a : $\quad F(x + 1) = \int_2^{x+1} \ln\Gamma(t)\mathrm{d}t = \int_1^x \ln\Gamma(u + 1)\mathrm{d}u$.

Or $f(x) = F(x + 1) - F(x)$. Il en résulte :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \int_1^x \ln\Gamma(t+1)\mathrm{d}t - \int_2^x \ln\Gamma(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_1^x \ln\left(\frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t)}\right)\mathrm{d}t + \int_1^2 \ln\Gamma(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_1^x \ln t \ \mathrm{d}t + \int_1^2 \ln\Gamma(t)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Ainsi $f(x) = x\ln x - x + C$ avec

$$C = 1 + \int_1^2 \ln\Gamma(t)\mathrm{d}t$$

Finalement, $f(x) \overset{+\infty}{\sim} x\ln x$.

c) La fonction Γ (donc la fonction $x \mapsto \ln(\Gamma(x))$ sont strictement croissantes sur $[2, +\infty[$.

Soit $x \geqslant 3$, on a donc :

$$\int_{x-1}^{x} \ln \Gamma(t) \mathrm{d}t \leqslant \ln \Gamma(x) \leqslant \int_{x}^{x+1} \ln \Gamma(t) \mathrm{d}t$$

Mais d'après la question 2 :

$$\int_{x-1}^{x} \ln \Gamma(t) \mathrm{d}t \overset{+\infty}{\sim} (x-1)\ln(x-1) \sim x \ln x$$

Ainsi $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{\ln \Gamma(x)}{x \ln x} = 1$, donc $\ln \Gamma(x) \overset{+\infty}{\sim} x \ln x$.

732. Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 e^{t^x \ln t} \,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que f est croissante et continue sur $\mathbb{R}$.

c) Donner une expression de $f(x)$ comme somme de série pour $x > 0$.

d) Étudier la limite de f en $+\infty$.

Sol :

a) Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction f_x est continue sur $]0, 1]$.

Si $x > 0$, on a $t^x \ln t = \mathrm{e}^{x \ln t} \ln t \overset{t \to 0^+}{\to} 0$.

Dans ce cas, $\lim\limits_{t \to 0} f_x(t) = 1$.

Si $x = 0$, on a $f_0(t) = t$.

Si $x < 0$, on a $t^x \ln t = \mathrm{e}^{x \ln t} \ln t \overset{t \to 0^+}{\to} -\infty$.

Dans ce cas, $\lim\limits_{t \to 0} f_x(t) = 0$.

Ainsi f_x a un prolongement continu sur $[0, 1]$.

Donc F est définie sur $\mathbb{R}$.

b) Pour $x < y$, et $t \in]0, 1]$, on a $t^x \ln t \leqslant t^y \ln t$.

Ainsi $F(x) \leqslant F(y)$ (F est croissante).

Pour $x \in \mathbb{R}, f_x$ est continue sur $]0,1]$.

Pour $t \in]0,1], x \mapsto e^{t^\pi \ln t}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Soit $\alpha > 0$, soit $(x,t) \in [-\alpha, \alpha] \times]0,1]$, on a

$$0 \leqslant e^{t^x \ln t} \leqslant \mathrm{e}^{t^\alpha \ln t} = \varphi(t)$$

et φ est continue et intégrable sur $]0,1]$.

Le théorème de continuité d'une intégrale à paramètre s'applique donc :

la fonction F est continue sur $\mathbb{R}$.

c) Avec le DSE de l'exponentielle on obtient :

$$\forall x > 0, F(x) = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(t^x \ln t)^n}{n!} \mathrm{d}t$$

On pose pour $t \in]0,1], g(t) = t^x \ln t$, et $g(0) = 0$.

g est continue sur $[0,1]$ donc bornée.

Il existe donc M (dépendant de x) tel que :

$$\forall t \in [0,1], |g(t)| \leqslant M$$

Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0,1]$:

$$\left| \frac{(t^x \ln t)^n}{n!} \right| \leqslant \frac{M^n}{n!}$$

$\sum \frac{(t^x \ln t)^n}{n!}$ converge donc normalement sur $[0,1]$.

Par intégration terme à terme sur un segment :

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \int_0^1 (t^x \ln t)^n \ \mathrm{d}t$$

On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $p > 0$:

$$I_{n,p} = \int_0^1 t^p (\ln t)^n \ \mathrm{d}t$$

Par intégration par partie :

$$\begin{aligned} I_{n,p} &= \left[\frac{t^{p+1}}{p+1}\ln t\right]_0^1 - \frac{n}{p+1}\int_0^1 t^p \ln(t)^{n-1} \ \mathrm{d}t \\ &= -\frac{n}{p+1} I_{n-1,p} \end{aligned}$$

On en déduit par récurrence facile :

$$I_{n,p} = \frac{(-1)^n n!}{(p+1)^{n+1}}$$

Ainsi $F(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(nx+1)^{n+1}}$.

d) On rappelle que $\begin{cases} \forall u \in \mathbb{R}, 1 - u \leqslant \mathrm{e}^{-u} \\ \forall u > 0, \mathrm{e}^{-u} \leqslant 1 \end{cases}$

Il en découle pour $t \in [0,1]$ et $x > 0$:

$$1 + t^x \ln t \leqslant e^{t^z \ln t} \leqslant 1$$

En intégrant, on obtient :

$$1 + \int_0^1 t^x \ln t \ \mathrm{d}t \leqslant F(x) \leqslant 1$$

Ainsi, par le calcul précédent :

$$1 - \frac{1}{(x+1)^2} \leqslant F(x) \leqslant 1$$

On en déduit $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

733. Soit $T : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{itx} - 1}{t} e^{-t} \ \mathrm{d}t$.

Montrer que T est définie sur $\mathbb{R}$ et calculer $T(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Sol :

On pose $f(x,t) = \dfrac{e^{itx} - 1}{t} e^{-t}$.

Montrons que T est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Pour $x \in \mathbb{R}, f_x : t \mapsto f(x,t)$ est continue sur $]0,+\infty[$.

On a $\dfrac{e^{itx}-1}{t}e^{-t} \overset{0}{\sim} ix$, et $|f(x,t)| \leqslant 2e^{-t}$.

Ainsi f_x est intégrable sur $]0,+\infty[$.

Pour $t > 0$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

De plus on a : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = i\mathrm{e}^{-t(1-ix)}$.

Pour $x \in \mathbb{R}, t \mapsto i\mathrm{e}^{-t(1-ix)}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $t > 0$, on $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = e^{-t}$.

Le théorème de dérivabilité s'applique.

Donc T est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec :

$$\begin{aligned} T'(x) &= \int_0^{+\infty} i\mathrm{e}^{-t(1-ix)}\mathrm{d}t = \frac{i}{1-ix} \\ &= -\frac{x}{1+x^2} + i\frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

Il existe donc $C \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, T(x) = -\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + i\arctan x + k$$

Or $T(0) = 0$ donc $k = 0$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, T(x) = -\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + i\arctan x$$

734. Soit $f :]-1,+\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{1-(1-t)^x}{t}\,\mathrm{d}t$

Justifier la définition de f puis donner une expression de $f(x)$ comme somme d'une série.

Sol :

a) Avec $u = 1-t$, sous réserve de convergence :

$$f(x) = \int_0^1 \frac{1-u^x}{1-u}\,\mathrm{d}u$$

La fonction $h : u \mapsto \dfrac{1-u^x}{1-u}$ est continue sur $]0,1[$.

Elle se prolonge en $u=1$ car $\lim\limits_{u\to 1} h(u) = x$.

Si $x \geqslant 0, h$ se prolonge par continuité en $u=0$.

Mais si $x<0$, on a $h(u) \overset{0^+}{\sim} -u^x$.

Ainsi h est intégrable en 0 (donc f est définie) si et seulement si $x>-1$.

b) Pour $u \in]0,1[$, on a : $\dfrac{1}{1-u} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u^n$.

On en déduit :

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \int_0^1 (1-u^x) \sum_{n=0}^{+\infty} u^n du \\
&= \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \left(u^n - u^{n+x}\right) \mathrm{d}u
\end{aligned}
$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n(u) = u^n - u^{n+x}$.

Les f_n sont intégrables sur $]0,1[$.

Elle sont de signe constant. On trouve :

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 f_n(u)\mathrm{d}u &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1+x} \\
&= \frac{x}{(n+1)(n+1+x)} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}
$$

Ainsi $\displaystyle\sum \int_0^1 |f_n|$ converge.

Donc (intégration terme à terme), pour tout $x>-1$:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1+x}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right)
\end{aligned}
$$

735. Écrire l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln\left(1-t^2\right)\ln\left(t^2\right)}{t^2} dt$ comme somme d'une série.

Sol :

Pour $t \in]0,1[$, on a

$$\frac{\ln\left(1-t^2\right)\ln\left(t^2\right)}{t^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t) \text{ où } f_n(t) = -\frac{t^{2n-2}}{n}\ln(t).$$

Les fonctions f_n sont intégrables sur $]0,1[$.

Pour $n \geqslant 1$, par intégration par partie :

$$\begin{aligned}\int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t &= \left[-\frac{t^{2n-1}\ln t}{2n-1}\right]_0^1 + \frac{1}{2n-1}\int_0^1 t^{2n-2}\ \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{n(2n-1)^2}\end{aligned}$$

Ainsi la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\int_0^1 |f_n|$ converge.

Donc f est intégrable sur $]0,1[$ et :

$$\int_0^1 \frac{\ln\left(1-t^2\right)\ln\left(t^2\right)}{t^2}\ \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(2n-1)^2}$$

Si on admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, on trouve :

$$\int_0^1 \frac{\ln\left(1-t^2\right)\ln\left(t^2\right)}{t^2}\ \mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{8}$$

Faux : on met en elts simples, $\displaystyle\frac{1}{n(2n-1)^2} = \frac{1}{n} - \frac{2}{2n-1} + \frac{2}{(2n-1)^2}$.

On passe en somme partielle !

On injecte ce qui manque aux impairs. etc...

736. a) Pour $n \in \mathbb{N}$, justifier l'existence et calculer la valeur de $\displaystyle\int_0^1 t^n \ln(t)\ \mathrm{d}t$.

b) Montrer que $t \mapsto e^t \ln(t)$ est intégrable sur $]0,1]$, puis que $\displaystyle\int_0^1 e^t \ln(t)\mathrm{d}t = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\cdot n!}$.

Sol :

$\mathrm{e}^t \ln(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$, où $f_n(t) = \frac{t^n}{n!} \ln t$.

Les f_n sont intégrables (et négatives) sur $]0, 1]$.

Par une IPP facile, on trouve :

$$\int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t = -\frac{1}{n!(n+1)^2}$$

donc $\sum \int_0^1 |f_n(t)|\, \mathrm{d}t$ converge.

Par le théorème d'intégration terme à terme :

$$\int_0^1 e^t \ln(t)\mathrm{d}t = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!(n+1)^2} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{nn!}$$

737. Soit $I : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{1-e^t}\ \mathrm{d}t$.

a) Montrer que la fonction I est de classe $\mathcal{C}^1$ sar $\mathbb{R}$.

b) Si $x \in \mathbb{R}$, montrer qu'il existe des réels a et b que l'on exprimera en fonction de x,

tels que $I(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a}{b^2+n^2}$.

c) En déduire la limite de I en $+\infty$.

Sol :

La fonction f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}\times]\,0, +\infty[$.

$$\text{On a } |f(x,t)| \leqslant |x|\varphi(t),\ \text{ où } \varphi(t) = \frac{t}{e^t-1}$$

La fonction φ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

Pour $t > 0$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Plus précisément : $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{t\cos(xt)}{e^t-1}$.

On a encore la majoration uniforme $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)$.

Par théorème de dérivation, I est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

- Pour $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} I(x) &= \int_0^{+\infty} \sin(xt)\frac{\mathrm{e}^{-t}}{1-\mathrm{e}^{-t}}\ \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-kt}\sin(xt)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

On trouve ensuite

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-kt}\sin(xt)\mathrm{d}t &= \mathrm{Im}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t(k-ix)}\mathrm{d}t \\ &= \mathrm{Im}\,\frac{1}{k-ix} = \frac{x}{k^2+x^2} \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi : } I(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x}{k^2+x^2} + R_n$$

$$\text{où } R_n(x) = \int_0^{+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-kt}\sin(xt)\mathrm{d}t$$

Or pour $t > 0$, on a :

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-kt}\sin(xt)\right| \leq |x|t\sum_{k=n+1}^{+\infty}\mathrm{e}^{-kt} = |x|\mathrm{e}^{-nt}\frac{t\mathrm{e}^{-t}}{1-\mathrm{e}^{-t}} = |x|\mathrm{e}^{-nt}\varphi(t).$$

La fonction φ est bornée car elle est continue sur $]0,+\infty[$ et de limite finie en 0 et en $+\infty$.

Il en découle :

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &\leq |x|\|\varphi\|_\infty \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nt}\ \mathrm{d}t \\ &= \frac{|x|\|\varphi\|_\infty}{n} \overset{n\to\infty}{\to} 0 \end{aligned}$$

$$\text{d'où } I(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x}{k^2+x^2}.$$

- On termine en calculant $\lim\limits_{x\to+\infty} I(x)$.

Pour $x > 0$, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2+x^2}$ est décroissante, continue et intégrable sur $[0,+\infty[$.

On en déduit :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+x^2} \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2+x^2} \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+x^2}$$

Ainsi $\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant I(x) \leqslant \frac{\pi}{2}$.

D'où par encadrement : $\lim\limits_{x \to +\infty} I(x) = \frac{\pi}{2}$.

738. Soit $(a_n) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^{\mathrm{n}}$ un suite croissante de limite $+\infty$.

Montrer l'égalité : $\int_0^{+\infty} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n e^{-a_n t} dt = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{a_n}$.

Sol :

La suite $n \mapsto \frac{1}{u_n}$ décroît et converge vers 0 .

Ainsi $\sum \frac{(-1)^n}{u_n}$ converge (d'après le TSSA).

On définit les fonctions $f_n : x \mapsto (-1)^n e^{-u_n x}$.

Les f_n sont continues par morceaux sur $\mathbb{R}^+$.

Elles sont intégrables car $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 f_n(x) = 0$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^+} f_n(x) \mathrm{d}x &= (-1)^n \int_{\mathbb{R}^+} e^{-u_n x} \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{(-1)^n}{u_n} \left[-\mathrm{e}^{-u_n x}\right]_0^{+\infty} = \frac{(-1)^n}{u_n} \end{aligned}$$

On pense au théorème d'intégration terme à terme, mais ses hypothèses ne sont pas réunies.

En effet, on ignore la nature de $\sum\limits_{n \geq 0} \int_{\mathbb{R}^+} |f_n|$.

On pose donc (classiquement) :

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} f_n \text{ et } R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} (-1)^n f_n$$

On sait que :

$$|R_N(x)| \leqslant |f_{N+1}(x)| = \exp\left(-u_{N+1} x\right)$$

(théorème spécial des séries alternées).

En particulier R_N est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Mais $S_N \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ (somme finie de fonctions intégrables).

On en déduit l'intégrabilité de $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

Avec ces notations :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^+} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n &= \int_{\mathbb{R}^+} S_N + \int_{\mathbb{R}^+} R_N \\ &= \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{u_n} + \int_{\mathbb{R}^+} R_N \quad (\star)\end{aligned}$$

De plus :

$$\left|\int_{\mathbb{R}^+} R_N(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_{\mathbb{R}^+} |R_N(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{u_{N+1}}$$

Il en résulte : $\lim_{N\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^+} R_N(x)\mathrm{d}x = 0$.

Quand N tend vers $+\infty$ dans $(\star)$, on obtient bien :

$$\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n e^{-u_n x}\right) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{u_n}$$

739. a) Résoudre $2y''(x) - xy'(x) - y(x) = 0$ avec les conditions initiales

$y(0) = \sqrt{\pi}$ et $y'(0) = 0$, après avoir justifié l'existence et l'unicité de la solution.

b) En déduire la valeur de $f(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx-t^2} dt$.

Sol :

a) $f : (x,t) \mapsto \mathrm{e}^{tx-t^2}$ est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Pour tout $x, t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $t, x \mapsto f(x,t)$ est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

Plus précisément, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = t\mathrm{e}^{tx-t^2} \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = t^2\mathrm{e}^{tx-t^2}$$

Pour tout x réel fixé, les fonctions

$$t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \text{ et } t \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)$$

sont continues sur $\mathbb{R}$.

Pour $x \in [-a,a]$ et $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant |t|\mathrm{e}^{a|t|-t^2} \text{ et } \left|\frac{\partial f^2}{\partial x^2}(x,t)\right| \leqslant t^2\mathrm{e}^{a|t|-t^2}$$

Les fonctions dominantes sont intégrables sur $\mathbb{R}$.

Le théorème de dérivation s'applique.

Ainsi I est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ avec :

$$I'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} t\mathrm{e}^{tx-t^2} \,\mathrm{d}t \text{ et } I''(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2\mathrm{e}^{tx-t^2} \,\mathrm{d}t$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} 2I''(x) - xI'(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(2t^2 - xt\right)\mathrm{e}^{tx-t^2} \,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} -t(-2t-x)\mathrm{e}^{tx-t^2} \,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Par intégration par partie :

$$\begin{aligned} &2y''(x) - xy'(x) \\ &= \left[-t\mathrm{e}^{tx-t^2}\right]_{-\infty}^{+\infty} + \textstyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{tx-t^2} \,\mathrm{d}t = y(x) \end{aligned}$$

b) On a $I'(0) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t^2} \,\mathrm{d}t = 0$ par imparité.

On sait que $I(0) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$.

L'équation (E) s'écrit : $\big(2y' - (xy)\big)' = 0$.

Elle se résout en $2y' - xy = k$ où $k \in \mathbb{R}$.

En posant $x = 0$, on trouve $k = 0$.

Ainsi : $2I(x)' - xI(x) = 0$ et $I(0) = \sqrt{\pi}$.

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}, I(x) = \sqrt{\pi}\mathrm{e}^{x^2/4}$.

c) On écrit $tx - t^2 = -\left(t - \dfrac{x}{2}\right)^2 + \dfrac{x^2}{4}$.

On en déduit :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{tx-t^2}\ \mathrm{d}t &= \mathrm{e}^{x^2/4} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(t-x/2)^2}\ \mathrm{d}t \\ &= \mathrm{e}^{x^2/4} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2} du = \sqrt{\pi}\mathrm{e}^{x^2/4}\end{aligned}$$

740. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $M : \mathbb{R} \mapsto \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une application dérivable sur $\mathbb{R}$.

a) Démontrer que l'application $f : \mathbb{R} \mapsto \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $f(x) = M^T(x)M(x)$

est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner l'expression de $f'(x)$.

b) Soient $A : \mathbb{R} \to \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ continue et $M : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$ solution de l'équation

différentielle $M'(x) = A(x)M(x)$. On suppose que $M(0) \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}, M(x) \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

Sol :

a) f est dérivable et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = M'(x)^T M(x) + M(x)^T M'(x)$$

b) On trouve, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}f'(x) &= M(x)^T A(x)^T M(x) + M(x)^T A(x)M(x) \\ &= M(x)^T(-A(x) + A(x))M(x) = 0\end{aligned}$$

Ainsi f est constante. Or $f(0) = M(0)^T M(0) = I_n$.

On en déduit : $\forall x \in \mathbb{R}, M(x)^T M(x) = I_n$.

Il reste à montrer : $\forall x \in \mathbb{R}, \det(M(x)) = 1$.

$\varphi(x) = \det M(x)$ est continue à valeurs dans $\{-1, 1\}$.

Elle est donc constante (valeurs intermédiaires).

Or $\varphi(0) = 1$, donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, M(x) \in \mathrm{SO}_n(R)$$

741. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que : $\forall (x, y) \neq (0, 0), f(x, y) = \left(x^2 + y^2\right)^x$ et $f(0, 0) = 1$.

a) Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$.

b) La fonction f admet-elle des dérivées partielles en $(0, 0)$?

c) Déterminer les variations de $h : x \mapsto f(x, 0)$

d) La fonction f admet-elle un extremum en $(0, 0)$?

e) Déterminer tous les extrema de f sur $\mathbb{R}^2$.

Sol : a) f est clairement continue sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$.

Pour la continuité en $(0, 0)$, on passe en polaires :

$$0 \leqslant f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = \exp((2\rho \ln \rho) \cos \theta) \leqslant \exp(2\rho |\ln \rho|)$$

donc $\lim\limits_{r \to 0} f(r \cos \theta, r \sin \theta) = 1 = f(0, 0)$.

Ainsi f est continue en $(0, 0)$, donc sur $\mathbb{R}^2$.

Pour $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$\frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \frac{\mathrm{e}^{x \ln\left(x^2\right)} - 1}{x} \overset{x \to 0}{\to} \infty$$

donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ n'existe pas.

Pour $y \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$\frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = 0 \text{ donc } \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$

b) $g(x) = f(x, 0)$ a les variations $h(x) = x \ln\left(x^2\right)$.

Celle-ci est continue sur $\mathbb{R}$ (avec $h(0)=0$), et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ avec $h'(x)=2(\ln|x|+1)$.

Ainsi h (donc g) croît strictement si $x \leqslant -\mathrm{e}^{-1}$,

décrôit strictement sur $\left[-\mathrm{e}^{-1}, \mathrm{e}^{-1}\right]$, et croît strictement si $x \geqslant \mathrm{e}^{-1}$.

En particulier $\left\{\begin{array}{l} f(x,0)>f(0,0) \text{ si } x \in \left[-\mathrm{e}^{-1}, 0\right[\\ f(x,0)<f(0,0) \text{ si } x \in \left]0, \mathrm{e}^{-1}\right] \end{array}\right.$

La fonction f n'a donc pas d'extremum en $(0,0)$.

c) f est $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $D=\mathbb{R}^2 \backslash\{(0,0)\}$.

Les éventuels extrema de f sont donc à chercher parmi les points critiques de f sur D.

Or on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\left(\ln\left(x^2+y^2\right)+\frac{2x^2}{x^2+y^2}\right) f(x,y)$$

et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2} f(x,y)$.

Les points critiques de f vérifient :

$$\ln\left(x^2+y^2\right)+\frac{2x^2}{x^2+y^2}=\frac{2xy}{x^2+y^2}=0$$

On obtient les points

$$a(0,1), a'(0,-1), b\left(e^{-1}, 0\right), b'\left(-e^{-1}, 0\right)$$

$f(x,1)-1$ est du signe de x, donc f n'admet pas d'extremum local en a.

Il suffit de remplacer ...

Il en est de même en a', car $f(x,-1)=f(x,1)$.

d) Pour $x>0$, on a.

$$\begin{aligned} f(x,y) & =\mathrm{e}^{x \ln\left(x^2+y^2\right)} \geqslant \mathrm{e}^{x \ln\left(x^2\right)}=\mathrm{e}^{h(x)} \\ & \geqslant \mathrm{e}^{h(1/e)}=f\left(\mathrm{e}^{-1}, 0\right) \end{aligned}$$

Ainsi f a un minimum local en b.

Pour $x<0$, on a

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \mathrm{e}^{x\ln\left(x^2+y^2\right)} \leqslant \mathrm{e}^{x\ln\left(x^2\right)} \\ &= \mathrm{e}^{h(x)} \leqslant \mathrm{e}^{h(-1/e)} \\ &= f\left(-\mathrm{e}^{-1},0\right) \end{aligned}$$

Ainsi f a un maximum local en b'.

- On a :

$$\begin{aligned} \lim_{-\infty} f(x,0) &= \lim_{x\to-\infty} g(x) = 0 \\ &< e^{-2/e} = f\left(\mathrm{e}^{-1},0\right) \end{aligned}$$

donc b n'est donc pas un minimum global.

De même : $\lim\limits_{+\infty} f(x,0) = +\infty$.

Donc b' n'est pas un maximum global.

Probabilités

742. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires discrètes a valeurs dans $]0,+\infty[$,

indépendantes et de même loi. On pose $Y_1 = \dfrac{X_1}{X_1+X_2}$ et $Y_2 = \dfrac{X_2}{X_1+X_2}$

a) Démontrer que Y_1 admet une espérance finie et calculer $\mathbf{E}\left(Y_1\right)$.

b) Démontrer que Y_1 admet une variance finie, puis montrer que $\operatorname{cov}\left(Y_1,Y_2\right) = -V\left(Y_1\right)$.

Sol 742 : Les variables positives Y_1, Y_2 sont majorées par 1 .

Elles ont donc une espérance.

Par symétrie du problème (X_1, X_2 étant indépendantes), on a $\mathrm{E}\left(Y_1\right) = \mathrm{E}\left(Y_2\right)$.

Je détaille la partie subtile, il faut voir que Y_1 et Y_2 sont obtenues à partir

de la même fonction pour le couple $\left(X_1, X_2\right)$ et pour $\left(X_2, X_1\right)$.

Par indépendance et même loi ces 2 couples ont même loi (*) donc la fonction garde

la même loi, et donc la même espérance.

(*) $\mathcal{P}(X_1 = a, X_2 = b) \underset{ind}{=} \mathcal{P}(X_1 = a)\mathcal{P}(X_2 = b) \underset{loi}{=} \mathcal{P}(X_2 = a)\mathcal{P}(, X_1 = b) \underset{ind}{=}$.

Mais $Y_1 + Y_2 = 1$, donc $\mathrm{E}(Y_1) = \mathrm{E}(Y_2) = \dfrac{1}{2}$.

On a $0 \leqslant Y_1^2 \leqslant 1$, donc Y_1^2 admet une espérance donc est de variance finie. Ensuite :

$$\begin{aligned} V(Y_1 + Y_2) &= V(Y_1) + V(Y_2) + 2\operatorname{cov}(Y_1, Y_2) \\ &= 2V(Y_1) + 2\operatorname{cov}(Y_1, Y_2) \end{aligned}$$

Mais $V(Y_1 + Y_2) = V(1) = 0$.

Ainsi $\operatorname{cov}(Y_1, Y_2) = -V(Y_1)$.

743. Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

Démontrer que $\mathcal{P}(X \geqslant \lambda + 1) \leqslant \lambda$ et que $\mathcal{P}\left(X \geqslant \dfrac{\lambda}{3}\right) \leqslant \dfrac{9}{4\lambda}$.

Sol : On a : $(X \geqslant \lambda + 1) \subset |X - \lambda| \geqslant 1$.

Ainsi : $\mathcal{P}(X \geqslant \lambda + 1) \leqslant \mathcal{P}(|X - \lambda| \geqslant 1)$.

Par Bienaymé-Tchebychev :

$$\mathcal{P}(|X - \lambda| \geqslant 1) \leqslant \frac{V(X)}{1^2} = \lambda$$

Il en découle : $\mathcal{P}(X \geqslant \lambda + 1) \leqslant \lambda$.

Rq : Markov marche bien aussi !

On a l'inclusion :

$$\left(X \leqslant \frac{\lambda}{3}\right) \subset \left(|X - \lambda| \geqslant \frac{2\lambda}{3}\right)$$

Toujours par Bienaymé-Tchebychev :

$$\mathcal{P}\left(|X - \lambda| \geqslant \frac{2\lambda}{3}\right) \leqslant \frac{V(X)}{(2\lambda/3)^2} = \frac{9}{4\lambda}$$

Ainsi $\mathcal{P}\left(X \leqslant \dfrac{\lambda}{3}\right) \leqslant \dfrac{9}{4\lambda}$.

744. a) Soit X et Y des variables aléatoires réelles admettant un moment d'ordre 2.

Montrer que $(\mathbf{E}(XY))^2 \leqslant \mathbf{E}\left(X^2\right)\mathbf{E}\left(Y^2\right)$.

b) Soit Z une variable aléatoire à valeurs strictement positives, admettant un moment d'ordre 2 et $a \in]0,1[$.

Montrer que $\mathcal{P}(Z \geqslant a\mathbf{E}(Z)) \geqslant (1-a)^2 \dfrac{\mathbf{E}(Z)^2}{\mathbf{E}\left(Z^2\right)}$.

Sol 744 : a) C'est l'inégalité de Cauchy-Schwarz du cours page 8. Démo à relire ?

b) Soit $a \in]0,1[$, et posons $m = E(Z) > 0$.

On doit montrer : $\mathcal{P}(Z \geqslant am) \geqslant (1-a)^2 \dfrac{m^2}{E\left(Z^2\right)}$.

On peut écrire : $Z = Z\mathbf{1}_{(Z \geqslant ma)} + Z\mathbf{1}_{(Z<ma)}$.

De plus, on a : $Z\mathbf{1}_{(Z<ma)} \leqslant ma$.

Par la première question :

$$\begin{aligned} E^2\left(Z\mathbf{1}_{(Z \geqslant ma)}\right) &\leqslant E\left(Z^2\right) E\left(\mathbf{1}^2_{(Z \geqslant ma)}\right) \\ &= E\left(Z^2\right) \mathcal{P}(Z \geqslant ma) \end{aligned}$$

Ainsi : $(1-a)^2 m^2 \leqslant E\left(Z^2\right) \mathcal{P}(Z < ma)$.

Oui car $Z\mathbf{1}_{(Z \geqslant ma)} = Z - Z\mathbf{1}_{(Z<ma)} \geqslant Z - ma$.

On passe à l'espérance (linéaire) : $E(Z\mathbf{1}_{(Z \geqslant ma)}) \geqslant E(Z) - ma = m(1-a)$.

On passe au carré (tout positif).

Finalement : $\mathcal{P}(Z \geqslant am) \geqslant (1-a)^2 \dfrac{m^2}{E\left(Z^2\right)}$.

745. On considère une pièce non équilibrée, la probabilité d'obtenir pile étant $p \in]0,1[$.

On se propose d'étudier le procédé d'équilibrage de la pièce suivant :

on lance deux fois la pièce. Si on obtient une fois pile et une fois face,

on arrête l'expérience. Dans le cas contraire, on répète l'expérience.

On note T la variable aléatoire indiquant le nombre de lancers effectués

jusqu'à l'arrêt de l'expérience.

a) Donner la loi de T.

b) Montrer que T est presque sûrement finie.

c) Calculer l'espérance de T.

746. On considère des variables aléatoires X et Y à valeurs dans $[\![1, n+1]\!]$ dont la loi jointe est donnée par : $\forall (i,j) \in [1, n+1]^2, \mathcal{P}(X = i, Y = j) = \dfrac{1}{2^{2n}} \begin{pmatrix} n \\ i-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ j-1 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer la loi de X.

b) Les variables X et Y sont elles indépendantes ?

c) Soit $M \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ de coefficients $m_{i,j} = \mathcal{P}(X = i, Y = j)$.

La matrice M est-elle diagonalisable ?

d) Exprimer M^2 à partir de M.

e) Préciser le spectre de M.

Sol :a) Par symétrie, X et Y ont la même loi. On a :

$$\mathcal{P}(X = i) = \sum_{j=1}^{n+1} \mathcal{P}(X = i, Y = j) = \frac{1}{4^n} \binom{n}{i-1} \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} = \frac{1}{2^n} \binom{n}{i-1}.$$

Ainsi $\mathcal{P}(Y = j) = \dfrac{1}{2^n} \begin{pmatrix} n \\ j-1 \end{pmatrix}$

On a donc toujours les égalités :

$$\mathcal{P}(X = i, Y = j) = \mathcal{P}(X = i)\mathcal{P}(Y = j)$$

Cela établit l'indépendance de X et Y.

b) La matrice M est réelle et symétrique.

Par le théorème spectral, elle est diagonalisable.

Notons $C_1, \ldots, C_{n+1}$ ses vecteurs colonnes.

$$\text{Pour } 2 \leqslant j \leqslant n+1, \text{ on a } C_j = \begin{pmatrix} n \\ j-1 \end{pmatrix} C_1 .$$

Ainsi $\mathrm{rg}(M) = 1$, c'est-à-dire $\dim(\mathrm{Ker}(M)) = n$.

d) Notre matrice est de rang 1 est peut s'exprimer comme produit d'une colonne C_1

par une ligne L qui est proportionnelle à C_1, $L = \left(\binom{n}{0}, ..., \binom{n}{n}\right)$.

Donc $M^2 = C_1.(L.C_1).L = \alpha M = \dfrac{1}{4^n} \displaystyle\sum_0^n \binom{2n}{n}.M$.

Encore faut-il savoir retrouver $\displaystyle\sum_0^n \binom{n}{k}^2$...

- Par $(1+X)^{2n} = (1+X)^n.(1+X)^n$.

- Ou par un modèle vu en classe : n garçons , n filles...

Autrement dit, 0 est valeur propre de multiplicité n.

Une base de $\mathrm{Ker}(M)$ est formée des

$$u_j = \binom{n}{j-1} e_1 - e_j \text{ où } 2 \leqslant j \leqslant n+1$$

où $e_1, \ldots, e_{n+1}$ est la base canonique.

L'autre valeur propre est simple.

Elle vaut $\lambda = \mathrm{tr}(M) = \dfrac{1}{4^n} \displaystyle\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \dfrac{1}{4^n} \binom{2n}{n}$.

Ceci est bien cohérent la matrice M^2 !

Une base de la droite propre associée est C_1 (c'est logique car ce vecteur dirige $\mathrm{Im}(M) = \mathrm{Ker}(M)^{\perp}$).

Ceci vient du thm spectral !

747. On considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires indépendantes,

suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre $1/2$.

On pose $Z_n = \displaystyle\sum_{k=0}^n 2^{n-k} X_k$.

a) Donner la loi de Z_0 puis celle de Z_1.

b) Trouver une relation entre Z_{n+1} et Z_n; en déduire la loi de Z_n.

748. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi donnée par

$\mathcal{P}(X_k = 1) = \mathcal{P}(X_\mathrm{k} = -1) = \dfrac{1}{2}$.

Soit $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. On fixe $r > 0$.

a) Montrer que, pour tout $t > 0$, ch $t \leqslant e^{t^2/2}$.

b) Soit $r \in \mathbb{R}$. Montrer que, pour tout $t > 0, \mathcal{P}\left(\frac{S_n}{n} \geqslant r\right) \leqslant \mathbf{E}\left(\exp\left(t\left(\frac{S_n}{n} - r\right)\right)\right)$.

c) Montrer que $\mathcal{P}\left(\frac{S_n}{n} \geqslant r\right) \leqslant \exp\left(-\frac{nr^2}{2}\right)$.

Sol : je rajoute des questions, j'ai déjà vu le film...

1. On l'inégalité de Markov :

$$\mathcal{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geqslant \varepsilon\right) = \mathcal{P}\left(S_n^2 \geqslant n^2\varepsilon^2\right) \leqslant \frac{E\left(S_n^2\right)}{n^2\varepsilon^2}$$

Par linéarité de l'espérance,

$$E\left(S_n\right) = \sum_{i=1}^{n} E\left(X_i\right) = 0$$

Par indépendance, $V\left(S_n\right) = \sum_{i=1}^{n} V\left(X_i\right) = n$.

Ainsi $E\left(S_n^2\right) = n$, et on en déduit la majoration :

$$\mathcal{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{1}{n\varepsilon^2}$$

2. Pour $t \in \mathbb{R}$, on a : $e^{tS_n} = \prod_{i=1}^{n} e^{tX_i}$.

Comme les X_i, les e^{tX_i} sont indépendantes.

On en déduit :

$$E\left(e^{tS_n}\right) = \prod_{i=1}^{n} E\left(e^{tX_i}\right) = \left(E\left(e^{tX_1}\right)\right)^n$$

Par le théorème de transfert :

$$\begin{aligned} E\left(e^{tX_1}\right) &= e^{-t}\mathcal{P}\left(X_1 = -1\right) + e^{t}\mathcal{P}\left(X_1 = 1\right) \\ &= \frac{e^{-t} + e^{t}}{2} = \operatorname{ch} t \end{aligned}$$

Ainsi $E\left(e^{tS_n}\right) = \operatorname{ch}^n t$.

3. Pour $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\mathrm{ch}(t) - \mathrm{e}^{t^2/2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{(2n)!} - \frac{1}{2^n n!} \right) t^{2n}$$

Mais pour $n \geqslant 1$, on a :

$$\frac{1}{(2n)!} - \frac{1}{2^n n!} = \frac{2^n - (n+1)\cdots(2n)}{2^n (2n)!}$$

et $\prod_{k=1}^{n} (n+k) \geqslant 2^n$.

On en déduit : $\mathrm{ch}\, t \leqslant \mathrm{e}^{t^2/2}$.

4. Pour $t > 0$, on a :

$$\left(\frac{S_n}{n} \geqslant \varepsilon \right) = \left(e^{tS_n} \geqslant e^{n\varepsilon} \right)$$

Par l'inégalité de Markov :

$$\mathbb{P}\left(e^{tS_n} \geqslant e^{tn\varepsilon} \right) \leqslant \frac{E\left(e^{tS_n} \right)}{e^{tn\varepsilon}} = \frac{\mathrm{ch}^n\, t}{e^{tn\varepsilon}}$$

Or $(\mathrm{ch}\, t)^n \leqslant \mathrm{e}^{nt^2/2}$.

Donc d'après ce qui précède :

$\mathcal{P}\left(\left| \frac{S_n}{n} \right| \geqslant \varepsilon \right) \leqslant \exp\left(\frac{nt^2}{2} - nt\varepsilon \right)$

5. La fonction $t \mapsto \frac{t^2}{2} - t\varepsilon$ est minimale pour $t = 2\varepsilon$.

Ainsi, en choisissant $t = 2\varepsilon$ on a en particulier :

$$\mathcal{P}\left(\left| \frac{S_n}{n} \right| \geqslant \varepsilon \right) \leqslant \exp\left(-\frac{n\varepsilon^2}{2} \right)$$

749. Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$. Le joueur A lance $6n$ dés et gagne s'il a au moins n fois la face 6. Le joueur B lance $6(n+1)$ dés et gagne s'il a au moins $n+1$ fois la face 6.

On cherche à savoir quel joueur a le plus de chances de gagner.

On note X_n la variable aléatoire donnant le nombre de fois que B a eu la face 6 au cours des $6n$ premiers lancers, Y la variable aléatoire donnant le nombre de fois que B a eu la face 6 au cours des 6 derniers lancers.

Ainsi, $X_{n+1} = X_n + Y$ avec X_n et Y indépendantes.

a) Donner les lois de X_n et de Y.

b) Montrer $\mathcal{P}\left(X_{n+1} \geqslant n+1\right) = \mathcal{P}\left(X_n \geqslant n+1\right) + \sum_{r=1}^{6} \mathcal{P}\left(X_n = n+1-r\right)\mathcal{P}(Y \geqslant r)$.

c) Montrer que $\max\left\{\mathcal{P}\left(X_n = j\right), j \in \{0, \ldots, 6n\}\right\} = \mathcal{P}\left(X_n = n\right)$.

d) Conclure.

750. Soient $n \geqslant 2, A_1, \ldots, A_n$ des points distincts du plan.

Chaque couple $\{A_i, A_j\}$ de points distincts est relié avec probabilité p_n.

Un point est isolé s'il n'est relié à aucun autre point.

Soit, pour $i \in \{1, \ldots, n\}, X_i$ la variable de Bernoulli égale a 1 si le point A_i est isolé, à 0 sinon. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

a) Trouver la loi de X_i et son espérance.

b) Majorer $\mathcal{P}\left(S_n \geqslant 1\right)$.

On suppose qu'il existe $c > 0$ tel que $p_n = \dfrac{c \ln(n)}{n}$.

c) On suppose $c > 1$. Montrer que $\mathcal{P}\left(S_n = 0\right) \to 1$ quand $n \to +\infty$.

d) Soit Z une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ ayant un moment d'ordre 2.

Montrer que $\mathcal{P}(Z = 0) \leqslant \dfrac{\mathbf{V}(Z)}{\mathbf{E}(Z)^2}$.

e) On suppose $c < 1$. Calculer $\mathrm{E}\left(S_n^2\right)$ et en déduire la limite de $\left(\mathcal{P}\left(S_n = 0\right)\right)_{n \geqslant 2}$.

751. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre λ. Quelle est la probabilité que la matrice $\begin{pmatrix} X & 0 \\ X+Y & X \end{pmatrix}$ soit diagonalisable ?

752. Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}$.

On suppose que $|Y|$ suit une loi de Poisson et que $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(Y=-n)=\mathcal{P}(Y=n)$.

On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & Y & 1 \\ Y & 0 & 1 \\ Y & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Donner la loi du rang de A.

b) Calculer la probabilité que A soit diagonalisable.

Sol 752 :

La loi de Y est définie par $Y(\Omega)=\mathbb{Z}$.

On a $\mathcal{P}(Y=0)=\mathrm{e}^{-\lambda}$ et, pour $k \in \mathbb{Z}^*$:

$$\mathcal{P}(Y=k)=\frac{1}{2}\mathcal{P}(|Y|=|k|)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^{|k|}}{|k|!}$$

On note que $R(\Omega)=\{2,3\}$, car les seules valeurs de Y à annuler le det sont $0,-1$.

On a $(R=2)=(Y=0)\cup(Y=-1)$ donc :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(R=2)&=\mathcal{P}(Y=0)+\mathcal{P}(Y=-1)\\&=\mathrm{e}^{-\lambda}\left(1+\frac{\lambda}{2}\right)\end{aligned}$$

Il en résulte : $\mathcal{P}(R=3)=1-\mathrm{e}^{-\lambda}\left(1+\frac{\lambda}{2}\right)$.

On forme le polynôme caractéristique de A :

$$\begin{aligned}\chi_A(\lambda)&=\begin{vmatrix} \lambda & -Y & -1 \\ -Y & \lambda & -1 \\ -Y & -1 & \lambda \end{vmatrix}\\&=(\lambda-Y-1)\begin{vmatrix} 1 & -Y & -1 \\ 1 & \lambda & -1 \\ 1 & -1 & \lambda \end{vmatrix}\\&=(\lambda-Y-1)\begin{vmatrix} 1 & -Y & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 1 & -1 & \lambda+1 \end{vmatrix}\\&=(\lambda-Y-1)(\lambda+1)(\lambda+Y)\end{aligned}$$

Ainsi $\mathrm{Sp}(A)=\{Y+1,-1,-Y\}$.

On note D l'événement " A est diagonalisable".

On se donne une issue ω de l'expérience :

Si $Y(\omega) = -2$, alors -1 est valeur propre double de $A(\omega)$.

Or dim ker $A_{-1}(\omega) = 1$ donc $A(\omega)$ n'est pas diagonalisable et $\omega \notin D$.

Si $Y(\omega) = 1$, la matrice $A(\omega)$ est symétrique réelle donc diagonalisable, donc $\omega \in D$.

b) Si $Y(\omega) \notin \{-2, 1\}$ alors, $A(\omega)$ admet 3 valeurs propres distinctes.

Elle est donc diagonalisable et $\omega \in D$.

Ainsi $D = (Y \neq -2)$ donc $\mathcal{P}(D) = 1 - \dfrac{\lambda^2}{4}\mathrm{e}^{-\lambda}$.

753. On considère quatre variables aléatoires de Bernoulli X, Y, Z et T i.i.d. et la matrice

$$A = \begin{pmatrix} X & X & X & X \\ X & Y & Y & Y \\ X & Y & Z & Z \\ X & Y & Z & T \end{pmatrix}$$

a) Donner la loi de $\mathrm{tr}(A)$.

b) Quelle est la probabilité que A soit inversible ?

c) Quelle est la probabilité que A soit diagonalisable ?

d) Trouver les valeurs propres de A.

754. Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement independantes suivant la même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$.

On pose $U = (X_1 \cdots X_n)^T$ (matrice colonne) et $M = UU^T$.

a) Déterminer la loi du rang de M et celle de la trace de M.

b) Quelle est la probabilité que M soit la matrice d'un projecteur ?

c) On note $V = (1...1)^T$ (en colonne).

Déterminer l'espérance et la variance de $S = V^T MV$.

Sol :

1) a) Comme toutes ses colonnes sont proportionnelles à U, M est de rang 0 ou 1.

Et comme les coefficients diagonaux sont les X_i^2, M est nulle si et seulement si

toutes les X_i prennent la valeur 0.

En conclusion, comme les X_i suivent la même loi et sont indépendantes,

$$P(\operatorname{rg} M=0)=(1-p)^n \quad \text{ et } \quad P(\operatorname{rg} M=1)=1-(1-p)^n$$

autrement dit

$$\operatorname{rg} M \hookrightarrow \mathcal{B}\left(1-(1-p)^n\right)$$

Noter que le raisonnement précédent permet de montrer que rg$M$

est bien une variable aléatoire réelle discrète.

De même,

$$\operatorname{Tr} M=\sum_{k=1}^n X_k^2=\sum_{k=1}^n X_k$$

(car $X_k^2=X_k$, puisque X_k ne prend que les valeurs 0 et 1) est une variable aléatoire réelle discrète et suit classiquement la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ (puisque $\operatorname{Tr} M$ est le nombre de 1 parmi les n valeurs prises par les X_k, qui sont indépendantes...)

$$\operatorname{Tr} M \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$$

b) Autre résultat classique : $M^2=(\operatorname{Tr} M) \cdot M($ cette relation est vraie pour toute matrice de rang 0 ou 1 et s'obtient en écrivant $M=\left(X_i X_j\right)_{1 \leqslant i, j \leqslant n}$ et en calculant les coefficients du produit $M \times M \ldots$).

Il en résulte immédiatement que $M^2=M$ si et seulement si $(M=0$ ou $\operatorname{Tr} M=1)$.

Or d'après les questions précédentes,

$$P(M=0)=(1-p)^n \quad \text{ et } \quad P(\operatorname{Tr} M=1)=\left(\begin{array}{l}
n \\
1
\end{array}\right) p(1-p)^{n-1}$$

d'où, ces deux événements étant incompatibles,

$$P\left(M^2=M\right)=(1-p)^n+n p(1-p)^{n-1}$$

c) MV est le vecteur colonne dont le coefficient de la ligne i est $\sum_{k=1}^{n} X_i X_k = X_i \operatorname{Tr} M$ et donc

$$S = \sum_{i=1}^{n} X_i \operatorname{Tr} M = (\operatorname{Tr} M)^2$$

Notons $T = \operatorname{Tr} M$, nous avons vu que $T \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$, d'où

$$E(S) = E\left(T^2\right) = V(T) + E(T)^2 = np(1-p) + (np)^2 = np(1-p+np)$$

Soit

$$E(S) = np(np + 1 - p)$$

On vérifie bien les valeurs prévisibles : p si $n = 1, 0$ si $p = 0$ et n^2 si $p = 1 \ldots$.

Pour calculer $V(S) = E\left(S^2\right) - E(S)^2$, il suffit d'obtenir $E\left(T^4\right) \ldots$.

Pour cela, j'utilise la fonction génératrice de T,

$$\begin{aligned} G_T : t \mapsto (1 + p(t-1))^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (t-1)^k \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)p^k}{k!}(t-1)^k \end{aligned}$$

où je lis (cf. la formule de Taylor)

$$\begin{array}{ll} G'_T(1) = np & ; G_T^{(3)}(1) = n(n-1)(n-2)p^3 \\ G''_T(1) = n(n-1)p^2 & G_T^{(4)}(1) = n(n-1)(n-2)(n-3)p^4 \end{array}$$

Or comme $G_T(t) = \sum_{k=0}^{n} P(T = k) t^k$, quatre dérivations terme à terme

(les sommes sont finies !) me donnent

$$\begin{array}{lll} E(T) = G'_T(1) & ; & E(T(T-1)(T-2)) = G_T^{(3)}(1) \\ E(T(T-1)) = G''_T(1) & ; & E(T(T-1)(T-2)(T-3)) = G_T^{(4)}(1) \end{array}$$

Il reste à décomposer T^4 sous la forme

$$T^4 = T(T-1)(T-2)(T-3) + aT(T-1)(T-2) + bT(T-1) + cT$$

Cette décomposition existe car $(1, T, T(T-1), T(T-1)(T-2), T(T-1)(T-2)(T-3))$ est une base de $\mathbb{R}_4[X]$ (degrés échelonnés), le coefficient dominant vaut 1 et le terme constant est nul.

En remplaçant T : par 1 , je trouve $c=1$ par 2 je trouve $2b+2c=16$ d'où $b=7$

* par 3 je trouve $6a+6b+3c=81$ d'où $a=6$.

D'où par linéarité de l'espérance

$$E\left(T^4\right)=n(n-1)(n-2)(n-3)p^4+6n(n-1)(n-2)p^3+7n(n-1)p^2+np$$

et enfin $V(S)=E\left(T^4\right)-E(S)^2$

$$=n(n-1)(n-2)(n-3)p^4+6n(n-1)(n-2)p^3+7n(n-1)p^2+np-\left(np(1-p)+(np)^2\right)^2$$

Tous calculs faits

$$V(S)=np(1-p)\left[2(n-1)(2n-3)p^2+6(n-1)p+1\right]$$

Il est satisfaisant de retrouver $p(1-p)$ dans le cas $n=1$ et 0 lorsque $p\in\{0,1\}\ldots$.

Compléments extérieurs :

27. (CCP) Donner une série entière solution de (E) : $x^2y''+(3x-1)y'+y=\dfrac{1}{(1-x)^2}$.

Solution : Délirant de longueur...

Remarquons que le développement en série entière du second membre est classique (obtenu par produit de Cauchy ou par dérivation de $x\mapsto\dfrac{1}{1-x}$), avec un rayon de convergence égal à 1 :

$$\forall x\in]-1,1[\quad \frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n.$$

Soit alors $f:x\mapsto\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ la fonction somme d'une série entière de rayon de $R>0$.

J'ai, selon le théorème de dérivation terme à terme d'une série entière, moyennant quelques réindexations classiques, pour tout x de $]-R,R[$,

$$f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n\quad\text{ et }\quad xf'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^n$$

$$x^2f''(x)=\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_nx^n$$

(j'ai pu faire démarrer toutes les sommes à $n=0$ en ajoutant quelques termes nuls...). Je note $r=\min(1,R)$ de sorte que toutes les séries entières considérées ci-dessous ont un rayon de convergence au moins égal à r. Par unicité des coefficients d'une série entière, f est solution de (E) sur $]-r,r[$ si et seulement si

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad n(n-1)a_n+3na_n-(n+1)a_{n+1}+a_n=n+1$$

soit

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad \left(n^2+2n+1\right)a_n-(n+1)a_{n+1}=n+1$$

soit en simplifiant par $n+1$ (qui est non nul !

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad (n+1)a_n-a_{n+1}=1$$

On peut essayer de tâtonner pour conjecturer l'expression de a_n, non triviale dans cet exemple... Je choisis de forcer l'apparition d'une somme télescopique : en divisant par $(n+1)!$, la condition devient

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad \frac{a_n}{n!}-\frac{a_{n+1}}{(n+1)!}=\frac{1}{(n+1)!}$$

ce qui équivaut à

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad a_0-\frac{a_n}{n!}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(k+1)!}$$

En effet, l'implication de haut en bas s'obtient en sommant de 0 à $n-1$ (après avoir remplacé n par $k\ldots$) et l'implication de bas en haut se vérifie directement par simple soustraction. En conclusion, après réindexation, f est solution de (E) sur $]-r,r[$ si et seulement si

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad a_n=n!\left(a_0-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\right).$$

Il ne faut pas oublier de regarder le rayon de convergence de la série entière obtenue : s'il est nul, c'est qu'il n'y a pas de solution développable en série entière ! Or la parenthèse ci-dessus admet une limite réelle ℓ puisque je reconnais la série exponentielle, à savoir

$$\ell=a_0-(e-1)$$

Si $\ell\neq 0$, j'ai $a_n\sim\ell\cdot n!$ et le rayon de convergence est alors nul (c'est un exemple du cours : par croissances comparées $\sum a_nx^n$ diverge grossièrement pour tout x non nul ; on peut aussi utiliser la règle de d'Alembert...) Je dois donc choisir $a_0=e-1$ mézalor $a_n=o(n!)$ ne suffit pas pour conclure... Je vais encadrer a_n en partant de la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n, appliquée entre 0 et 1 à la fonction exponentielle (qui est bien de classe $\mathcal{C}^{n+1}$!) :

$$\exp(1)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\exp^{(k)}(0)}{k!}1^k+\int_0^1\frac{(1-t)^n}{n!}\exp^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t$$

autrement dit

$$e-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=\frac{1}{n!}\int_0^1(1-t)^ne^t\ \mathrm{d}t$$

soit finalement, puisque désormais $a_0=e-1$.

$$a_n=\int_0^1(1-t)^ne^t\ \mathrm{d}t$$

J'encadre alors en utilisant la croissance de la fonction exp :

$$\int_0^1 (1-t)^n \, \mathrm{d}t \leqslant a_n \leqslant e \int_0^1 (1-t)^n \, \mathrm{d}t \quad \text{soit} \quad \frac{1}{n+1} \leqslant a_n \leqslant \frac{e}{n+1},$$

d'où je déduis que le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ est égal à 1

(car les deux séries entières encadrantes ont pour rayon de convergence 1).

En conclusion. (E) admet une unique solution DSE, $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ de RCV1,

où $a_n = \displaystyle\int_0^1 (1-t)^n e^t \, \mathrm{d}t = n! \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!}$.

Quelques questions subsidiaires se posent naturellement.

Ensemble de définition de f : l'encadrement ci-dessus montre que $\sum a_n$ diverge (par comparaison à la série harmonique) ; d'autre part, $\sum (-1)^n a_n$ est une série alternée dont la valeur absolue du terme général tend vers 0 (toujours d'après le même encadrement), en décroissant d'après l'expression intégrale (par croissance de l'intégrale puisque $(1-t)^{n+1} \leqslant (1-t)^n$ pour tout t de $[0,1]$). Alors le théorème spécial des séries alternées s'applique. L'ensemble de définition de f est $[-1,1[$. Attention toutefois, à ce stade rien ne dit que f est dérivable en $-1\ldots$ La seule certitude est que l'on ne peut pas dériver terme à terme la série entière pour obtenir une hypothétique dérivée en -1 (la série obtenue divergerait grossièrement, toujours à cause du même encadrement...). Mais cela n'est pas forcément rédhibitoire, cf. l'exemple de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ qui est parfaitement dérivable en -1, et même $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty, 1[\ldots$ On montre toutefois que f est continue sur $[-1,0]$ (donc sur $[-1,1[$ puisqu'elle est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$!) : justification classique par convergence uniforme sur $[-1,0]$ en majorant le reste grâce au théorème spécial des séries alternées... Expression intégrale de $f(x)$: vu que, par linéarité de l'intégrale,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^1 (1-t)^n e^t \, \mathrm{d}t \right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 x^n (1-t)^n e^t \, \mathrm{d}t$$

on peut être tenté (pour x fixé) d'intervertir la somme de série et l'intégrale (et là ce n'est plus la simple linéarité ! !).

Je pose $u_n : t \mapsto x^n (1-t)^n e^t$.

Pour x fixé dans $]-1,1[$, aucune difficulté puisque $\sum u_n$ converge normalement sur $[0,1]$. En effet

$$\max_{t \in [0,1]} |u_n(t)| \leqslant |x|^n \quad \text{et} \quad \sum |x|^n \text{ converge.}$$

A fortiori $\sum u_n$ cv unft sur le segment $[0,1]$ et je peux donc intégrer terme à terme.

Pour $x=-1$ la situation se complique puisque $\sum u_n(0)$ diverge grossièrement, pas question donc d'intégrer sur le segment $[0,1]$.

On peut envisager le théorème d'intégration terme à terme sur $]\,0,1]$,

mais ça coince aussi car la série des $\displaystyle\int_0^1 |u_n|$ diverge (minorée par la série harmonique...).

Reste la dernière chance, utiliser les sommes partielles de $\sum u_n(t)$, faciles à exprimer ici puisqu'il s'agit d'une série géométrique :

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \quad \forall t \in [0,1] \quad \sum_{n=0}^{p-1} u_n(t) = \sum_{n=0}^{p-1} (t-1)^n e^t = e^t \frac{1-(t-1)^p}{1-(t-1)} = \frac{e^t}{2-t} - e^t \frac{(t-1)^p}{2-t}$$

Il n'y a aucun souci pour intégrer sur $[0,1]$:

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \sum_{n=0}^{p-1} \int_0^1 u_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{e^t}{2-t}\ \mathrm{d}t - \int_0^1 e^t \frac{(t-1)^p}{2-t}\ \mathrm{d}t$$

or $2-t \geqslant 1$ et $e^t \leqslant e$ pour tout t de $[0,1]$, d'où

$$\left|\int_0^1 e^t \frac{(t-1)^p}{2-t}\ \mathrm{d}t\right| \leq e \int_0^1 |t-1|^p\ \mathrm{d}t = \frac{e}{p+1} \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Nul besoin du théorème de convergence dominée (qui aurait pu s'appliquer à la suite des sommes partielles) !

Le théorème d'encadrement montre que $\displaystyle\sum \int_0^1 u_n(t)\mathrm{d}t$ converge et que sa somme vaut $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^t}{2-t}\ \mathrm{d}t$. En conclusion

$$\forall x \in \Big[-1,1\Big[\quad f(x) = \int_0^1 \frac{e^t}{1-x(1-t)}\mathrm{d}t$$

Et c'est décidément un exercice à tiroirs, puisque la fonction F (prolongeant notre fonction f) définie par l'intégrale à paramètre ci-dessus est manifestement $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty,1[$. En effet, pour $a<1$ fixé les dérivées partielles se dominent facilement :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \forall (x,t) \in]-\infty,a] \times [0,1] \quad \frac{\partial^k}{\partial x^k}\left(\frac{e^t}{1-x(1-t)}\right) = \frac{k!(1-t)^k e^t}{[1-x(1-t)]^{k+1}}$$

et

$$1-x(1-t) \geqslant 1-a(1-t) = 1-a+at \geqslant 1-a > 0$$

permet de dominer par la constante $\dfrac{k!e}{(1-a)^{k+1}}$ (fonction de t indépendante de x et intégrable sur $[0,1]$!).

Les autres hypothèses du théorème de dérivation sous le signe $\int$ sont clairement satisfaites...

Ainsi $\forall x < 1$, $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^t}{1-x(1-t)}\mathrm{d}t$, $F'(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-t)e^t}{[1-x(1-t)]^2}\,\mathrm{d}t$, $F''(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{2(1-t)^2e^t}{[1-x(1-t)]^3}\,\mathrm{d}t$. . Je calcule alors :

$x^2 \cdot \dfrac{2(1-t)^2e^t}{[1-x(1-t)]^3} + (3x-1)\cdot\dfrac{(1-t)e^t}{[1-x(1-t)]^2} + \dfrac{e^t}{1-x(1-t)} = \dfrac{\left(t+2x+t^2x-3tx\right)e^t}{[1-x(1-t)]^3}$.

J'espérais vaguement trouver une expression "sympathique" pour en déduire que F est solution de (E) sur $]-\infty,1[\ldots$

Il fallait y croire... En dérivant par rapport à t l'expression $\dfrac{P(t)e^t}{(1-x+xt)^2}$ et en identifiant, je trouve que

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{(t-1)e^t}{(1-x+xt)^2}\right) = \frac{\left(t+2x+t^2x-3tx\right)e^t}{(1-x+tx)^3} \quad \text{(si, si !!)}$$

et donc

$$\forall x<1 \quad x^2F''(x)+(3x-1)F'(x)+F(x) = \left[\frac{(t-1)e^t}{(1-x+xt)^2}\right]_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Comme je m'y attendais. F est solution de (E) sur $]-\infty,1[$, développable en série entière sur $[-1,1[$. Noter que l'argument selon lequel, sachant que F est solution de (E) sur $[-1,1[$, le calcul "formel" de

$$x^2F''(x)+(3x-1)F'(x)+F(x)$$

s'effectue de la même façon pour $x<-1$, serait ici abusif, puisqu'il ne s'agit pas simplement d'appliquer des formules de dérivation de fonctions usuelles. Il y a là des calculs d'intégrales, qui se font parfois de façons bien différentes selon les intervalles de travail.

---

23. (Mines) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que les valeurs propres de $A^T - A$ sont réelles.

Montrer que A est symétrique.

Solution : Notons $M = A^T - A$. Ainsi M est une matrice antisymétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

et il faut comprendre que l'hypothèse de l'énoncé s'ecrit $\mathrm{Sp}_{\mathrm{c}}(M) \subset \mathbb{R}$!

Or il est classique que les valeurs propres complexes d'une matrice antisymétrique réelle sont imaginaires pures (cf.la méthode utilisée au début de la démo du theorème spectral).

A savoir : $MX = \lambda X(*)$, attention pas de normes ici les objets peuvent être complexes.

Relisons l'entrée du spectral : On transpose et conjugue (*), il vient $-\overline{X^T}M = \overline{\lambda}\overline{X^T}$.

On multiplie à droite par X, on a $-\lambda = \overline{\lambda}$ après avoir simplifié par $\sum |x_i|^2 \neq 0$.

Par conséquent $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M) \subset \{0\}$ et donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}M = \{0\}$ puisque M admet au moins une

valeur propre complexe, par theorème de d'Alembert appliqué à son poly caractéristique.

Or nous disposons d'un autre résultat classique, en notant f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ (identifié à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$) canoniquement associé à M : Ker f et Im f sont supplémentaires orthogonaux.

En effet. si $Z \in$ Ker f et $Y = MX \in \mathrm{Im}\, f$, alors avec les notations habituelles

$$\begin{aligned}(Z \mid Y) &= Z^T MX = -(MZ)^T X \text{ car } M^T = -M \\ &= 0 \text{ car } Z \in \mathrm{Ker}\, f\end{aligned}$$

II en résulte que les deux sous-espaces vectoriels Ker f et Im f sont orthogonaux,

or la somme de leurs dimensions vaut n en vertu du théoreme du rang. En conclusion

$$\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}\, f \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}\, f$$

Comme Im f est (banalement) stable par f, avec l'endomorphisme g induit par f sur Im f.

En choisissant une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ adaptée à la décomposition ci-dessus,

j'obtiens que M est semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d une matrice par blocs de la forme

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

où B est carrée, de rang $r = \mathrm{rg} f$.

Mais $\chi_N = \chi_M$ donc la seule valeur propre possible de B est 0 .

Tandis que 0 ne peut être valeur propre de g du fait que Ker $f \cap \mathrm{Im}\, f = \{0\}$.

Nécessairement $r = 0$, càd que $f = 0$, d'où $A^T - A = 0$, bref A est symétrique.

---

13. (Mines) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ et G_X sa fonction génératrice.

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall r \in]0,1[, \quad \mathcal{P}(X \geqslant n) \leqslant \frac{1 - G_X(r)}{1 - r^n}.$$

Étudier les cas d'égalité.

Solution : fixons $n \in \mathbb{N}^*$ et $r \in]\,0,1\,[$; ainsi $1 - r^n > 0$.

Par σ -additivité, j'ai

$$P(X \geqslant n) = \sum_{k=n}^{\infty} \mathcal{P}(X = k) \quad \text{d'où} \quad r^n \mathcal{P}(X \geqslant n) = \sum_{k=n}^{\infty} r^n \mathcal{P}(X = k)$$

Or $k \geqslant n, r^n \geqslant r^k$ et $\mathcal{P}(X = k) \geqslant 0$ d'où par somme finie d'inégalités et passage à la limite

$$r^n \mathcal{P}(X \geqslant n) \geqslant \sum_{k=n}^{\infty} r^k \mathcal{P}(X = k) = G_X(r) - \sum_{k=0}^{n-1} r^k \mathcal{P}(X = k)$$

d'où en multipliant par -1

$$-r^n \mathcal{P}(X \geqslant n) \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} r^k \mathcal{P}(X = k) - G_X(r)$$

En ajoutant cette dernière inégalité à la première égalité, j'obtiens

$$(1 - r^n)\, \mathcal{P}(X \geqslant n) \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \mathcal{P}(X = k) + \sum_{k=0}^{n-1} r^k \mathcal{P}(X = k) - G_X(r).$$

Il reste à remarquer que

$$\sum_{k=0}^{n-1} r^k \mathcal{P}(X = k) \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{P}(X = k) \quad \text{et} \quad \sum_{k=n}^{\infty} \mathcal{P}(X = k) + \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{P}(X = k) = 1$$

d'où $(1 - r^n)\, \mathcal{P}(X \geqslant n) \leqslant 1 - G_X(r)$.

En conclusion, comme $1 - r^n \geqslant 0$

$$\mathcal{P}(X \geqslant n) \leqslant \frac{1 - G_X(r)}{1 - r^n}$$

Vu l'enchainement des majorations ci-dessus, il y a égalité ssi

$$\sum_{k=n}^{\infty} r^k \mathcal{P}(X=k) = \sum_{k=n}^{\infty} r^n \mathcal{P}(X=k) \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n-1} r^k \mathcal{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{P}(X=k).$$

Or $r^k < r^n$ pour $k > n$ et $r^k < 1$ pour $k > 0$.

Par conséquent, comme tous les $\mathcal{P}(X=k)$ sont positifs ou nuls, il y a égalité ssi

$$(\forall k > n \quad \mathcal{P}(X=k) = 0) \quad \text{et} \quad (\forall k \in]\!]0, n[\![\quad \mathcal{P}(X=k) = 0)$$

En conclusion,

$$\text{Il y a égalité si et seulement si : } \forall k \in \mathbb{N}^* \backslash \{n\} \quad \mathcal{P}(X=k) = 0$$

N.B. Je vérifie non sans satisfaction que, dans ce cas,

en notant $p = \mathcal{P}(X=n)$, j'ai $\mathcal{P}(X=0) = 1-p$ et

$$G_X(r) = 1 - p + pr^n \text{ d'où } 1 - G_X(r) = p\,(1 - r^n)!!$$

---

7. (Mines) Deux variables aléatoires indépendantes X et Y sur un même espace

suivent une même loi géométrique de paramètre p. Donner la loi de $|X-Y|$.

On note $T = \max(X, Y)$ et $U = \min(X, Y)$;

exprimer $T+U, T-U$ et TU en fonction de X et Y.

Donner Cov (T, U). Donner la loi de U, l'espérance et la variance de U.

Solution :

Par définition d'une loi géométrique (temps d'attente du premier succès),

l'ensemble des valeurs prises par X (resp. Y) est $\mathbb{N}^*$.

Il en résulte que l'ensemble des valeurs prises par $\Delta = |X-Y|$ est $\mathbb{N}$ et je peux écrire

$$(\Delta = 0) = \bigcup_{k=1}^{\infty} (X=k, Y=k)$$

et, pour n dans $\mathbb{N}^*$,

$$(\Delta = n) = \left(\bigcup_{k=1}^{\infty}(X = n+k, Y = k)\right) \cup \left(\bigcup_{k=1}^{\infty}(X = k, Y = n+k)\right).$$

Les unions ci-dessus sont formées d'événements incompatibles deux à deux,

d'où par σ -additivité et par indépendance de X et Y :

$$\mathcal{P}(\Delta = 0) = \sum_{k=1}^{\infty} p^2(1-p)^{2k-2} = \frac{p^2}{1-(1-p)^2} = \frac{p}{2-p}$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad P(\Delta = n) = 2\sum_{k=1}^{\infty} p^2(1-p)^{n+2k-2} = \frac{2p(1-p)^n}{2-p}.$$

Par définition de T et U, il vient immédiatement

$$T + U = X + Y, T - U = |X - Y| \text{ et } TU = XY$$

J'utilise la relation $\operatorname{Cov}(T, U) = E(TU) - E(T)E(U)$

(l'existence de ces espérances étant assurée par,

d'une part $TU = XY$ où X et Y admettent une variance,

d'autre part $0 \leqslant T \leqslant X + Y$ et $U \leqslant X$ où X et Y admettent une espérance).

J'ai grâce à l'indépendance de X et Y

$$E(TU) = E(XY) = \frac{1}{p^2}$$

De $+$, d'après la question précédente T et U s'expriment en fct de X, Y et $\Delta = |X - Y|$:

$$T = \frac{1}{2}(X + Y + \Delta) \quad \text{ et } \quad U = \frac{1}{2}(X + Y - \Delta).$$

Compte tenu de la linéarité de l'espérance, il me suffit de calculer $E(\Delta)$,

qui existe bien d'après l'expression de la loi de Δ obtenu ci-dessus et vaut

$$E(\Delta) = \sum_{n=1}^{\infty} nP(\Delta = n) = \frac{2p(1-p)}{2-p}\sum_{n=1}^{\infty} n(1-p)^{n-1} = \frac{2(1-p)}{p(2-p)}.$$

Il vient alors

$$E(T) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p} + \frac{2(1-p)}{p(2-p)}\right) = \frac{3-2p}{p(2-p)} \quad \text{et} \quad E(U) = \frac{1}{p(2-p)}.$$

D'où finalement,

$$\underline{\mathrm{Cov}(T,U) = \frac{1}{p^2} - \frac{3-2p}{p^2(2-p)^2} = \left(\frac{1-p}{p(2-p)}\right)^2.}$$

Pour déterminer la loi de U, je remarque que, pour tout n dans $\mathbb{N}$.

$$(U > n) = (X > n, Y > n)$$

or classiquement

$$\mathcal{P}(X > n) = \mathcal{P}(Y > n) = \sum_{k=n+1}^{\infty} p(1-p)^{k-1} = (1-p)^n$$

d'où par indépendance $\mathcal{P}(U > n) = (1-p)^{2n}$ et j'en déduis, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathcal{P}(U = n) = \mathcal{P}(U > n-1) - \mathcal{P}(U > n) = \left(1 - (1-p)^2\right)\left((1-p)^2\right)^{n-1}.$$

Je constate donc que U suit la loi géométrique de paramètre $1 - (1-p)^2 = p(2-p)$.

Cela confirme (heureusement !) la valeur de $E(U)$ et la variance est connue :

$$V(U) = \frac{(1-p)^2}{(p(2-p))^2}$$

---

8. (Centrale) Un étang contient N poissons dont n brochets.

Un pêcheur sort des poissons un par un en relâchant à chaque fois sa prise.

La pêche s'arrête lorsque tous les brochets ont mordu.

Quelle est la probabilité que la pêche s'arrête après n prises ? Après $n+1$ prises ?

Quel est le nombre moyen de prises jusqu'à l'arrêt de la pêche ?

Solution

Il est légitime de supposer les différentes prises équiprobables (même si c'est "non dit")

1) Je peux alors calculer les premières probabilités par dénombrement :

- la pêche se termine lors de la n -ième prise si et seulement si les n premières prises ont donné les n brochets, soit $n!$ listes possibles (le nombre de permutations de l'ensemble des brochets), cela parmi les N^n listes de n prises possibles. D'où la probabilité $\dfrac{n!}{N^n}$.

- les listes de $n+1$ prises conduisant à la fin de la pêche lors de la $(n+1)$ -ième prise sont de deux sortes (parties disjointes... Attention à ne pas compter deux fois certaines listes !) : d'une part celles où l'on a pris un "non brochet" lors de l'une des n premières prises et une fois chaque brochet ($n(N-n)n!$ possibilités) ; d'autre part celles où l'on a pris deux fois un même brochet lors des n premières prises et les $n-1$ autres brochets lors des autres prises $\left(\begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} n(n-1)!\text{possibilités}\right)$. D'où la probabilité

$$\frac{1}{N^{n+1}}\left[n(N-n)n!+\begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} n(n-1)!\right]=\frac{n\cdot n!}{N^{n+1}}\left[N-n+\frac{n-1}{2}\right]=\frac{n\cdot n!}{N^{n+1}}\left[N-\frac{n+1}{2}\right]$$

Noter que l'on obtient bien 0 dans le cas trivial $n=N=1$!!

Ces valeurs peuvent aussi s'obtenir par des calculs (à justifier) sur des probabilités d'événements (à définir clairement).

- Soit, pour $k\in [\![1,n]\!], B_k$.

L'événement "on péche à la k -ième prise un brochet qui n'a pas encore été pris".

L'événement étudié A_n : "la pêche se termine lors de la n -ième prise" s'écrit alors $B_1\cap\cdots\cap B_n$ et la formule des probabilités composées donne

$$\mathcal{P}\left(A_n\right)=\mathcal{P}\left(B_1\right)\mathcal{P}_{B_1}\left(B_2\right)\cdots\mathcal{P}_{B_1\cap\cdots\cap B_{n-1}}\left(B_n\right)$$

ou par équiprobabilité $\mathcal{P}\left(B_1\right)=\dfrac{n}{N}$ et de même, pour $k\in [\![2,n]\!]$

$$\mathcal{P}_{B_1\cap\cdots\cap B_{k-1}}\left(B_k\right)=\frac{n-(k-1)}{N}$$

et l'on retrouve le résultat ci-dessus.

- Dans le méme esprit, l'événement A_{n+1} :

"la pêche se termine lors de la $(n+1)$ -ième prise" peut s'écrire

$$A_{n+1}=\bigcup_{j=1}^{n} E_k \text{ où } E_j=B_1\cap\cdots\cap B_{j-1}\cap C_j\cap B_{j+1}\cap\cdots\cap B_{n+1}$$

Les B_k étant définis comme ci-dessus et C_j étant l'événement "on peche à la j -ième prise un brochet qui a déjà été pris ou un poisson qui n'est pas un brochet". Il est clair que les E_j sont disjoints deux à deux (il n'y a qu'à la prise j que l'on ne sort pas un nouveau brochet).

Par conséquent

$$\mathcal{P}\left(A_{n+1}\right)=\sum_{j=1}^{n}\mathcal{P}\left(E_j\right)$$

et les $\mathcal{P}\left(E_j\right)$ se calculent à nouveau par la formule des probabilités composées :

$$\mathcal{P}\left(E_j\right)=\frac{n}{N}\cdot\cdots\cdot\frac{n-j+1}{N}\cdot\frac{N-j}{N}\cdot\frac{n-j}{N}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{N}=\mathcal{P}\left(A_n\right)\cdot\frac{N-j}{N}$$

D'où en factorisant, puisque $\mathcal{P}\left(A_n\right)$ ne dépend pas de j

$$\mathcal{P}\left(A_{n+1}\right)=\mathcal{P}\left(A_n\right)\cdot\sum_{j=1}^{n}\left(1-\frac{j}{N}\right)=\mathcal{P}\left(A_n\right)\cdot\left(n-\frac{n(n+1)}{2N}\right)=\frac{n\cdot n!}{N^{n+1}}\left[N-\frac{n+1}{2}\right]$$

et l'on retrouve aussi le résultat obtenu par dénombrement ! !

Pour l'espérance du nombre X de prises jusqu'à l'arret de la pêche, je note,

pour $k\in\llbracket 1,n\rrbracket, T_k$ le temps d'attente du k -ième brochet à partir du moment

où l'on en a déjà obtenu $k-1$ distincts.

T_k suit classiquement la loi géométrique de paramètre $\dfrac{n-(k-1)}{N}$.

Or par construction $X=T_1+\cdots+T_n$, d'où, par linéarité de l'espérance

$$E(X)=\sum_{k=1}^{n}E\left(T_k\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{N}{n-k+1}=N\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}$$

Il est remarquable d'obtenir ce résultat sans avoir explicité la loi de probabilité de X.

En complément, voici un moyen d'obtenir ladite loi.

Pour cela je numérote les brochets de 1 à n et j'appelle, pour $k \in [\![1,n]\!], \Theta_k$ le nombre de prises nécessaires à la première obtention du brochet k. Par symétrie des rôles, les variables aléatoires Θ_k suivent la même loi, mais elle ne sont pas indépendantes... Par construction $X = \max(\Theta_1, \dots \Theta_n)$.

Pour $q < n$, j'ai bien sûr $\mathcal{P}(X = q) = 0$. Soit donc $q \geqslant n$; l'idée est de calculer $\mathcal{P}(X > q)$ (la loi de X s'en déduira par soustraction). J'ai

$$\mathcal{P}(X > q) = \mathcal{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} (\Theta_k > q)\right)$$

mais hélas les $(\Theta_k > q)$ ne sont pas incompatibles.

Il faut se résoudre à utiliser la formule (mais hors programme...) du crible de Poincaré :

$$\mathcal{P}(X > q) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_j \leqslant n} P\left(\Theta_{i_1} > q, \dots, \Theta_{i_j} > q\right)$$

Par chance l'événement $\left(\Theta_{i_1} > q, \dots, \Theta_{i_j} > q\right)$ est facile à interpréter : il signifie que les q premières prises ont donné un poisson autre que les j brochets $i_1, \dots, i_j$; par conséquent, puisque les prises sont indépendantes,

$$\mathrm{P}\left(\Theta_{i_1} > q, \dots, \Theta_{i_j} > q\right) = \left(\frac{N-j}{N}\right)^q = \left(1 - \frac{j}{N}\right)^q$$

De plus le nombre de j -uplets $(i_1, \dots, i_j)$ de $[\![1,n]\!]$

tels que $i_1 < \cdots < i_j$ n'est autre que $\binom{n}{j}$, d'où

$$\mathcal{P}(X > q) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \binom{n}{j} \left(1 - \frac{j}{N}\right)^q$$

et finalement

$$\mathcal{P}(X = q) = \mathcal{P}(X > q-1) - \mathcal{P}(X > q) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \binom{n}{j} \left(1 - \frac{j}{N}\right)^{q-1} \frac{j}{N}$$

d'où, compte tenu de la relation classique $j \binom{n}{j} = n \binom{n-1}{j-1}$,

$$\mathcal{P}(X = q) = \frac{n}{N} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \binom{n-1}{j-1} \left(1 - \frac{j}{N}\right)^{q-1}$$

Bôf...

Mines 2018 equa diff

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = e^x f(y) + e^y f(x)$$

Sol :

Il existe au moins une solution : la fonction nulle.

Si f est solution, alors $f(0) = 0$ (choisir $x = y = 0$).

Si f est solution, alors pour tous $(a, h) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} f(a+h) &= \mathrm{e}^a f(h) + \mathrm{e}^h f(a) \\ &= \mathrm{e}^a \left(h f'(0) + \mathrm{o}(h)\right) + (1 + h + \mathrm{o}(h)) f(a) \\ &= 1 + (\mathrm{e}^a f'(0) + f(a)) + \mathrm{o}(h) \end{aligned}$$

Ainsi f a un DL d'ordre 1 (donc est dérivable) en a.

Plus précisément : $\forall a \in \mathbb{R}, f'(a) = f(a) + \mathrm{e}^a f'(0)$.

Ainsi f est solution de $y'(x) - y(x) = \lambda \mathrm{e}^x$, avec $\lambda = f'(0)$.

La solution générale est $y(x) = \lambda x \mathrm{e}^x + \mu \mathrm{e}^x$, avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

On se souvient de la condition $f(0) = 0$ qui impose ici $\mu = 0$.

Il ne reste plus que les fonctions $x \mapsto f_\lambda(x) = \lambda x \mathrm{e}^x$.

Réciproquement, ces fonctions sont solutions du problème.

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $f(1) = 1$ et :

$$\forall x \geqslant 1, f'(x) = \frac{1}{x^2 + f^2(x)}$$

Montrer que f a une limite finie L en $+\infty$. Montrer que $L \leqslant 1 + \frac{\pi}{4}$.

Sol :

Sur $[1, +\infty[$, f' est positive, donc f est croissante.

La fonction f admet donc en $+\infty$ une limite $L \in \overline{\mathbb{R}}$.

En particulier, pour $t \geqslant 1$, on a $f(t) \geqslant f(1) = 1$.

On en déduit $f'(t) \leqslant \dfrac{1}{t^2+1}$.

Ainsi, pour tout $x \geqslant 1$:

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + \int_1^x f'(t)\mathrm{d}t \\ &\leqslant 1 + \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = 1 + \arctan x - \frac{\pi}{4} (\star) \end{aligned}$$

Ainsi f est majorée sur $[1, +\infty[$, donc L est réel.

Quand $x \to +\infty, (\star)$ donne $L \leqslant 1 + \frac{\pi}{4}$.

On pose $a_0 = a_1 = 1$ puis :

$$\forall n \geqslant 2, a_n = a_{n-1} + (n-1)a_{n-2}$$

1. Que dire du rayon R de $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$?

2. Trouver l'expression de f.

Exprimer les a_n à l'aide d'une somme.

Sol :

1. Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leqslant n!$.

Cette propriété est vraie pour $n = 0$ et $n = 1$, rec forte.

Si c'est vrai aux rangs $n-2$ et $n-1$, alors :

$$a_n \leqslant 2(n-1)! \leqslant n(n-1)! = n!$$

ce qui achève la récurrence.

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant \dfrac{a_n}{n!} \leqslant 1$, donc $R \geqslant 1$.

2. f est indéfiniment dérivable sur $]-R, R[$.

En particulier, pour tout $x \in]-R, R[$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{(n-1)!} x^{n-1} \\
&= a_1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{a_{n-1}}{(n-1)!} x^{n-1} + x \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{a_{n-2}}{(n-2)!} x^{n-2} \\
&= f(x) + x f(x)
\end{aligned}$$

La fonction f est donc solution sur $]-R,R[$ de :

$$y' - (x+1)y = 0(E)$$

Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$, tel que :

$$\forall x \in]-R,R[, f(x) = \lambda \exp\left(\frac{x^2}{2} + x\right).$$

En fait $\lambda = f(0) = 1$.

3. On a l'égalité :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) \exp(x) \\
&= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n n!} x^{2n}\right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}\right)
\end{aligned}$$

On effectue le produit de Cauchy de ces deux séries entières de rayon $+\infty$.

Ainsi f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ avec :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{2i+j=n} \frac{1}{2^i i!} \frac{1}{j!}\right) x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=0}^{[n/2]} \frac{1}{2^i i!} \frac{1}{(n-2i)!}\right) x^n
\end{aligned}$$

Par identification, on trouve :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = n! \sum_{i=0}^{[n/2]} \frac{1}{2^i} \frac{1}{i!(n-2i)!}$$

(Oral Mines-Ponts)

On souhaite corriger le pb d'une pièce qui renvoie Pile avec la proba $p \in]0,1[$ et $p \neq \frac{1}{2}$.

On effectue une succession de deux lancers jusqu'à ce qu'ils soient différents.

Quelle est la probabilité que le tout dernier résultat soit Pile ?

Sol :

La probabilité d'obtenir deux résultats successifs identiques est $1 - 2pq$.

Soit E_n : « Les n premiers couples de lancers ont des résultats identiques,

et on obtient ensuite Face puis Pile ».

On a : $\mathbb{P}(E_n) = (1 - 2pq)^n pq$.

La probabilité demandée est donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geqslant 0} E_n\right) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (1 - 2pq)^n pq \\ &= \frac{pq}{1 - (1 - 2pq)} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

(Oral Mines-Ponts) On lance N fois une pièce équilibrée, où $N \rightsquigarrow \mathcal{G}(p)$.

Soit X le nombre de faces obtenu.

1. Montrer facilement que X est une variable aléatoire discrète.

2. Donner la loi de X conditionnée par $N = n$.

3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n$.

Déterminer le rayon de convergence R de f.

4. Calculer $f(x)$. Déterminer la loi de X.

Sol :

1. Soit X_i l'indicatrice de face au ième lancer .

$$\text{On a } X = \sum_{i=1}^{N} X_i. \text{ Poson } S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \ .$$

Pour $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$(X = k) = \biguplus_{n \geqslant 1} (N = n, S_n = k)$$

Mais N et S_n sont des variables aléatoires donc les $(N = n, S_n = k)$ sont des événements.

Ainsi $(X = k)$ est un événement, donc X est une v.a.r.

2. La loi de X conditionnée par $(N = n)$ est $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$.

3. Pour $x \neq 0$ et $n \geqslant k$, on pose $u_n(x) = \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) x^n$.

On a : $\left|\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \dfrac{n+1}{n+1-k}|x| \overset{n \to +\infty}{\to} |x|$.

Ainsi le rayon de $\displaystyle\sum_{n \geqslant k} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) x^n$ est $R = 1$.

4. Pour $x \in]-1, 1[$, soit :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^k}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)x^{n-k} \\ &= \frac{x^k}{k!} h^{(k)}(x) \end{aligned}$$

$$\text{où } h(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^k$$

Par récurrence facile : $h^{(k)}(x) = \dfrac{k!}{(1-x)^{k+1}}$.

Ainsi : $\forall x \in]-1, 1[, f(x) = \dfrac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$..

- Si $k = 0$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = 0) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}_{(N=n)}(X = 0)\mathbb{P}(N = n) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n p(1-p)^{n-1} = \frac{p}{1+p} \end{aligned}$$

- Si $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=k) &= \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}_{(N=n)}(X=k)\mathbb{P}(N=n) \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n p(1-p)^{n-1}\end{aligned}$$

En posant $q = 1-p$, et avec ce qui précède :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=k) &= \frac{p}{q}\frac{(q/2)^k}{(1-q/2)^{k+1}} \\ &= \frac{2p}{(1+p)^2}\left(\frac{1-p}{1+p}\right)^{k-1}\end{aligned}$$

À titre de vérification :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k) &= \frac{p}{1+p} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2p}{(1+p)^2}\left(\frac{1-p}{1+p}\right)^{k-1} \\ &= \frac{p}{1+p} + \frac{2p}{(1+p)^2}\frac{1}{1-\frac{1-p}{1+p}} = 1\end{aligned}$$

C'est pas plus mal.

(Oral Mines-Ponts)

Soit A, B deux v.a.r. suivant la loi $\mathcal{G}(p)$. Déterminer la probabilité que les solutions de :

$$(E_\omega) : y'' + (A-1)y' + By = 0$$

tendent vers 0 en $+\infty$.

Soit U l'ensemble des couples $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que les solutions de (E_ω) tendent vers 0 en $+\infty$.

On demande la probabilité de l'événement $((A,B) \in U)$.

Notons $(E_{m,p}) : y'' + my' + py = 0$.

Son équation caractéristique est

$$(\mathcal{C}_{m,p}) : r^2 + mr + p = 0$$

de discriminant $\Delta_{m,p} = m^2 - 4p$.

- On suppose $\Delta_{m,p} > 0$.

Soient r_1, r_2 les racines réelles distinctes de $(\mathcal{C}_{m,p})$.

Les solutions réelles de $(E_{m,p})$ sont les :

$$x \mapsto y(x) = \lambda \mathrm{e}^{r_1 x} + \mu \mathrm{e}^{r_2 x}$$

où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Elles tendent toutes vers 0 en $+\infty$ si et seulement si $r_1 < 0$ et $r_2 < 0$.

Sachant que $r_1 + r_2 = -m$ et $r_1 r_2 = p$, cela équivaut à $m > 0$ et $q > 0$.

- On suppose $\Delta_{m,p} = 0$.

Soit $r = -m/2$ la racine réelle double de $(\mathcal{C}_{m,p})$.

Les solutions réelles y de $(E_{m,p})$ sont les :

$$x \mapsto y(x) = (\lambda + \mu x)\mathrm{e}^{rx}$$

où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Elles tendent toutes vers 0 en $+\infty$ si et seulement si $r < 0$,

c'est-à-dire $m \geqslant 0$, donc $q = m^2/4 > 0$.

- On suppose $\Delta_{m,p} < 0$.

Soient $r_1 = -m/2 + i\delta$ et $r_2 = \overline{r_1}$ les racines non réelles $(\mathcal{C}_{m,p})$, avec $\delta^2 = \Delta$.

Les solutions réelles y de $(E_{m,p})$ sont les :

$$x \mapsto y(x) = \mathrm{e}^{-m/2x}(\lambda \cos \delta x + \mu \sin \delta x)$$

avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Ces solutions tendent toutes vers 0 si et seulement si $m > 0$, donc $q > m^2/4 > 0$.

En conclusion, les solutions réelles de $y'' + my + py = 0$

tendent vers 0 en $+\infty$ si et seulement si $m > 0, q > 0$.

La probabilité demandée est : $\mathbb{P}((A > 1) \cap (B > 0)\ )$.

Or B suit une loi géométrique donc $B>0$ est certain.

En conclusion :

$$\mathbb{P}((A>1)\cap(B>0))=\mathbb{P}(A>1)=1-p$$

(Oral Mines-Ponts)

Dans une urne, n boules numérotées de 1 à n.

On effectue n tirages successifs sans remise.

Soit X_k le numéro de la boule tirée à l'étape k. On dit qu'il y a un pic si $X_k>\max\left(X_1,\ldots,X_{k-1}\right)$.

On convient qu'ily a toujours un pic au premier tirage.

Soit S_n le nombre de pics au cours des n tirages.

1. Déterminer $\mathbb{P}\left(S_n=1\right)$ et $\mathbb{P}\left(S_n=n\right)$.

2. Soit T_k la variable indicatrice de l'évènement :

« il y a un pic au k -ème tirage ˇ.

Déterminer la loi de T_k. Donner l'espérance de S_n.

Sol :

1. $\left(S_n=1\right)$ est réalisé si la 1ère boule a le numéro n.

Ainsi $\mathbb{P}\left(S_n=1\right)=\mathbb{P}\left(X_1=n\right)=\dfrac{1}{n}$.

On a $S_n=n$ si le tirage est dans l'ordre croissant :

$$\mathbb{P}\left(S_n=n\right)=\mathbb{P}\left(X_1=1,\ldots,X_n=n\right)=\frac{1}{n!}$$

2. Pour $k\geqslant 1$, on note $M_k=\max\left\{X_1,\ldots,X_{k-1}\right\}$.

Soit $k\geqslant 2$. Dire que $\left(T_k=1\right)$ est réalisé,

c'est dire qu'il existe $j\in[[k,n]]$ tel que le k -ième tirage a donné la boule j et tous les tirages précédents ont amené des boules de numéro inférieur à j. Ainsi

$$(T_k = 1) = \biguplus_{j=k}^{n} ((X_k = j) \cap (M_k < j))$$

On en déduit : $\mathbb{P}(T_k = 1) = \sum_{j=k}^{n} \mathbb{P}(M_k < j) \mathbb{P}(X_k = j \mid M_k < j)$.

Or $\mathbb{P}(M_k < j) = \begin{pmatrix} j-1 \\ k-1 \end{pmatrix} / \begin{pmatrix} n \\ k-1 \end{pmatrix}$ et

$$\mathbb{P}(X_k = j \mid M_k < j) = \frac{1}{n-(k-1)}$$

Il en découle :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_k = 1) &= \frac{1}{n-k+1} \frac{1}{\begin{pmatrix} n \\ k-1 \end{pmatrix}} \sum_{j=k}^{n} \begin{pmatrix} j-1 \\ k-1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{(n-k+1)} \frac{1}{\begin{pmatrix} n \\ k-1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} j \\ k \end{pmatrix} = \frac{1}{k} \end{aligned}$$

Ce résultat est valable pour $k = 1$.

On a $S_n = \sum_{k=1}^{n} T_k$, donc par linéarité de l'espérance :

$$E(S_n) = \sum_{k=1}^{n} E(T_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

(Oral Centrale)

On considère des variables aléatoires sur un espace probabilisé.

1. Soit $Y \rightsquigarrow \mathcal{B}(n,p)$. Donner sa fonction génératrice.

2. Soient Y, Z indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$, et non constantes.

On suppose $U = Y + Z \rightsquigarrow \mathcal{B}(n,p)$.

Montrer que Y, Z suivent des lois binomiales.

Sol :

1. C'est du cours : $G_Y(t) = E\left(t^Y\right) = (pt+q)^n$.

2. On a $U(\Omega) \subset [0, n]$ donc $\left\{ \begin{array}{l} Y(\Omega) \subset [0, n] \\ Z(\Omega) \subset [0, n] \end{array} \right.$

Ainsi $G_Y(t)$ et $G_Z(t)$ sont donc des polynômes.

Comme Y et Z sont indépendantes, on

$$G_U(t) = (pt + q)^n = G_Y(t)G_Z(t)$$

Ainsi G_Y et G_Z divisent $(pt + q)^n$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Il existe $m, r \in [\![0, n]\!], c, d \in \mathbb{R}^*$ tels que :

$$G_Y(t) = c(pt + q)^m \text{ et } G_Z(t) = d(pt + q)^r$$

Or $G_Y(1) = 1$ donc $c = 1$ et $d = 1$.

Et Y, Z sont non certaines donc $m \geqslant 1, r \geqslant 1$.

Ainsi $\left\{ \begin{array}{l} \mathrm{G}_Y(t) = (pt + q)^m \\ \mathrm{G}_Z(t) = (pt + q)^r \end{array} \right.$

Donc $\left\{ \begin{array}{l} Y \rightsquigarrow \mathcal{B}(m, p) \\ Z \rightsquigarrow \mathcal{B}(r, p) \end{array} \right.$ avec $m + r = n$

(Oral X-Ens)

Soit $n \geqslant 2$ un entier.

On choisit au hasard une racine n -ème de l'unité Z.

On note $\theta = \arg(Z) \in [0, 2\pi[$.

Soient $X = \mathrm{Re}(Z)$ et $Y = \mathrm{Im}(Z)$.

1. Calculer $E(\theta), E(X)$ et $E(Y)$.

2. Calculer $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

3. X et Y sont elles indépendantes ?

Sol :

1. On trouve $E(\theta) = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{2k\pi}{n} = \dfrac{(n-1)\pi}{n}$.

On a $\mathrm{E}(Z) = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{z \in U_n} z = 0$ donc $E(X) = E(Y) = 0$.

2. Tout d'abord :

$$\operatorname{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E(XY)$$

Il en découle :

$$\begin{aligned}\operatorname{Cov}(X,Y) &= E(XY)\\ &= \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\\ &= \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(\frac{4k\pi}{n}\right) = \frac{1}{2n}\operatorname{Im}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{e}^{4ik\pi/n}\right)\end{aligned}$$

Si $n = 2$, alors $\mathrm{e}^{4i\pi/n} = 1$ et

$$\operatorname{Cov}(X,Y) = E(XY) = \frac{1}{4}(\sin 0 + \sin 2\pi) = 0$$

Si $n \geqslant 3$, alors $\mathrm{e}^{4i\pi/n} \neq 1$.

Dans ce cas : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{e}^{4i\pi/n} = \frac{1-\mathrm{e}^{4ik\pi}}{1-\mathrm{e}^{4ik\pi/n}} = 0.$

On a donc obtenu $\operatorname{Cov}(X,Y) = 0$ quand $n \geqslant 3$.

3. Si $n = 2$, sachant $\mathrm{U}_n = \{-1, 1\}$, on a $Y = 0$

presque sûrement donc les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

On suppose maintenant $n \geqslant 3$, et soit $y = \sin\dfrac{2\pi}{n}$.

On a $P(X = 1, Y = y) = 0$.

Par ailleurs $P(X = 1) = \dfrac{1}{n}$ et $P(Y = y) \geqslant \dfrac{1}{n}$.

Ainsi $P(X = 1, Y = y) \neq P(X = 1)P(Y = y)$.

Si $n \geqslant 3$, X et Y ne sont donc pas indépendantes.

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Elles suivent la même loi définie par :

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(Y = k) = pq^k \text{ où } p \in]0, 1[$$

On pose $U = \sup(X, Y)$ et $V = \inf(X, Y)$.

1. Déterminer la loi du couple (U, V).

2. Expliciter les lois marginales de U et de V.

3. U et V sont-elles indépendantes ?

Sol :

1. L'ensemble image du couple (U, V) est :

$$(U, V)(\Omega) = \left\{(m, n) \in \mathbb{N}^2 \text{ tel que } m \geqslant n\right\}$$

Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $m \geqslant n$. - Premier cas : $m = n$. Par indépendance de X et Y, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}((U = m) \cap (V = n)) &= \mathbb{P}((X = n) \cap (Y = n)) \\ &= \mathbb{P}(X = n)\mathbb{P}(Y = n)\end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } \mathbb{P}((U = m) \cap (V = n)) = p^2 q^{2n}$$

- Deuxième cas : $m > n$. On a :

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}((U = m) \cap (V = n)) \\ &= \mathbb{P}([(X = m) \cap (Y = n)] \\ &\cup [(X = n) \cap (Y = m)])\end{aligned}$$

Les événements

$$\left\{\begin{array}{l}(X = m) \cap (Y = n) \\ (X = n) \cap (Y = m)\end{array}\right.$$

sont incompatibles donc :

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}((U = m) \cap (V = n)) \\ &= \mathbb{P}((X = m) \cap (Y = n)) \\ &\quad + \mathbb{P}((X = n) \cap (Y = m))\end{aligned}$$

Or les variables X et Y suivent la même loi et sont indépendantes donc :

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}((U = m) \cap (V = n)) \\ &= 2P(X = m)\mathbb{P}(Y = n) = 2p^2 q^{n+m}\end{aligned}$$

- Conclusion :

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}((U = m) \cap (V = n)) \\ &= \left\{\begin{array}{ll}p^2 q^{2n} & \text{si } m = n \\ 2p^2 q^{n+m} & \text{si } m > n \\ 0 & \text{sinon}\end{array}\right.\end{aligned}$$

2. On a $U(\Omega) = V(\Omega) = \mathbb{N}$. Soit $m \in \mathbb{N}$.

La 1ère loi marginale de (U,V) est :

$$\mathbb{P}(U=m)=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}((U=m)\cap(V=n))$$

En utilisant la question précédente :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(U=m)=&\mathbb{P}((U=m)\cap(V=m))\\&+\sum_{n=0}^{m-1}\mathbb{P}((U=m)\cap(V=n))\\=&p^2q^{2m}+\sum_{n=0}^{m-1}2p^2q^{n+m}\\=&p^2q^{2m}+2p^2q^m\sum_{n=0}^{m-1}q^n\\=&p^2q^{2m}+2p^2q^m\frac{1-q^m}{1-q}\end{aligned}$$

$= p^2q^{2m}+2pq^m\left(1-q^m\right)$
$= pq^m\left(pq^m+2-2q^m\right)$

De même, pour la deuxième loi marginale :

$\mathbb{P}(V=n)=\sum_{m=0}^{+\infty}\mathbb{P}((U=m)\cap(V=n))$
$=\mathbb{P}((U=n)\cap(V=n))$
$+\sum_{m=n+1}^{+\infty}\mathbb{P}((U=m)\cap(V=n))$.
$=p^2q^{2n}+\sum_{m=n+1}^{+\infty}2p^2q^{n+m}$
$=p^2q^{2n}+2p^2q^{2n+1}\sum_{m=n+1}^{+\infty}q^{m-n-1}$
$=p^2q^{2n}+2p^2q^{2n+1}\frac{1}{1-q}$
$=p^2q^{2n}+2pq^{2n+1}=pq^{2n}(1+q)$

3. On constate que $\mathbb{P}((U=0)\cap(V=1))=0$ et :

$$\mathbb{P}(U=0)\mathbb{P}(V=1)=p^2pq^2(1+q)\neq 0$$

Les variables aléatoires U et V ne sont donc pas indépendantes.

(Oral Centrale 2018)

Soit quatre cases numérotées de 1 à 4 .

À l'étape $n=0$, un jeton est placé sur la case 1.

Si à l'étape n, il se trouve sur la case $k \in \{2,3,4\}$, il va en $k-1$;

sinon, il va au hasard sur une des cases $2,3,4$.

On note X_n la variable aléatoire donnant la case à la date n et U_n la colonne des

$P\left(X_n=i\right)$ pour $1 \leqslant i \leqslant 4$.

1. Avec Python, écrire une fonction d'argument n et renvoyant les positions successives

d'une réalisation de cette expérience, et tracer ces positions pour $n=10, n=50$ et $n=100$.

Conjecture ?

2. Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1}=A U_n$$

3. Diagonaliser A ; en déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

4. On note $Y_n(i)=\operatorname{card}\{k \leqslant n, X_k=i\}$.

Chercher expérimentalement la loi de $Y_n(i)$.

Sol :

D'abord les codes.

```
from random import *
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
def positions(n):
    pos=1
    listpos=[1]
    for k in range(n):
        if pos >1: pos =-1
        else: pos =randint(2,4)
        listpos.append(pos)
    return listpos
def trace(n):
    listpos=positions(n)
    plt.clf()
    plt.plot(listpos,'o-')
    plt.show()
def frequences(d,n):
    listpos=positions(d+n-1)[d::]
    freqs=[0]*4
    for k in range(n):
        freqs[listpos[k]-1]+=1
    return [freqs[k]/n for k in range(4)]
def Y(n):
    listpos=positions(n)
    y=[0]*4
    for k in range(n):
        y[listpos[k]-1]+=1
    return y
# A=np.array([[0,3,0,0],[1,0,3,0],[1,0,0,3],[1,0,0,0]])/3
#[a,b,c,d]=np.linalg.eigvals(A)
#np.round([a,b,c,d],5)
#array([ 1.00000+0.j     , -0.71806+0.j     , -0.14097+0.66659j,
       -0.14097-0.66659j])
#np.abs([a,b,c,d])
#array([ 1.        ,  0.71805717,  0.68133369,  0.68133369])
>>> P=np.linalg.eig(A)[1]
#>>> P
array([[ 0.62554324+0.j        ,  0.75285378+0.j        ,
         0.65750284+0.j        ,  0.65750284+0.j        ],
       .....      ,
        -0.06655608-0.3147137j , -0.06655608+0.3147137j ]])
>>> D=np.linalg.inv(P).dot(A).dot(P)
```

```
#>>> np.round(D,5)
array([[ 1.00000+0.j     ,  0.00000+0.j     ,  0.00000+0.j     ,
         0.00000+0.j     ],
       [ 0.00000+0.j     , -0.71806+0.j     ,  0.00000+0.j     ,
         0.00000+0.j     ],
       [ 0.00000+0.j     ,  0.00000+0.j     , -0.14097+0.66659j,
         0.00000+0.j     ],
       [ 0.00000+0.j     ,  0.00000+0.j     ,  0.00000+0.j     ,
        -0.14097-0.66659j]])
>>> Delta=np.diag([1,0,0,0])
>>> B=P.dot(Delta).dot(np.linalg.inv(P))
>>> np.real(B)
array([[ 0.33333333,  0.33333333,  0.33333333,  0.33333333],
       [ 0.33333333,  0.33333333,  0.33333333,  0.33333333],
       [ 0.22222222,  0.22222222,  0.22222222,  0.22222222],
       [ 0.11111111,  0.11111111,  0.11111111,  0.11111111]])
>>> Y(999)
[1, 175, 658, 165]
>>> Y(999)
[1, 156, 667, 175]
>>>
>>> Y(999)
[1, 172, 649, 177]
>>> Y(999)
[1, 175, 669, 154]
```

On peut conjecturer que pour n "assez grand" :

$$\mathbb{P}(X_n = 4) \leqslant \mathbb{P}(X_n = 3) \quad \leqslant \mathbb{P}(X_n = 2) \leqslant \mathbb{P}(X_n = 1)$$

On écrit frequences (d, n) donnant les fréquences pour n dates à partir de la date d.

Voir code.

On peut donc raisonnablement penser que :

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(X_n = 1) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(X_n = 2) = \frac{1}{3}$$
$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(X_n = 3) = \frac{2}{9}, \quad \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(X_n = 4) = \frac{1}{9}$$

2. Pour simplifier, on pose $U_n = (a_n, b_n, c_n, d_n)^T$.

Avec le système complet d'événements

$$(X_n = 1), (X_n = 2), (X_n = 3), (X_n = 4)$$

on trouve respectivement :

$$\mathbb{P}\left(X_{n+1}=1\right)=\sum_{k=1}^{4} \mathbb{P}\left(X_{n}=k\right) \mathbb{P}_{\left(X_{n}=k\right)}\left(X_{n+1}=2\right)$$
$$=\mathbb{P}\left(X_{n}=2\right)$$
$$\mathbb{P}\left(X_{n+1}=2\right)=\sum_{k=1}^{4} \mathbb{P}\left(X_{n}=k\right) \mathbb{P}_{\left(X_{n}=k\right)}\left(X_{n+1}=2\right)$$
$$=\frac{1}{3} \mathbb{P}\left(X_{n}=1\right)+\mathbb{P}\left(X_{n}=3\right)$$

$$\mathbb{P}\left(X_{n+1}=3\right)=\sum_{k=1}^{4} \mathbb{P}\left(X_{n}=k\right) \mathbb{P}\left(X_{n}=k\right)\left(X_{n+1}=3\right)$$
$$=\frac{1}{3} \mathbb{P}\left(X_{n}=1\right)+\mathbb{P}\left(X_{n}=4\right)$$
$$\mathbb{P}\left(X_{n+1}=4\right)=\sum_{k=1}^{4} \mathbb{P}\left(X_{n}=k\right) \mathbb{P}_{\left(X_{n}=k\right)}\left(X_{n+1}=3\right)$$
$$=\frac{1}{3} \mathbb{P}\left(X_{n}=1\right)$$

Ces résultats se résument en l'égalité matricielle :

$$U_{n+1}=A U_{n} \text { avec } A=\frac{1}{3}\left(\begin{array}{llll}
0 & 3 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 3 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 3 \\
1 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)$$

3. On diagonalise A. On trouve :

$$\begin{aligned}
\chi_{A}(\lambda) & =\frac{1}{81}\left|\begin{array}{cccc}
3 \lambda & -3 & 0 & 0 \\
-1 & 3 \lambda & -3 & 0 \\
-1 & 0 & 3 \lambda & -3 \\
-1 & 0 & 0 & 3 \lambda
\end{array}\right| \\
& =\lambda^{4}+\frac{1}{27}\left|\begin{array}{ccc}
-1 & -3 & 0 \\
-1 & 3 \lambda & -3 \\
-1 & 0 & 3 \lambda
\end{array}\right| \\
& =\lambda^{4}+\frac{1}{27}\left(-9 \lambda^{2}-9-9 \lambda\right) \\
& =\lambda^{4}-\frac{1}{3}\left(\lambda^{2}+\lambda+1\right)
\end{aligned}$$

NB : on peut trouver χ_{A} plus vite, car c'est le déterminant d'une matrice-compagnon.

On ne trouve pas mieux que la factorisation :

$$\chi_A(\lambda) = \frac{1}{3}(\lambda - 1)\left(3\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda + 1\right)$$

Le fait que $\lambda = 1$ soit valeur propre n'est pas étonnant (A est stochastique).

La matrice $A - I_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ est de rang 3, donc $E_A(1)$ est une droite.

Un vecteur directeur de $E_A(1)$ est $\varepsilon_1 = (3, 3, 2, 1)$.

On finit la diagonalisation de A avec Python :

Il y a donc quatre valeurs propres distinctes :

$$\begin{aligned} &a = 1, \quad b \approx -0.71806 \\ &c \approx -0.14097 + i0.66659, \quad d = \bar{c} \end{aligned}$$

Les valeurs propres $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ vérifient $|\lambda_i| < 1$ (habituel pour une matrice stochastique).

Voici le calcul en Python d'une matrice de diagonalisation

(I'ordre des valeurs propres reste le même) :

On vérifie que P est une matrice de passage vers une réduite diagonale D de A .

Ainsi $A = PDP^{-1}$ donc $A^n = PD^nP^{-1}$.

De plus $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d^n \end{pmatrix}$.

Donc D^n tend vers $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Posons $B = \lim\limits_{n \to +\infty} A^n = P\Delta P^{-1}$.

On forme Δ et on calcule B avec Python :

Ainsi $B = \lim\limits_{n \to +\infty} A^n = (\varepsilon_1 \,|\varepsilon_1|\, \varepsilon_1 \mid \varepsilon_1)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $U_n = AU_{n-1}$.

On en déduit l'égalité : $U_n = A^n U_0$.

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = BU_0 = B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Pour justifier de façon théorique les résultats numériques précédents,

on peut avancer les explications suivantes :

- La suite $n \mapsto A^n$ converge vers $B = P\Delta P^{-1}$ qui est rang 1 (comme Δ).

- On a $\Delta^2 = \Delta$ donc $B^2 = B$.

B est une matrice de projection sur une droite.

- On a $A\varepsilon_1 = \varepsilon_1$, donc $A^n\varepsilon_1 = \varepsilon_1$.

À la limite, on trouve : $B\varepsilon_1 = \varepsilon_1$.

Les colonnes de la matrice de projection B sont donc colinéaires à ε_1.

Mais A est stochastique (suivant les colonnes).

Cela reste vrai pour les A^n donc pour B. Les colonnes de B sont donc éqales à ε_1.

4. La variable $Y_n(i)$ mesure le nombre de fois où le jeton se trouve dans la case $n^\circ i$,

entre la date 0 et la date n (comprises). On pourrait réutiliser notre fonction fréquences,

mais on va réécrire une fonction y plus simple :

Expérimentalement, le résultat est donc le suivant :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{Y_n(1)}{n} = \frac{1}{3}, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{Y_n(2)}{n} = \frac{1}{3}$$
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{Y_n(3)}{n} = \frac{2}{9}, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{Y_n(4)}{n} = \frac{1}{9}$$

(Oral Mines-Ponts 2018)

Dans une urne (proportion $p \in]0,1[$ de boules blanches, et le reste en boules noires,

on effectue des tirages successifs avec remise.

On note X_1, X_2 les longueurs des deux premières suites monocolores.

Par exemple, si on tire $B, B, B, N, N, B, \ldots$ alors $X_1 = 3$ et $X_2 = 2$.

1. Donner la loi de $X_1, E(X_1)$ et $V(X_1)$.

2. Donner la loi du couple (X_1, X_2).

En déduire la loi de $X_2, E(X_2)$ et $V(X_2)$.

Sol :

L'événement $(X_1 = +\infty, X_2 = 0)$ (tirage monochrome) est négligeable.

À ceci près, on peut dire que X_1, X_2 sont à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

On note B_k (resp. N_k) l'événement la k -ième boule est blanche (resp. noire).

Plus généralement, on note :

$$B_{[i,j]} = \bigcap_{k=i}^{j} B_k \text{ et } N_{[i,j]} = \bigcap_{k=i}^{j} N_k$$

Pour $p \in [0, 1[$, soit Z_p une v.a.r. suivant $\mathcal{G}(p)$.

1. La loi de X_1 :

En utilisant le système complet d'événements B_1, N_1, et pour tout $n \geqslant 1$:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X_1 = n) \\
&= \mathbb{P}(B_1 \cap (X_1 = n)) + \mathbb{P}(N_1 \cap (X_1 = n)) \\
&= \mathbb{P}\left(B_{[1,n]} \cap N_{n+1}\right) + \mathbb{P}\left(N_{[1,n]} \cap B_{n+1}\right) \\
&= p^n q + q^n p
\end{aligned}$$

On remarque qu'on peut écrire :

$$\mathbb{P}(X_1 = n) = p\mathbb{P}(Z_q = n) + q\mathbb{P}(Z_p = n)$$

On en déduit l'espérance de X_1 :

$$\begin{aligned}
E\left(X_1\right) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n\mathbb{P}\left(X_1 = n\right) \\
&= p\sum_{n=1}^{+\infty} n\mathbb{P}\left(Z_q = n\right) + q\sum_{n=1}^{+\infty} n\mathbb{P}\left(Z_p = n\right) \\
&= pE\left(Z_q\right) + qE\left(Z_p\right) = \frac{p}{q} + \frac{q}{p}
\end{aligned}$$

On calcule de même l'espérance de X_1^2 :

$$\begin{aligned}
E\left(X_1^2\right) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n^2\mathbb{P}\left(X_1 = n\right) \\
&= p\sum_{n=1}^{+\infty} n^2\mathbb{P}\left(Z_q = n\right) + q\sum_{n=1}^{+\infty} n^2\mathbb{P}\left(Z_q = n\right) \\
&= pE\left(Z_q^2\right) + qE\left(Z_p^2\right)
\end{aligned}$$

Mais si $Z_p \rightsquigarrow \mathcal{G}(p)$ alors :

$$E\left(Z_p^2\right) = E^2\left(Z_p\right) + V\left(Z_p\right) = \frac{1+q}{p^2}$$

On en déduit la variance de X_1 :

$$\begin{aligned}
V\left(X_1\right) &= E\left(X_1^2\right) - E^2\left(X_1\right) \\
&= p\frac{1+p}{q^2} + q\frac{1+q}{p^2} - \left(\frac{p}{q} + \frac{q}{p}\right)^2 \\
&= \frac{p}{q^2} + \frac{q}{p^2} - 2
\end{aligned}$$

Remarques :

On note $E\left(X_1\right) = \varphi\left(\frac{q}{p}\right) = \varphi\left(1 - \frac{1}{p}\right)$ où

$$\forall x > 0, \varphi(x) = \frac{1}{x} + x$$

Pour tout $x > 0$, on a $\varphi'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$.

Ainsi φ décroît sur $]0, 1[$ et croît sur $]1, +\infty[$.

Le minimu de φ est donc $\varphi(1) = 2$.

Ainsi $\min E(X_1) = 2$, obtenu pour $p = \dfrac{1}{2}$.

- De même $\min V(X_1) = 2$, obtenu pour $p = \dfrac{1}{2}$.

- Si on échange p et q, $E(X_1)$ et $V(X_1)$ restent inchangés :

c'est logique compte tenu de la symétrie du problème.

2. Loi du couple (X_1, X_2) :

Pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X_1 = m, X_2 = n) \\
&= \mathbb{P}(B_1 \cap (X_1 = m, X_2 = n)) \\
&\quad + \mathbb{P}(N_1 \cap (X_1 = m, X_2 = n)) \\
&= \mathbb{P}\left(B_{[1,m]} \cap N_{[m+1,m+n]} \cap B_{m+n+1}\right) \\
&\quad + \mathbb{P}\left(N_{[1,m]} \cap B_{[m+1,m+n]} \cap N_{m+n+1}\right) \\
&= p^{m+1}q^n + q^{m+1}p^n
\end{aligned}$$

La loi de X_2 :

- Par sommation dans la marge :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_2 = n) &= \sum_{m=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_1 = m, X_2 = n) \\
&= \sum_{m=1}^{+\infty} \left(p^{m+1}q^n + q^{m+1}p^n\right) \\
&= q^n \frac{p^2}{1-p} + p^n \frac{q^2}{1-q} \\
&= p^2 q^{n-1} + q^2 p^{n-1}
\end{aligned}$$

Remarque : pour se rassurer, on vérifie que :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_2 = n) &= p^2 \frac{1}{1-q} + q^2 \frac{1}{1-p} \\
&= p + q = 1
\end{aligned}$$

Cette fois-ci on peut écrire :

$$\mathbb{P}(X_2 = n) = p\mathbb{P}(Z_p = n) + q\mathbb{P}(Z_q = n)$$

On en déduit l'espérance de X_2 :

$$\begin{aligned} E(X_2) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n\mathbb{P}(X_2 = n) \\ &= p\sum_{n=1}^{+\infty} n\mathbb{P}(Z_p = n) + q\sum_{n=1}^{+\infty} n\mathbb{P}(Z_q = n) \\ &= pE(Z_p) + qE(Z_q) = 2 \end{aligned}$$

(vous je sais pas, mais moi je trouve ça dingue comme résultat).

4. Ensuite, on trouve l'espérance de X_2^2 :

$$\begin{aligned} E\left(X_2^2\right) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n^2\mathbb{P}(X_2 = n) \\ &= p\sum_{n=1}^{+\infty} n^2\mathbb{P}(Z_p = n) + q\sum_{n=1}^{+\infty} n^2\mathbb{P}(Z_q = n) \\ &= pE\left(Z_p^2\right) + qE\left(Z_q^2\right) \end{aligned}$$

On en déduit la variance de X_2 :

$$\begin{aligned} V(X_2) &= E\left(X_2^2\right) - E^2(X_2) \\ &= p\frac{2-p}{p^2} + q\frac{2-q}{q^2} - 4 \\ &= 2\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 3\right) \end{aligned}$$

Ici, $\min V(X_2) = 2$, obtenu pour $p = \frac{1}{2}$..

- Si on échange p, q, alors $V(X_2)$ reste inchangée (logique par symétrie du problème).

(Oral Mines-Ponts 2018) Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ des v.a.r. indépendantes telles que

$$\begin{cases} X_i(\Omega) = \{-1, 1\} \\ \mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = -1) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

1. Soit $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Déterminer $\mathbb{P}(S_n = 0)$.

2. Pour $k \in \mathbb{N}$, soit $q_k = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} (S_n \geqslant k)\right)$.

Montrer que $q_k = \dfrac{1}{2}\left(q_{k-1} + q_{k+1}\right)$.

En déduire que $q_k = 1$ pour tout k.

3. Soit $k \in \mathbb{Z}$. Que vaut $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\left(S_n \leqslant k\right)\right)$?

4. Montrer que presque surement la suite (S_n) prend une infinité de fois la valeur k.

Sol :

La variable S_n modélise la position à la date n d'un point se déplaçant sur aléatoirement sur $\mathbb{Z}$, qui à la date 0 se trouve à la position 0 et pour qui, à chaque étape, la probabilité est la même de se déplacer d'une position vers la droite ou vers la gauche.

1. Pour revenir en 0 à l'instant n, il faut avoir fait autant de pas à droite qu'à gauche.

Si n est impair, on a donc $\mathbb{P}\left(S_n = 0\right) = 0$.

- Pour revenir en 0 à l'instant $n = 2p$, il faut avoir fait p pas à droite (donc p à gauche).

Il y a $\begin{pmatrix} 2p \\ p \end{pmatrix}$ façons de choisir les pas à droite.

On peut donc écrire : $\mathbb{P}\left(S_n = 0\right) = \dfrac{1}{2^{2p}}\begin{pmatrix} 2p \\ p \end{pmatrix}$.

2. Pour $k \in \mathbb{N}$, on note : $E_k = \bigcup\limits_{n\geqslant 1}\left(S_n \geqslant k\right)$.

L'événement E_k dit que l'une au moins S_n a atteint ou dépassé la valeur k.

- Pour tout entier $k \geqslant 1$, on a :

$$\mathbb{P}\left(E_k\right) = \frac{1}{2}\left(\mathbb{P}_{(X_1=1)}\left(E_k\right) + \mathbb{P}_{(X_1=-1)}\left(E_k\right)\right)(\star)$$

Mais si $X_1 = 1$, dire que E_k est réalisé c'est dire qu'une somme $X_2 + \cdots + X_n$ au moins a atteint ou dépassé $k-1$: les X_i étant de même loi (et indépendantes), cette probabilité conditionnelle vaut clairement $\mathbb{P}\left(E_{k-1}\right)$.

Avec le même raisonnement, on trouve :

$$\mathbb{P}_{(X_1=-1)}\left(E_k\right) = \mathbb{P}\left(E_{k+1}\right)$$

Ainsi, pour tout $k \geqslant 1$, on a :

$$\mathbb{P}(E_k) = \frac{1}{2}\left(\mathbb{P}(E_{k-1}) + \mathbb{P}(E_{k+1})\right)$$
$$\text{donc } q_k = \frac{1}{2}\left(q_{k-1} + q_{k+1}\right)$$

- La relation précédente nous dit que $(q_k)_{k\geqslant 0}$ est une suite arithmétique.

Mais les q_k sont dans $[0,1]$, donc cette suite arithmétique ne peut qu'être constante.

Si on applique l'égalité $(\star)$ avec $k=1$, on trouve :

$$\mathbb{P}(E_1) = \frac{1}{2}\left(\mathbb{P}_{(X_1=1)}(E_1) + \mathbb{P}(X_1=-1)(E_1)\right)(\star)$$

Mais $\mathbb{P}_{(X_1=1)}(E_1) = 1$: en effet si $X_1 = 1, E_1$ est automatiquement réalisé.

De même, en reprenant un raisonnement précédent, $\mathbb{P}_{(X_1=-1)}(E_1) = \mathbb{P}(E_2)$.

On a donc obtenu : $q_1 = \dfrac{1}{2}(1+q_2)$.

Ainsi $q_1 = \dfrac{1}{2}(1+q_1)$ donc $q_1 = 1$.

Finalement, on a $q_k = 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

3. On applique ce qui précède à $Y_k = -X_k$.

Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}(-S_n \geqslant k)\right) = 1$$
$$\text{donc } \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}*}(S_n \leqslant -k)\right) = 1$$

Ceci entraîne en particulier :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(S_n \leqslant k)\right) = 1$$

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on franchit presque surement l'abscisse k (vers la droite ou la gauche).

4. Soit E l'événement : La suite (S_n) prend une infinité de fois la valeur k.

Par l'absurde, supposons que E non quasi certain.

On se souvient que $E=\bigcap_{p\in\mathbb{N}^*}\left(\bigcup_{n\geqslant p}(S_n=k)\right)$.

On note $\Delta=\bar{E}$ et pour $p\in\mathbb{N}^*$, on pose :

$$\Delta_p=\bigcap_{n\geqslant p}(S_n\neq k)\ \text{ et }\ \Delta=\bigcup_{p\in\mathbb{N}^*}\Delta_p$$

Ainsi $\mathbb{P}(\Delta)>0$, donc : $\exists p_0,\mathbb{P}\left(\Delta_{p_0}\right)>0$.

A priori :

$$\Delta_{p_0}=\bigcap_{n\geq p_0}\left((S_n\leqslant k-1)\cup(S_n\geqslant k+1)\right)$$

On montre que :

$$\begin{aligned}\Delta_{p_0}&=\left(\bigcap_{n\geqslant p_0}(S_n\leqslant k-1)\right)\cup\left(\bigcap_{n\geqslant p_0}(S_n\geqslant k+1)\right)\\&=\Delta_{p_0,1}\cup\Delta_{p_0,2}\end{aligned}$$

Soit $\omega\in\Delta_{p_0}$; on peut supposer $S_{p_0}(\omega)\leqslant k-1$.

Par l'absurde, s'il existait un entier $n>p_0$ tel que $S_n(\omega)\geqslant k+1$,

alors comme on se déplace par pas de 1 ,

il existerait m compris entre p_0 et n tel que $S_m(\omega)=k$ ce qui est absurde.

Ainsi : $\forall n\geqslant p_0, S_n(\omega)\leqslant k-1$ et $\omega\in\Delta_{p_0,1}$.

De même, si $S_{p_0}(\omega)\geqslant k+1$, alors $\omega\in\Delta_{p_0,2}$.

Il en résulte $\Delta_{p_0}=\Delta_{p_0,1}\cup\Delta_{p_0,2}$:

l'un au moins de ces deux événements est donc de probabilité strictement positive. Supposons, quitte à intervertir, que $\mathbb{P}\left(\Delta_{p_0,1}\right)>0$ et donnons nous ω dans $\Delta_{p_0,1}$.

Pour tout $n\in[[1,p_0]]$, on a : $S_n(\omega)\leqslant p_0$ car S_n est à valeurs dans $[[-n,n]]$.

Donc pour tout entier n :

$$S_n(\omega)\leqslant\max\{k-1,p_0\}=K$$

Il en résulterait :

$$\Delta_{p_0,1} \subset \bigcap_{n \geqslant 1} (S_n \leqslant K) = \overline{\bigcup_{n \geqslant 1} (S_n \geqslant K+1)}$$

On aurait alors :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geqslant 1} (S_n \geq K+1)\right) \leqslant 1 - \mathbb{P}(\Delta_{p_0,1}) < 1$$

Mais ce serait absurde de par la question 3.

Il en résulte que presque surement, la suite (S_n) prend une infinité de fois la valeur k.

(Oral Mines-Ponts 2018)

1. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ ayant une espérance.

Montrer que : $E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k)$.

2. Dans une urne de N boules numérotées de 1 à N, on tire n avec remise.

Soit X_N le plus petit numéro tiré.

Calculer $E(X_N)$ puis un équivalent quand $N \to \infty$.

3. Montrer l'égalité :

$$E\left(X_N^2\right) = \sum_{k=0}^{N} (2k+1) \mathbb{P}(X_N > k)$$

Équivalent de $V(X_N)$ quand $N \to \infty$?

Sol :

1. C'est une question de cours.

2. On a $X_N(\Omega) = \{1, \ldots, N\}$. Soit $k \in X_N(\Omega)$. Dire que $(X_N > k)$, c'est dire que les n boules tirées ont des numéros dans $[[k+1, N]]$ Le tirage étant avec remise on a :

$$P(X_N > k) = \frac{(N-k)^n}{N^n}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} E\left(X_N\right) &= \sum_{k=0}^{+\infty} P\left(X_N > k\right) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(N-k)^n}{N^n} = \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{k}{N}\right)^n \end{aligned}$$

Par convergence des sommes de Riemann :

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{k}{N}\right)^n = \int_0^1 x^n \, \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}$$

Ainsi $E\left(X_N\right) \sim \frac{N}{n+1}$ quand $N \to +\infty$. 3. On trouve successivement :

$$\begin{aligned} E\left(X_N^2\right) &= \sum_{k=0}^{N} k^2 P\left(X_N = k\right) \\ &= \sum_{k=0}^{N} k^2 \left(P\left(X_N > k-1\right) - P\left(X_N > k\right)\right) \\ &= \sum_{k=0}^{N} k^2 P\left(X_N > k-1\right) - \sum_{k=1}^{N} k^2 P\left(X_N > k\right) \\ &= \sum_{k=0}^{N} (k+1)^2 P\left(X_N > k\right) - \sum_{k=0}^{N} k^2 P\left(X_N > k\right) \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{N} (2k+1) P\left(X_N > k\right)$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} E\left(X_N^2\right) &= \sum_{k=0}^{N} (2k+1) \frac{(N-k)^n}{N^n} \\ &= \sum_{k=0}^{N} (2N-2k+1) \left(\frac{k}{N}\right)^n \end{aligned}$$

On obtient finalement :

$$E\left(X_N^2\right) = (2N+1) \sum_{k=0}^{N} \left(\frac{k}{N}\right)^n - 2N \sum_{k=0}^{N} \left(\frac{k}{N}\right)^{n+1}$$

Lorsque N tend vers $+\infty$, on a :

$$(2N+1) \sum_{k=0}^{N} \left(\frac{k}{N}\right)^n = \frac{2N^2}{n+1} + \mathrm{o}\left(N^2\right)$$

$$2N\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{k}{N}\right)^{n+1} = \frac{2N^2}{n+2} + \mathrm{o}\left(N^2\right)$$

$$\text{Ainsi } E\left(X_N^2\right) = \frac{2N^2}{(n+1)(n+2)} + \mathrm{o}\left(N^2\right)$$

$$\text{D'autre part } E\left(X_N\right)^2 = \frac{N^2}{(n+1)^2} + \mathrm{o}\left(N^2\right)$$

Finalement, quand N tend vers $+\infty$:

$$V\left(X_N\right) = \frac{2N^2}{(n+1)(n+2)} - \frac{N^2}{(n+1)^2} + \mathrm{o}\left(N^2\right)$$

$$\underset{N\to\infty}{\sim} \frac{n}{(n+1)^2(n+2)}N^2$$

(Oral Mines-Ponts 2018)

Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ des variables aléatoires indépendantes, de même loi $\mathcal{B}(p)$.

1. Donner la loi du rang et de la trace de $M = (X_iX_j)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

2. Quelle est la probabilité que M représente un projecteur ?

Sol :

1. On pose $R = \mathrm{rang}(M)$ et $T = \mathrm{tr}(M)$.

Soit le vecteur aléatoire $X = (X_1, \ldots, X_n)$.

On a : $M = (X_1X, X_2X, \ldots, X_nX)$.

En particulier $R(\Omega) \subset \{0, 1\}$.

Mais $(R = 0)$ s'écrit $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n}(X_i = 0)$.

Par indépendance des X_i : $\mathbb{P}(R = 0) = (1-p)^n$.

Ainsi $\mathbb{P}(R = 1) = 1 - (1-p)^n$.

On a donc déterminé la loi de R.

On a $T = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ et $X_i^2 = X_i$ donc $T = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$.

Ainsi T est la somme de n v.a.r. de loi $\mathcal{B}(1,p)$.

Il en résulte que T suit la loi $\mathcal{B}(n,p)$.

2. Soit A l'événement « M est un projecteur ».

On a $M^2 = \mathrm{tr}(M)M$ donc :

$$\begin{aligned} A &= (\mathrm{tr}(M) = 1) \cup (M = 0) \\ &= (T = 1) \cup (R = 0) \end{aligned}$$

Il en découle :

$$\begin{aligned} P(A) &= P(T = 1) + P(R = 0) \\ &= (1-p)^n + np(1-p)^{n-1} \end{aligned}$$

(Oral Mines-Ponts 2018)

Soit $(X_n)_n$ des v.a.r indépendantes de loi $\mathcal{B}(p)$.

Soit $A_n = (X_n = \ldots = X_{2n-1} = 1)$.

Soit I l'événement ´ une infinité de A_n sont réalisés ". Montrer que $\mathbb{P}(I) = 0$.

Sol :

On suppose $0 < p < 1$. Soit $I_k = \bigcup\limits_{n=k}^{+\infty} A_n$.

Avec ces notations :

$$I = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{n=k}^{+\infty} A_n = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} I_k$$

La suite (I_k) est une suite décroissante d'événements.

Par continuité décroissante : $\mathbb{P}(I) = \lim_{k \to +\infty} \mathbb{P}(I_k)$.

Par sous additivité, on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(I_k) \leqslant \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

Par indépendance des X_i, on a $\mathbb{P}(A_n) = p^n$.

Ainsi : $0 \leqslant \mathbb{P}(I_k) \leqslant \sum_{n=k}^{+\infty} p^n = \dfrac{p^k}{1-p}$.

Donc $(\mathbb{P}(I_k))_{k\geqslant 0}$ converge vers 0.

On a bien obtenu : $\mathbb{P}(I) = 0$.

(Oral Mines-Ponts 2018)

On dit qu'une suite (X_n) de v.a.r. converge en probabilité (CP) vers X si :

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geqslant \varepsilon) = 0$$

1. On suppose les X_n indépendantes, de même espérance, de même variance m.

Montrer que $M_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ est CP vers m.

2. On suppose que $\begin{cases} E(X_n) \to E(X) \\ V(X_n - X) \to 0 \end{cases}$

Montrer que (X_n) est CP vers X.

3. Soit (S_n) une suite de v.a.r. indépendantes de loi $\mathcal{B}(n,p)$.

On pose $X_n = \exp(S_n/n)$.

Calculer $E(X_n)$ et $V(X_n)$.

La suite (X_n) est-elle CP ?

Sol :

1. Soit m l'espérance commune des X_n.

Soit σ^2 la variance commune des X_n.

Par linéarité, $E(M_n) = m$.

Par indépendance, $V(M_n) = \dfrac{\sigma^2}{n}$.

Soit $\varepsilon > 0$. D'après Bienyaimé-Tchebitchev :

$$P\left(|M_n - m| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{V\left(M_n\right)}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

En particulier :

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \to +\infty} P\left(|X_n - m| \geqslant \varepsilon\right) = 0$$

La suite $\left(M_n\right)_n$ est donc CP vers m.

2. On se donne $\varepsilon > 0$.

L'inégalité de Markov donne :

$$\begin{aligned} P\left(|X_n - X| \geqslant \varepsilon\right) &= P\left(\left|X_n - X\right|^2 \geqslant \varepsilon^2\right) \\ &\leqslant \frac{E\left(X_n - X\right)^2}{\varepsilon^2} \end{aligned}$$

Il suffit donc de montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} E\left(X_n - X\right)^2 = 0$$

D'une part :

$$E\left(X_n - X\right)^2 = V\left(X_n - X\right) - \left(E\left(X_n\right) - E(X)\right)^2$$

Par hypothèse, il en découle :

$$\lim_{n \to +\infty} P\left(|X_n - X| \geqslant \varepsilon\right) = 0$$

Conclusion : la suite $\left(X_n\right)_n$ est CP vers X.

3. Par le théorème de transfert :

$$\begin{aligned} E\left(X_n\right) &= \sum_{k=0}^{n} \exp\left(\frac{k}{n}\right) \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \left(1 + p\left(\mathrm{e}^{1/n} - 1\right)\right)^n \end{aligned}$$

On trouve facilement : $\lim\limits_{n \to +\infty} E\left(X_n\right) = \mathrm{e}^p$.

De même, on obtient :

$$E\left(X_n^2\right) = \left(1 + p\left(\mathrm{e}^{2/n} - 1\right)\right) \overset{n \to \infty}{\to} \mathrm{e}^{2p}$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} V\left(X_n\right) = \lim_{n\to+\infty} V\left(X_n - \mathrm{e}^p\right) = 0$$

Ainsi, d'après 2 : (S_n) est CP vers e^p.

(Oral Mines-Ponts 2018) Soit X, Y de loi $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$, et indépendantes.

1. Espérance, variance, et loi de $Z = X - Y$.

2. X et Z sont-elles indépendantes ? Étudier la corrélation de X et Z.

Sol :

1. Par linéarité de l'espérance :

$$E(Z) = E(X) - E(Y) = 0$$

Par indépendance, on a :

$$V(Z) = V(X) + V(Y) = 2V(X) = \frac{n}{2}$$

Pour la loi de Z, on a $Z(\Omega) = [[-n, n]]$. - Tout d'abord,

$$(Z = 0) = (X = Y) = \bigcup_{j=0}^{n} (X = j, Y = j)$$

Ainsi, par indépendance de X, Y :

$$\mathbb{P}(Z = 0) = \frac{1}{4^n} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}^2 = \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n}$$

- Pour $k > 0$, on a :

$$(Z = k) = \bigcup_{j=0}^{n} (Y = j, X = k + j)$$

$$\text{Ainsi } \mathbb{P}(Z = k) = \frac{1}{4^n} \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n}{j} \binom{n}{k+j}$$

4 Si $k < 0$, on note $k = -p$ avec $1 \leqslant p \leqslant n$.

On constate que :

$$\begin{aligned}(Z=k) &= \bigcup_{j=0}^{n}(Y=j, X=k+j)\\ &\overset{(\star)}{=} \bigcup_{j=p}^{n}(Y=j, X=j-p)\end{aligned}$$

II en résulte :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z=k) &= \frac{1}{4^n}\sum_{j=p}^{n}\binom{n}{j}\binom{n}{j-p}\\ &= \frac{1}{4^n}\sum_{j=0}^{n-p}\binom{n}{j+p}\binom{n}{j}\end{aligned}$$

On a ainsi déterminé la loi de Z.

On prouve maintenant $(\star)$. Soit $j \in \mathbb{N}$.

Pour avoir $(Y=j, X=k+j) \neq \emptyset$:

- il faut $0 \leqslant j$ et $p=-k \leqslant j$, c'est-à-dire $\max\{p, 0\} \leqslant j$

- il faut $j \leqslant n$ et $j \leqslant n-k=n+p$, c'est-à-dire $j \leqslant \min\{n, n+p\}$.

Sachant $p \geqslant 1$, ces conditions donnent $p \leqslant j \leqslant n$.

2. Par bilinéarité de la covariance :

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X,Z) &= \mathrm{Cov}(X, X-Y)\\ &= V(X)-\mathrm{Cov}(X,Y)\\ &= V(X) \neq 0\end{aligned}$$

X, Z ne sont donc pas indépendantes.

Soit ρ leur coefficient de corrélation linéaire :

$$\rho = \frac{\mathrm{Cov}(X,Z)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Z)}} = \frac{V(X)}{\sqrt{2}V(X)} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

(Oral Mines-Ponts 2018)

Soit N une v.a.r. telle que $N+1 \rightsquigarrow \mathcal{G}(p)$.

On effectue N tirages avec remise dans une urne contenant une boule bleue et une verte.

Soit X le nombre de boules vertes tirées.

1. Rayon et somme de $f(x) = \sum_{n=m}^{+\infty} \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} x^n$.

2. Trouver la loi de X.

Sol :

1. On trouve $f(x) = \frac{x^m}{m!} g(x)$ où :

$$g(x) = \sum_{n=m}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-m+1)x^{n-m}$$

On reconnaît la $m^{\text{ième}}$ série dérivée de :

$$h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

Le rayon est donc $R = 1$, et :

$$g(x) = h^{(m)}(x) = \frac{m!}{(1-x)^{m+1}}$$

Ainsi, pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$f(x) = \frac{x^m}{(1-x)^{m+1}}$$

2. D'une part $X(\Omega) = \mathbb{N}$.

Ensuite $(N = n)_{n \geqslant 0}$ est un système complet.

Ainsi, pour tout entier k :

$$\begin{aligned}(X = k) &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (X = k, N = n) \\ &= \bigcup_{n \geqslant k} (X = k, N = n)\end{aligned}$$

On peut donc écrire :

$$P(X = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} P(N = n) P_{N=n}(X = k)$$

La loi de X sachant $(N = n)$ est $\mathcal{B}\left(n, \dfrac{1}{2}\right)$.

Il en découle :

$$\begin{aligned} P(X = k) &= p \sum_{n=k}^{+\infty} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) \left(\frac{q}{2}\right)^n \\ &= \frac{2pq^k}{(2-q)^{k+1}} \end{aligned}$$

(Oral Mines-Ponts 2018)

Soit X, Y deux variables indépendantes de même loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.

Donner la loi et l'espérance de $Z = |X - Y|$.

Sol :

On note $q = 1 - p$. On a $Z(\Omega) = \mathbb{N}$.

I Tout d'abord :

$$(Z = 0) = (X = Y) = \bigcup_{k=1}^{+\infty} (X = k, Y = k)$$

Ensuite, par indépendance :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z = 0) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y = k) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(pq^{k-1}\right)^2 = \frac{p^2}{1-q^2} = \frac{p}{1+q} \end{aligned}$$

Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a l'union disjointe :

$$(Z = n) = (X - Y = n) \cup (Y - X = n)$$

Les v.a.r. $X - Y$ et $Y - X$ ont même loi, donc :

$$\mathbb{P}(Z = n) = 2\mathbb{P}(X - Y = n)$$

Mais on a l'égalité :

$$(X - Y = n) = \bigcup_{k=0}^{+\infty} (Y = k, X = n + k)$$

Il en résulte :

$$\mathbb{P}(Z = n) = 2 \sum_{k=1}^{+\infty} pq^{k-1} pq^{n+k-1} = \frac{2pq^n}{1-q^2}$$

I On trouve finalement :

$$
\begin{aligned}
E(Z) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n\mathbb{P}(Z=n) \\
&= \frac{2pq}{1+q}\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{2q}{1-q^2}
\end{aligned}
$$

(Mines-Ponts 2018) Soit $\sum_{n\geqslant 1}\lambda_n$ convergente (avec les $\lambda_n > 0$).

Soit $\left(X_n \rightsquigarrow \mathcal{P}\left(\lambda_n\right)\right)_{n\geqslant 1}$ des v.a.r. indépendantes.

1. Montrer que $\sum_{n\geqslant 1}\mathbb{P}\left(X_n\neq 0\right)$ converge.

2. Interpréter $A=\bigcap_{n\geqslant 1}\bigcup_{k\geqslant n}\{X_k\neq 0\}$.

Montrer que $\mathbb{P}(A)=0$.

3. Montrer que la série $\sum X_n$ est presque sûrement convergente.

4. Soit Y, Z deux variables à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que, pour tout $t\in[0,1]$:

$$
\left|G_Y(t)-G_Z(t)\right| \leqslant 2\mathbb{P}(Y\neq Z)
$$

5. Montrer que $S=\sum_{n=1}^{+\infty} X_n \rightsquigarrow \mathcal{P}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\lambda_k\right)$.

Sol :

1. Quand n tend vers $+\infty$, on a :

$$
\mathbb{P}\left(X_n\neq 0\right)=1-\mathrm{e}^{-\lambda_n}\sim\lambda_n
$$

Donc $\sum\mathbb{P}\left(X_n\neq 0\right)$ converge par comparaison.

2. Soit $A_n=\bigcup_{k\geqslant n}\left(X_k\neq 0\right)$.

Ainsi $A=\bigcap_{n\geqslant 1} A_n$.

L'événement A dit que tous les A_n sont réalisés, c'est-à-dire :

$$
\forall n\geqslant 1, \exists k\geqslant n, X_k\neq 0
$$

Autrement dit, A signifie qu'un nombre infini des X_k sont non nulles.

Par sous-additivité : $\mathbb{P}(A_n) \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}(X_k \neq 0)$

On en déduit : $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) = 0$.

On a $A \subset A_n$ pour tout n.

Ainsi $\mathbb{P}(A) = 0$, donc A est négligeable.

3. L'événement $\bar{A}$ est presque sur, et exprime que seul un nombre fini des X_k sont non nulles.

S'il est réalisé, $\sum X_n$ est en fait une somme finie.

Ainsi $\sum X_n$ est presque sûrement convergente.

4. Pour tout réel t dans $[0,1]$, on a :

$$\begin{aligned}
&|G_Y(t) - G_Z(t)| \\
&\quad = \left|\sum_{n=0}^{+\infty} (\mathbb{P}(y=n) - \mathbb{P}(Z=n))t^n\right| \\
&\leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |\mathbb{P}(y=n) - \mathbb{P}(Z=n)|t^n \\
&\leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |\mathbb{P}(Y=n) - \mathbb{P}(Z=n)|
\end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on constate que :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(Y=n) - \mathbb{P}(Z=n) \\
&= (\mathbb{P}(Y=n, Z=n) + \mathbb{P}(Y=n, Z\neq n)) \\
&\quad - (\mathbb{P}(Y=n, Z=n) + \mathbb{P}(Y\neq n, Z=n)) \\
&= \mathbb{P}(Y=n, Z\neq n) - \mathbb{P}(Y\neq n, Z=n) \\
&= \mathbb{P}(Y=n, Y\neq Z) - \mathbb{P}(Y\neq Z, Z=n)
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |\mathbb{P}(Y=n) - \mathbb{P}(Z=n)|$$

$$\leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y=n, Y\neq Z) + \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y\neq Z, Z=n)$$

Enfin, avec les systèmes complets $\left\{ \begin{array}{l} (Y=n)_{n\geqslant 0} \\ (Z=n)_{n\geqslant 0} \end{array} \right.$:

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y=n, Y\neq Z) \\ &\quad = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y\neq Z, Z=n) = \mathbb{P}(Y\neq Z) \end{aligned}$$

On a finalement obtenu :

$$\forall t \in [0,1], |G_Y(t) - G_Z(t)| \leqslant 2\mathbb{P}(Y \neq Z)$$

5. Posons $S_n = X_1 + \ldots + X_n$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $(X \leqslant k) = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} (S_n \leqslant k)$.

Ainsi les $(S \leqslant k)$ (donc les $(S = k)$) sont des événements.

Cela prouve que S est une variable aléatoire discrète.

Tous comme les X_k, les variables S_n et S sont à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Cela permet donc de parler de leur fonction génératrice.

On se souvient que si $Y \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda)$, alors :

$$\forall t \in \mathbb{R}, G_Y(t) = \mathrm{e}^{\lambda(t-1)}$$

On note G la fonction génératrice de S.

On note G_n celle de S_n.

Par indépendance des X_n, on a :

$$\begin{aligned} &\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0,1] \\ &\qquad G_n(t) = \prod_{k=1}^{n} G_k(t) = e^{\Lambda_n(t-1)} \end{aligned}$$

où on a noté $\Lambda_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k$.

Donc $(G_n)_{n\geqslant 1}$ est CVS vers $F(t) = \mathrm{e}^{\Lambda(t-1)}$.

D'autre part, d'après la question 4 :

$$|G_n(t) - G(t)| \leqslant 2\mathbb{P}\left(S_n \neq S\right)$$

L'événement $(S_n \neq S)$ s'écrit $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} X_k \neq 0$.

Il est donc inclus dans $A_n = \displaystyle\bigcup_{k \geqslant n} (X_k \neq 0)$.

Ainsi $\mathbb{P}\left(S_n \neq S\right) \leqslant \mathbb{P}\left(A_n\right)$.

Mais $\lim\limits_{\infty} \mathbb{P}\left(A_n\right) = 0$, donc $\lim\limits_{\infty} \mathbb{P}\left(S_n \neq S\right) = 0$.

Donc (G_n) est CVU vers G sur $[0, 1]$.

Par unicité de la limite, on a $G = F$.

Ainsi G de S est définie par $G(t) = \mathrm{e}^{\Lambda(t-1)}$.

On reconnaît la fonction génératrice de la loi de Poisson de paramètre Λ.

Or la fonction génératrice d'une variable aléatoire caractérise cette loi.

Finalement, $S \rightsquigarrow \mathcal{P}(\Lambda)$ où $\Lambda = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_n$.

(Oral Mines-Ponts 2018)

Soit X une variable telle que $X(\Omega) = \mathbb{Z}$.

Soit $X^+ = \max(X, 0)$ et $X^- = \min(X, 0)$.

1. Montrer que X^+, X^- sont des v.a.r.

2. Expliciter la loi conjointe de (X^+, X^-).

3. X^+ et X^- sont-elles indépendantes ?

Sol :

1. X^+ et X^- des fonctions de X.

$$\text{Plus précisément : } \begin{cases} X^+ = \dfrac{1}{2}(X + |X|) \\ X^- = \dfrac{1}{2}(X - |X|) \end{cases}$$

Ainsi sont des variables aléatoires.

2. Le couple (X^+, X^-) est à valeurs dans $\mathbb{N} \times (-\mathbb{N})$.

Pour tout $(k, \ell) \in \mathbb{N} \times (-\mathbb{N})$, on note :

$$p_{k,\ell} = \mathbb{P}\left(X^+ = k, X^- = \ell\right)$$

- Si $k = 0$ et $\ell \leqslant 0$, on a :

$$\left(X^+ = 0, X^- = \ell\right) = \left(X \leqslant 0, X^- = \ell\right) = (X = \ell)$$

donc $p_{0,\ell} = \mathbb{P}(X = \ell)$.

- Si $k > 0$ et $\ell = 0$, on a :

$$\left(X^+ = k, X^- = \ell\right) = (X = k)$$

donc $p_{k,0} = \mathbb{P}(X = k)$.

- Si $k > 0$ et $\ell < 0$, on a :

$$\left(X^+ = k, X^- = \ell\right) = \emptyset$$

donc $p_{k,\ell} = 0$.

On a donc obtenu la loi conjointe de (X^+, X^-).

3. Étudions l'indépendance (éventuelle) de X^+ et X^-.

Les lois de X^+, X^-, sont données par :

D'une part $X^+(\Omega) = \mathbb{N}$ et $X^-(\Omega) = -\mathbb{N}$.

D'autre part :

$$\mathbb{P}\left(X^+ = k\right) = \begin{cases} \mathbb{P}(X = k) & \text{si } k > 0 \\ \mathbb{P}(X \leq 0) & \text{si } k = 0 \end{cases}$$
$$\mathbb{P}\left(X^- = \ell\right) = \begin{cases} \mathbb{P}(X = \ell) & \text{si } \ell < 0 \\ \mathbb{P}(X \geq 0) & \text{si } \ell = 0 \end{cases}$$

Montrons que X^+, X^- sont indépendantes si et seulement si X est de signe constant presque sûrement .

- Supposons qu'il existe $\left\{\begin{array}{l} k>0 \\ \ell<0 \end{array}\right.$ tels que

$$\mathbb{P}(X=k)>0, \mathbb{P}(X=\ell)>0$$

Alors $\mathbb{P}\left(X^{+}=k, X^{-}=\ell\right)=0$, donc

$$\mathbb{P}\left(X^{+}=k, X^{-}=\ell\right) \neq \mathbb{P}\left(X^{+}=k\right) \mathbb{P}\left(X^{-}=\ell\right)$$

Dans ce cas, X^{+}, X^{-} ne sont pas indépendantes.

Inversement, supposons par exemple $\mathbb{P}(X \geqslant 0)=1$.

Alors on a presque sûrement $\left\{\begin{array}{l} \left(X^{+}=X\right) \\ \left(X^{-}=0\right) \end{array}\right.$

Dans ces conditions, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left(X^{+}=k, X^{-}=0\right) \\ & \quad=\mathbb{P}\left(X^{+}=k\right)=\mathbb{P}\left(X^{+}=k\right) \mathbb{P}\left(X^{-}=0\right) \end{aligned}$$

Autrement dit, X^{+} et X^{-} sont indépendantes.

Ainsi X^{+}, X^{-} sont indépendantes si et seulement si X est de signe constant

presque sûrement .

Exos divers...

On note x les éléments $\left(x_1, \ldots, x_n\right)$ de $\mathbb{R}^n$.

Soit $n \geqslant 2$ un entier. On note :

$$\left\{\begin{array}{l} \mathcal{K}_n=\left\{x \in\left(\mathbb{R}^{+}\right)^n / x_1+x_2+\cdots+x_n=1\right\} \\ \mathcal{T}_n=\left\{x \in\left(\mathbb{R}^{+*}\right)^n / x_1+x_2+\cdots+x_n=1\right\} \end{array}\right.$$

On définit la fonction :

$$f_n: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n} x_i x_j\left(x_i^2+x_j^2\right)$$

Question 1 : Justifier l'existence de $M_n=\max _{x \in \mathcal{K}_n} f_n(x)$.

Question 2 : Déterminer la valeur de M_2.

Question 3.a On suppose : $\exists m_0 \in \mathcal{T}_n, f_n\left(m_0\right)=M_n$. Montrer que :

$$\forall x \in \left(\mathbb{R}^{+*}\right)^n, f_n(x) \leqslant f_n\left(m_0\right)\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^4$$

Question 3.b En déduire que grad $f_n\left(m_0\right)$ et $v=(1,1,\ldots,1)$ sont colinéaires.

Question 4 : Montrer que $M_n=\dfrac{1}{8}$ pour tout $n \geqslant 2$.

Sol :

1 : Évident car f_n est continue et $\mathcal{K}_n$ est fermé borné.

2 : On est ramené à étudier, sur $[0,1]$:

$$x \mapsto x(1-x)\left(x^2+(1-x)^2\right)$$

On trouve $M_2=\dfrac{1}{8}$.

3a : On suppose donc que $M_n=\max\limits_{x \in \mathcal{K}_n} f_n(x)$ est atteint en un point $m_0 \in \mathcal{T}_n$.

Soit $x \in \left(\mathbb{R}^{+*}\right)^n, s=\sum\limits_{i=1}^n x_i$ et $y=\frac{1}{s} x$.
On a $y \in \mathcal{K}_n$, donc $f_n(y) \leqslant f_n\left(m_0\right)=M_n$.

Comme f_n est homogène de degré 4 , on en déduit :

$$g_n(x)=f_n(x)-f_n\left(m_0\right)\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^4 \leqslant 0=g_n\left(m_0\right)$$

3b : Le point m_0 est donc un maximum global de g_n sur l'ouvert $\left(\mathbb{R}^{+*}\right)^n$.

Ainsi grad $g_n\left(m_0\right)=\overrightarrow{0}$, ce qui se traduit après calcul par : grad $f_n\left(m_0\right)=4 f_n\left(m_0\right) v$.

4 : Pour $x \in \mathcal{K}_n$, on a (en utilisant $\left.(a+2 b)^2 \geqslant 8 a b\right)$:

$$
\begin{aligned}
1 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^4 &= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j\right)^2 \\
&\geqslant 8\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\left(\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j\right) \\
&= 8\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right) \\
&\geqslant 8\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j \left(x_i^2 + x_j^2\right) = 8 f_n(x)
\end{aligned}
$$

Ainsi $f_n(x) \leqslant \dfrac{1}{8}$ sur tout $\mathcal{K}_n$.

Conclusion : $M_n = \dfrac{1}{8}$, pour tout entier $n \geqslant 2$.

Exercice 15 :

Soient $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ normé par $\|\cdot\|_\infty$ et la partie

$$A = \left\{ f \in E / f(0) = 0 \text{ et } \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t \geqslant 1 \right\}$$

a) Montrer que A est une partie fermée.

b) Vérifier que

$$\forall f \in A, \|f\|_\infty > 1$$

c) Calculer la distance de la fonction nulle à la partie A.

Sol DDL 15 : pas unique ...

Exercice 15 :

a) Soient (f_n) une suite convergente d'éléments de A et $f_\infty \in E$ sa limite.

Puisque la convergence de la suite (f_n) a lieu pour la norme $\|.\|_\infty$,

il s'agit d'une convergence uniforme.

Puisqu'il y a convergence uniforme, il y a convergence simple et en particulier

$$f_n(0) \to f_\infty(0)$$

On en déduit $f_\infty(0) = 0$.

Puisqu'il y a convergence uniforme de cette suite de fonctions continues, on a aussi

$$\int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t \to \int_0^1 f_\infty(t)\mathrm{d}t$$

et donc $\displaystyle\int_0^1 f_\infty(t)\mathrm{d}t \geqslant 1$.

Ainsi $f_\infty \in A$ et la partie A est donc fermée en vertu de la caractérisation

séquentielle des parties fermées.

b) Par l'absurde, supposons qu'il existe $f \in A$ vérifiant $\|f\|_\infty \leqslant 1$. Puisque

$$\left|\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \|f\|_\infty \mathrm{d}t \leqslant 1$$

on peut affirmer que

$$\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 1$$

et donc

$$\int_0^1 (1 - f(t))\mathrm{d}t = 0$$

Or la fonction $t \mapsto 1 - f(t)$ est continue et positive, c'est donc la fonction nulle.

Par suite f est la fonction constante égale à 1 , or $f(0) = 0$, c'est absurde.

c) $d(\tilde{0}, A) = \inf_{f\in A} \|f\|_\infty$ et par ce qui précède on a déjà $d(\tilde{0}, A) \geqslant 1$.

Considérons maintenant la fonction f_n définie pour $n \in \mathbb{N}^\star$ par le schéma.

La fonction f_n : cste sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{n}, 1\right]$ et partant de O vers $1 + 1/n$...

La fonction f_n est continue, $f_n(0) = 0$ et par calcul d'aires

$$\int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2n}\frac{n+1}{n} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{n+1}{n} = \frac{(2n-1)(n+1)}{2n^2} = \frac{2n^2+n-1}{2n^2} \geqslant 1$$

Ainsi la fonction f_n est élément de A. Or

$$\|f_n\|_\infty = \frac{n+1}{n} \to 1$$

donc

$$d(\tilde{0}, A) = 1$$

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$.

Soit a un endomorphisme de E.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ défini par $f(u) = \frac{1}{2}(au + ua)$.

Dans la question 1, a est un projecteur de rang r.

Question 1.a

Déterminer f^k pour $k \geqslant 1$, et en déduire $\lim\limits_{k\to\infty} f^k = h$, où h est un projecteur à préciser.

Question 1.b

En utilisant une représentation matricielle dans une base adaptée de E,

déterminer le rang de f^k et retrouver $h = \lim\limits_{k\to\infty} f^k$. Quel est le rang de h ?

Question 2 Dans cette question, on suppose seulement que a est diagonalisable.

En utilisant une représentation matricielle dans une base adaptée de E,

étudier la convergence éventuelle de la suite des f^k dans $\mathcal{L}(E)$.

Sol :

Pour tout vecteur u de E, on a :

$$\begin{aligned} f^2(u) &= \frac{1}{2}(af(u) + f(u)a) \\ &= \frac{1}{4}(a(au+ua) + (au+ua)a) \\ &= \frac{1}{4}(au + 2aua + ua) \end{aligned}$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons :

$$f^k = \alpha_k au + \beta_k aua + \gamma_k ua$$

(avec $\alpha_1 = \gamma_1 1/2$ et $\beta_1 = 0$) On trouve alors :

$$\begin{aligned} f^{k+1}(u) &= \frac{1}{2}\left(af^k(u) + f^k(u)a\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\alpha_k au + \left(\alpha_k + 2\beta_k + \gamma_k\right) aua + \gamma_k ua\right) \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \alpha_{k+1} = \frac{\alpha_k}{2}, \gamma_{k+1} = \frac{\gamma_k}{2} \\ \text{et } \beta_{k+1} = \frac{\alpha_k}{2} + \beta_k + \frac{\gamma_k}{2} \end{aligned}$$

On en déduit $\alpha_k = \gamma_k = \frac{1}{2^{k-1}}$ et $\beta_k = 1 - \frac{1}{2^{k-1}}$.

Pour tout $k \geqslant 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$, on a donc :

$$f^k(u) = \frac{1}{2^{k-1}} au + \left(1 - \frac{1}{2^{k-1}}\right) aua + \frac{1}{2^{k-1}} ua$$

Ainsi $\lim\limits_{k \to +\infty} f^k = h$, où h est le projecteur de $\mathcal{L}(E)$ défini par $h(u) = aua$.

On utilise une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de a est $A = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ par blocs.

Soit u dans $\mathcal{L}(E)$, de matrice $M = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$, avec X dans $\mathcal{M}_r(\mathbb{K})$.

La matrice de $f(u)$ est :

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} X & Y/2 \\ Z/2 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Celle de $f^k(u)$ est $N_k = \begin{pmatrix} X & 2^{-k}Y \\ 2^{-k}Z & 0 \end{pmatrix}$ On en déduit :

$$u \in \operatorname{Ker} f^k \Leftrightarrow M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix}$$

où $T \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{K})$.

Ainsi, pour tout $k \geqslant 1$: $\dim \operatorname{Ker}\left(f^k\right) = (n-r)^2$.

Donc rang $\left(f^k\right) = n^2 - (n-r)^2 = r(2n-r)$.

On voit que $\lim\limits_{k \to \infty} N_k = \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = AMA$.

Donc $\lim_{k\to\infty} f^k = h$, où $h(u) = aua$.

On constate que : $u \in \mathrm{Ker}(h) \Leftrightarrow M = \begin{pmatrix} 0 & Y \\ Z & T \end{pmatrix}$.

Ainsi $\dim \mathrm{Ker}(h) = n^2 - r^2$, donc $\mathrm{rang}(h) = r^2$.

Soit $\mathcal{B}$ une base de E dans laquelle la matrice de a est $A = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

Soit u dans $\mathcal{L}(E)$, de matrice $M = (m_{i,j})$ dans $\mathcal{B}$.

Soit N_k la matrice de $f^k(u)$ dans $\mathcal{B}$.

On a $N_1 = \dfrac{1}{2}(AM + MA)$, donc :

$$[N_1]_{i,j} = \frac{1}{2}\left([AM]_{i,j} + [MA]_{i,j}\right) = \frac{1}{2}\left(\lambda_i + \lambda_j\right) m_{i,j}$$

Plus généralement, on a :

$$[N_k]_{i,j} = \mu_{i,j}^k m_{i,j} \text{ avec } \mu_{i,j} = \frac{1}{2}\left(\lambda_i + \lambda_j\right)$$

La suite des $\left(f^k\right)$ converge dans $\mathcal{L}(E)$ (evn de dim finie) si et seulement s'il en est ainsi de la suite des N_k pour toute matrice M de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Cela équivaut à :

$$\forall (i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2 \mu_{i,j} = 1 \text{ ou } |\mu_{i,j}| < 1$$

Bien sûr, puisque $\mu_{i,i} = \lambda_i$ cela implique que les valeurs propres de A vérifient $\lambda_i = 1$ ou $|\lambda_i| < 1$.

Mais, à cause de $\mu_{i,j} = \frac{1}{2}\left(\lambda_i + \lambda_j\right)$, la réciproque est vraie.

Conclusion : la suite des f^k est convergente si et seulement si chacune des valeurs propres de A est égale à 1 ou de module strictement inférieur à 1.

La suite de terme général f^k converge alors dans $\mathcal{L}(E)$ vers le projecteur $u \mapsto \delta u \delta$, où la matrice Δ de δ dans la base $\mathcal{B}$ est diagonale, avec $[\Delta]_{i,i} = 1$ quand $\lambda_i = 1$, et $[\Delta]_{i,j} = 0$ quand $|\lambda_i| < 1$.

Avec ces notations δ est la projection vectorielle de E sur le sous-espace $\mathrm{Ker}(a - \mathrm{Id})$ des vecteurs invariants de a, parallèlement au sous-espace :

$$\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A), |\lambda| < 1} \mathrm{Ker}(a - \lambda \mathrm{Id})$$

En particulier, si toutes les valeurs propres de A sont de module strictement inférieur à 1, la suite des f^k converge vers 0 dans $\mathcal{L}(E)$.

ENS-Cachan. On considère l'espace vectoriel :

$$E = \left\{ f \in \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R}), f(0) = f'(0) = 0 \right\}$$

On pose $\|f\| = \|f + 2f' + f''\|_\infty$.

1. Montrer que $f \mapsto \|f\|$ est une norme sur E.

2. Soit $f \in E$. On pose $g = f + 2f' + f''$.

Montrer que, pour tout $t \in [0,1]$:

$$f(t) = e^{-t} \int_0^t (t-x) e^x g(x) \mathrm{d}x$$

3. Montrer qu'il existe $a > 0$ tel que :

$$\forall f \in E, \|f\|_\infty \leqslant a \|f\|$$

Trouver la valeur optimale de a.

4. Existe-t-il $b > 0$ tel que :

$$\forall f \in E, \|f\| \leqslant b \, \|f\|_\infty ?$$

Sol :

1. Soit f un élément de E.

$f + 2f' + f''$ est continue donc bornée sur $[0,1]$.

Cela assure l'existence du réel positif $\|f\|$.

Dire $\|f\| = 0$ c'est dire que $f + 2f' + f'' = 0$.

Avec les conditions $f(0) = f'(0) = 0$, le théorème de Cauchy linéaire donne $f = 0$.

On a facilement : $\begin{cases} \|\lambda f\| = |\lambda| \|f\| \\ \|f + g\| \leqslant \|f\| + \|g\| \end{cases}$

Ainsi $f \mapsto \|f\|$ est une norme sur E.

2. Soit $h : t \longmapsto \mathrm{e}^{-t}\displaystyle\int_0^t (t-x)\mathrm{e}^x g(x)\mathrm{d}x$.

Pour $t \in [0,1]$, on a :

$$h(t) = t\mathrm{e}^{-t}\int_0^t \mathrm{e}^x g(x)\mathrm{d}x - \mathrm{e}^{-t}\int_0^t x\mathrm{e}^x g(x)\mathrm{d}x$$

Les fonctions $x \mapsto \mathrm{e}^x g(x)$ et $x \mapsto x\mathrm{e}^x g(x)$ étant continues, la fonction h est $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et :

$$\begin{aligned}h'(t) = \mathrm{e}^{-t}(1-t)\int_0^t \mathrm{e}^x g(x)\mathrm{d}x + tg(t) \\ + \mathrm{e}^{-t}\int_0^t x\mathrm{e}^x g(x)\mathrm{d}x - tg(t) \\ =&\mathrm{e}^{-t}(1-t)\int_0^t \mathrm{e}^x g(x)\mathrm{d}x \\ &+ \mathrm{e}^{-t}\int_0^t x\mathrm{e}^x g(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

De même, h' est $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et :

$$\begin{aligned}h''(t) =&\mathrm{e}^{-t}(t-2)\int_0^t \mathrm{e}^x g(x)\mathrm{d}x + g(t) \\ &- \mathrm{e}^{-t}\int_0^t x\mathrm{e}^x g(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Ainsi : $\forall t \in [0,1], h''(t) + 2h'(t) + h(t) = g(t)$.

La fonction $h - f$ vérifie donc l'équation différentielle : $y'' + 2y' + y = 0$.

Mais $(h-f)(0) = 0$ et $(h-f)'(0) = 0$.

Par unicité de la solution au problème de Cauchy, on trouve $h = f$. Ainsi :

$$\forall t \in [0,1], f(t) = \mathrm{e}^{-t}\int_0^t (t-x)\mathrm{e}^x g(x)\mathrm{d}x$$

3. Soit $t \in [0,1]$ et $f \in E$.

Par ce qui précède :

$$|f(t)| \leqslant \|g\|_\infty \left(e^{-t}\int_0^t (t-x)\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x\right)$$

Par une intégration par parties :

$$\int_0^t (t-x)\mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$$
$$= [(t-x)\mathrm{e}^x]_0^t + \int_0^t \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x = \mathrm{e}^t - t - 1$$

Ainsi, pour tout $t \in [0,1]$:

$$|f(t)| \leqslant \|g\|_\infty \left(1 - te^{-t} - e^{-t}\right)$$

Mais la fonction $\varphi : t \longmapsto 1 - te^{-t} - e^{-t}$ est croissante sur $[0,1]$.

En particulier, pour tout $t \in [0,1]$:

$$0 = \varphi(0) \leqslant \varphi(t) \leqslant \varphi(1) = 1 - 2\mathrm{e}^{-1}$$

Il en résulte :

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| \leqslant \left(1 - 2\mathrm{e}^{-1}\right) \|f\|$$

On va montrer que le a optimal est $a = 1 - 2\mathrm{e}^{-1}$.

La fonction φ précédente est $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$ avec $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$.

Elle est donc est élément de E.

Par ailleurs $\|\varphi\|_\infty = 1 - 2\mathrm{e}^{-1}$.

On constate que, pour $0 \leqslant t \leqslant 1$:

$$\left(\varphi + 2\varphi' + \varphi''\right)(t)$$
$$= 1 - te^{-t} - e^{-t} + 2t\mathrm{e}^{-t} + e^{-t} - t\mathrm{e}^{-t} = 1$$

Variante : les solutions de $y'' + 2y' + y = 0$ sont les $t \mapsto (\lambda + \mu t)\mathrm{e}^{-t}$ où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Donc (sans calcul) $\varphi - 1 : t \longmapsto -te^{-t} - e^{-t}$ est solution de cette équation.

Ainsi $\|\varphi\| = \|1\|_\infty = 1$.

On a donc $\|\varphi\|_\infty = \left(1 - 2\mathrm{e}^{-1}\right) \|\varphi\|$.

En conclusion, $a = 1 - 2\mathrm{e}^{-1}$ est bien la plus petite constante possible.

4. Soit $n \geqslant 2$, et $f_n : t \in [0,1] \longmapsto t^n$.

La suite $(f_n)_{n \geqslant 2}$ est à valeurs dans E.

Or $\|f_n\|_\infty = 1$ et :

$$\|f_n\| = n^2 + n + 1 \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

La suite $n \mapsto \dfrac{\|f_n\|}{\|f_n\|_\infty}$ est donc non bornée.

Il n'existe donc pas de réel b tel que :

$$\forall f \in E, \|f\| \leqslant b\|f\|_\infty$$

En d'autres termes, les normes $\|\|_\infty$ et$\|\|$ ne sont pas « équivalentes » sur E.

(Oral X-Cachan Psi)

Si u est une suite de nombres complexes, on note $V(u)$ l'ensemble des valeurs

d'adhérence de u (i.e. l'ensemble des limites des sous-suites convergentes de u).

1. Montrer que $a \in V(u)$ si et seulement si toute boule ouverte centrée en a

contient une infinité d'éléments de u.

2. Montrer que $V(u)$ est un fermé.

Dans tout ce qui suit, u est une suite réelle.

3. Montrer que l'on peut extraire de u une sous-suite monotone.

4. On suppose que u est bornée.

Montrer que $V(u)$ est non vide, puis que $V(u)$ est un singleton ssi u converge.

5. Soit $f : [a,b] \to [a,b]$ continue $(a < b)$.

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 \in [a,b]$ et, pour $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

Montrer que (u_n) converge ssi $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$.

1.- Soit $a \in V(u)$, et soit $\left(v_n = u_{\varphi(n)}\right)_{n \geqslant 0}$ une suite extraite de (u) convergente vers a

(la fonction φ étant strictement croissante).

Soit $B(a, r)$ la boule ouverte de centre a et de rayon $r>0$.

Alors : $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, v_n \in B(a, r)$.

$B(a, r)$ contient les $u_{\varphi(n)}$ pour $n \geqslant n_0$, donc une infinité d'éléments de la suite u.

Attention : par « infinité d'éléments ", il faut entendre « infinité d'indices ».

- Réciproquement, on suppose que toute boule ouverte $B(a, r)$ (avec $r>0$)

contient une infinité d'éléments de (u).

Il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} \in B(a, 1)$, puis $n_1>n_0$ tel que $u_{n_1} \in B\left(a, \frac{1}{2}\right)$.

Plus généralement, supposons qu'on ait construit $n_0<n_1<\cdots<n_{k-1}$ tels que :

$$\forall j \in [\![0, k-1]\!], u_{n_j} \in B\left(a, \frac{1}{j+1}\right)$$

Or $B\left(a, \frac{1}{k+1}\right)$ contient une infinité de u_n.

On en déduit :

$$\exists n_k>n_{k-1}, u_{n_k} \in B\left(a, \frac{1}{k+1}\right)$$

On a ainsi une suite extraite $k \mapsto u_{n_k}$ telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, u_{n_k} \in B\left(a, \frac{1}{k+1}\right)$$

Avec $\varphi(k)=n_k$ on a donc : $\lim\limits_{k \rightarrow \infty} u_{\varphi(k)}=a$.

2. Il revient au même de démontrer que le complémentaire ${}^{\mathrm{c}}V(u)$ est un ouvert.

Pour cela, on se donne a dans ${}^{\mathrm{c}}V(u)$.

Il existe une boule ouverte $B(a, r)(r>0)$ ne contenant qu'un nombre fini d'éléments de u.

Pour tout $b \in B(a, r)$, soit $\rho=r-|b-a|>0$.

Alors $B(b, \rho) \subset B(a, r)$ donc $B(b, \rho)$ ne contient qu'un nombre fini d'éléments de u.

Ainsi b est dans ${}^{\mathrm{c}}V(u)$, donc $B(a, r) \subset^{\mathrm{c}} V(u)$, et ${}^{\mathrm{c}}V(u)$ est ouvert.

3. Soit $X = \{n \in \mathbb{N}, \forall m > n, u_m \geqslant u_n\}$.

On distingue selon que X est fini (éventuellement vide) ou infini.

- Si X est infini, on note $n_0 < n_1 < n_2 < \cdots$ ses éléments.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $n_{k+1} > n_k$ et $n_k \in X$ donc $u_{n_{k+1}} \geqslant u_{n_k}$.

On a ainsi formé une suite $k \mapsto u_{n_k}$, extraite de la suite (u), et croissante.

- Si X est fini : $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, u_n \notin X$.

Ainsi : $\forall n \geqslant N, \exists m > n, u_m < u_n$.

Soit $n_0 = N$, puis $n_1 > n_0$ tel que $u_{n_1} < u_{n_0}$.

On choisit ensuite $n_2 > n_0$ tel que $u_{n_2} < u_{n_1}$.

Par une récurrence évidente, on construit une suite $k \mapsto u_{n_k}$,

extraite de la suite (u), et (strictement) décroissante.

4. De la suite réelle bornée (u), on peut extraire une suite monotone donc convergente. Ainsi $V(u) \neq \emptyset$.

Si(u) converge vers ℓ, ses suites extraites aussi, donc $V(u) = \{\ell\}$.

Réciproquement, on suppose $V(u) = \{\ell\}$ et par l'absurde que (u) ne converge pas vers ℓ.

Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists m > n, |u_m - \ell| \geqslant \varepsilon$$

On peut donc former $v : k \mapsto u_{n_k}$ extraite de (u) telle que

: $\forall k \in \mathbb{N}, |u_{n_k} - \ell| \geqslant \varepsilon$.

De la suite (v), on peut extraire (w) convergente vers ℓ', avec $|\ell' - \ell| > \varepsilon$ donc $\ell' \neq \ell$.

Mais la suite (w) est extraite de (u), donc $\ell' \in V(u)$, ce qui est contradictoire.

5. Bien sûr, si la suite bornée (u) converge, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$.

On suppose donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$. On doit montrer que (u) converge.

D'après ce qui précède, il suffit de montrer que $V(u)$ (non vide) est réduit à un singleton.

On va montrer deux résultats préalables.

- On montre d'abord que toute valeur d'adhérence de (u) est un point fixe de f.

Soit $\ell \in V(u)$ et $n \mapsto v_n = u_{\varphi(n)}$ une suite extraite de (u), convergente vers ℓ.

La fonction f est continue. La suite :

$$n \mapsto w_n = u_{\varphi(n)+1} = f\left(u_{\varphi(n)}\right)$$

converge donc vers $f(\ell)$.

Or $\lim\limits_{n\to\infty}(w_n - v_n) = 0$ donc $f(\ell) = \ell$.

Ainsi, pour tout $\ell \in V(u)$, on a $f(\ell) = \ell$.

- On montre ensuite que l'ensemble des valeurs d'adérence $V(u)$ est un intervalle.

Soit $\ell < \ell'$ dans $V(u)$ et soit $\ell'' \in]\,\ell, \ell'[$.

Par l'absurde, on suppose $\ell'' \notin V(u)$.

Alors il existe $\varepsilon > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\forall n \geq n_0, u_n \notin \left[\ell'' - \varepsilon, \ell'' + \varepsilon\right]$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1} - u_n) = 0$,

il existe $n_1 \geqslant n_0$ tel que $n \geqslant n_1 \Rightarrow |u_{n+1} - u_n| \leqslant 2\varepsilon$.

Il n'y a alors que deux possibilités :

- ou bien $\forall n \geqslant n_1, u_n < \ell'' - \varepsilon < \ell' - \varepsilon$.

- ou bien $\forall n \geqslant n_1, u_n > \ell'' + \varepsilon > \ell + \varepsilon$.

Mais c'est contradictoire car dans le premier (resp. deuxième) cas ℓ' (resp ℓ)

ne serait plus valeur d'adhérence.

On est maintenant en mesure de démontrer que (u) est convergente.

Par l'absurde, on suppose que (u) possède deux valeurs d'adhérence ℓ et ℓ', avec $\ell < \ell'$.

On sait que $[\ell, \ell'] \subset V(u)$ et que, pour tout x de $[\ell, \ell']$ on a $f(x) = x$.

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \notin [\ell, \ell']$ (sans quoi (u) serait stationnaire donc convergente).

On sait qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant n_0, |u_{n+1} - u_n| < \ell' - \ell$$

Cela signifie qu'à partir de n_0, la suite (u) ne peut plus « enjamber» le segment $[\ell, \ell']$.

Il en résulte deux possibilités :

- ou bien $\forall n \geqslant n_0, u_n < \ell < \ell'$, et alors ℓ' ne serait plus dans $V(u)$.

- ou bien $\forall n \geqslant n_0, u_n > \ell' > \ell$, et alors ℓ ne serait plus dans $V(u)$.

Dans les deux cas, c'est contradictoire !

On a donc l'équivalence : (u_n) converge si et seulement si $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$.

Mines :1. Rayon R de $f(x) = \sum\limits_{n \geqslant 1} \tan\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n$?

Y a-t'il convergence en $\pm R$?

2. Déterminer $\lim\limits_{x \to 1} (1 - x) f(x)$.

SOL :

1. La série $\sum \tan\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n$ converge si $|x| < 1$.

Elle diverge en $x = 1$.

Son rayon de convergence est donc $R = 1$.

Enfin $\sum (-1)^n \tan\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ converge d'après le théorème spécial des séries alternées.

2. Pour tout x de $[0, 1[$, on trouve :

$$
\begin{aligned}
&(1-x)f(x)\\
&=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)x^n-\tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)x^{n+1}\right)\\
&=(\tan 1)x+\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\tan\frac{1}{\sqrt{n}}-\tan\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)x^n
\end{aligned}
$$

Soit $u_n(x)=\left(\tan\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\tan\dfrac{1}{\sqrt{n-1}}\right)x^n$.

De même, on note $g(x)=\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}u_n(x)$.

Chaque u_n est continue sur $[0,1]$.

En utilisant $\tan'(0)=1$, on a :

$$
\begin{aligned}
\sup_{[0,1]}\|u_n\|&=\tan\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)-\tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\\
&\sim\frac{1}{\sqrt{n-1}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\sim\frac{1}{2n\sqrt{n}}
\end{aligned}
$$

Ainsi $\sum u_n$ converge normalement sur $[0,1]$.

La fonction g est donc continue sur $[0,1]$.

Mais on a :

$$
\begin{aligned}
g(1)&=\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\tan\frac{1}{\sqrt{n}}-\tan\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)\\
&=-\tan 1
\end{aligned}
$$

Ainsi : $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}(1-x)f(x)=\tan 1-g(1)=0$.

(Oral Mines-Ponts 2018)

Soit D_n le nombre de permutations de $\{1,\ldots,n\}$ sans point fixe (avec $D_0=1$).

Soit la série entière $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{D_n}{n!}x^n$.

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}D_p=n!$.

Calculer $e^x f(x)$. Préciser le rayon de f.

2. En déduire D_n sous forme de somme.

Sol :

1. Il y a $n\,!$ permutations σ de $\{1,\ldots,n\}$.

On les classe selon le nombre $k \in \{0,\ldots,n\}$ de leurs points fixes.

- Il y a $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ façons de choisir l'ensemble I_f des k points fixes de σ.
- Il faut ensuite permuter sans point fixe les $n-k$ éléments de $\{1,\ldots,n\}\backslash I_f$.

Il y a pour celà D_{n-k} possibilités.

On en déduit :

$$\begin{aligned} n! &= \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} D_{n-k} = \sum_{p=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ n-p \end{pmatrix} D_p \\ &= \sum_{p=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} D_p \end{aligned}$$

2. On a l'inégalité évidente $D_n \leqslant n!$.

Cela nous assure que f est de rayon $R \geqslant 1$.

Pour $x \in]-1,1[$, et par produit de Cauchy, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^x f(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} x^k \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{D_k}{k!} x^k \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{D_k}{(n-k)!k!} \right) x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} D_k \right) x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \end{aligned}$$

Ainsi $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1-x}$ sur $]-1,1[$.

Le rayon de convergence de f est donc $R = 1$.

3. Pour $x \in]-1,1[$, et par produit de Cauchy :

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-x} &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} x^k \sum_{k=0}^{+\infty} x^k \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \right) x^n \end{aligned}$$

Par identification, on trouve : $D_n = n! \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

En particulier $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{D_n}{n!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{1}{\mathrm{e}}$.

(Oral Mines-Ponts 2018)

1. Préciser le domaine de $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t \, \mathrm{d}t}{x + e^t}$.

2. Montrer que f est développable en série entière, et calculer $f^{(p)}(0)$ pour tout p.

sol

1. Pour tout réel x, on note $\varphi_x : t \mapsto \dfrac{t}{x + e^t}$.

- Si $x > -1$, alors φ_x est continue sur $\mathbb{R}^+$.

De plus $t^2 \varphi_x(t)^{t\to+\infty} 0$.

Ainsi φ_x est intégrable sur $[0, +\infty[$.

- φ_{-1} est continue sur $\mathbb{R}^+$ ($\varphi_{-1}(0) = 1$).

Comme ci dessus, φ_{-1} est intégrable sur $[1, +\infty[$.

- Si $x < -1$, posons $a = -x$ (donc $a > 1$).

Alors $e^t + x$ s'annule en $t_0 = \ln a > 0$.

De plus $\varphi_x(t) \overset{t\to\ln a}{\sim} \dfrac{\ln a}{a(t - \ln a)}$.

Cette fonction est non intégrable en t_0.

Ainsi $f(x)$ n'est pas défini si $x < -1$.

Finalement le domaine de f est $[-1, +\infty[$.

2. Pour tout $x \in]-1,1[$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{te^{-t}}{1+x\mathrm{e}^{-t}}\ \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^k \mathrm{e}^{-t(k+1)} \mathrm{d}t \end{aligned}$$

(on a utilisé $\left|x\mathrm{e}^{-t}\right| < 1$).

De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} |x|^k \mathrm{e}^{-t(k+1)} \mid \mathrm{d}t &= \frac{|x|^k}{(k+1)^2} \int_0^{+\infty} u\mathrm{e}^{-u} \\ &= \frac{|x|^k}{(k+1)^2} \end{aligned}$$

Sachant $|x| < 1$, la série numérique :

$$\sum \int_0^{+\infty} \left|(-1)^k x^k \mathrm{e}^{-t(k+1)}\right| \mathrm{d}t = \frac{|x|^k}{(k+1)^2}$$

est convergente.

Le théorème d'intégration terme à terme donne :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2} x^k$$

Ainsi f est DSE sur $]-1,1[$.

Par unicité du développement, on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}, f^{(k)}(0) = \frac{(-1)^k k!}{(k+1)^2}$$

(Oral Mines-Ponts)

1. Soit $\alpha > 0$. Montrer qu'il existe une v.a.r X telle que $G_X(t) = \dfrac{1}{(2-t)^\alpha}$.

2. Donner un équivalent de $\mathbb{P}(X = n)$ quand $n \to +\infty$ dans le cas où $\alpha \in \mathbb{N}^*$.

3. Montrer : $\forall \lambda > 0, \mathbb{P}(X \geqslant \lambda + \alpha) \leqslant \dfrac{2\alpha}{\lambda^2}$.

Sol :

1. On connait le développement de rayon 1 :

$$(1+t)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} t^n$$

On en déduit, pour tout $t \in]-2,2[$:

$$\begin{aligned} G_X(t) &= \frac{1}{2^{\alpha}} \left(1 - \frac{t}{2}\right)^{-\alpha} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-\alpha)(-\alpha-1)\cdots(-\alpha-n+1)}{2^{\alpha} n!} \left(-\frac{t}{2}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}{n! 2^{n+\alpha}} t^n \end{aligned}$$

Ainsi G_X est la fonction génératrice de X telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}(X=n) = \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}{n! 2^{n+\alpha}}$$

On vérifie que $\mathbb{P}(X=n) \geqslant 0$ et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n) = G_X(1) = 1$$

2. On suppose $\alpha \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X=n) &= \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}{n! 2^{n+\alpha}} \\ &= \frac{(n+\alpha-1)!}{(\alpha-1)! n! 2^{n+\alpha}} = \frac{1}{2^{n+\alpha}} \binom{n+\alpha-1}{\alpha-1} \end{aligned}$$

On peut alors utiliser l'équivalent de Stirling.

Ainsi, quand $n \to \infty, \mathbb{P}(X=n)$ est équivalent à :

$$\frac{(n+\alpha-1)^{n+\alpha-1} \mathrm{e}^{-n-\alpha+1} \sqrt{2\pi(n+\alpha-1)}}{(\alpha-1)! n^n \mathrm{e}^{-n} \sqrt{2\pi n} 2^{n+\alpha}}$$

c'est-à-dire équivalent à :

$$\frac{n^{\alpha-1}}{(\alpha-1)! \mathrm{e}^{\alpha-1} 2^{n+\alpha}} \left(1 + \frac{\alpha-1}{n}\right)^{n+\alpha-1}$$

Mais $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha-1}{n}\right)^{n+\alpha-1} = \mathrm{e}^{\alpha-1}$.

On trouve donc : $\mathbb{P}(X=n) \sim \frac{n^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!2^{n+\alpha}}$.

3. Le rayon de convergence de la fonction G_X est strictement supérieur à 1 .

La v.a.r. X possède donc une espérance et une variance.

De plus, on a $\mathrm{E}(X) = G'_X(1)$ et :

$$\mathrm{V}(X) = G'_X(1) + G''_X(1) - \left(G'_X(1)\right)^2$$

On a $\left\{\begin{array}{l} G'_X(t) = \alpha(2-t)^{-\alpha-1} \\ \mathrm{G}''_X(t) = \alpha(\alpha+1)(2-t)^{-\alpha-2} \end{array}\right.$

En particulier : $\left\{\begin{array}{l} G'_X(1) = \alpha \\ \mathrm{G}''_X(1) = \alpha(\alpha+1) \end{array}\right.$

Il en résulte $\mathrm{E}(X) = \alpha$, et :

$$\mathrm{V}(X) = \alpha + \alpha(\alpha+1) - \alpha^2 = 2\alpha$$

L'inégalité de Bienaymé-Chebyshev s'écrit :

$$\forall\lambda > 0, \mathbb{P}(|X - \mathrm{E}(X)| \geqslant \lambda) \leqslant \frac{\mathrm{V}(X)}{\lambda^2}$$

Ainsi : $\mathbb{P}(|X-\alpha| \geqslant \lambda) \leqslant \frac{2\alpha}{\lambda^2}$.

Mais $X \geqslant \lambda+\alpha$ est inclus dans $|X-\alpha| \geqslant \lambda$.

On trouve donc finalement, pour tout $\lambda > 0$:

$$\mathbb{P}(X \geqslant \lambda+\alpha) \leqslant \mathbb{P}(|X-\alpha| \geqslant \lambda) \leqslant \frac{2\alpha}{\lambda^2}$$

1028

Soit $A : \mathbb{R} \to \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, une application de classe $\mathcal{C}^1$.

1. On suppose qu'il existe une application $\mathrm{S} : \mathbb{R} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$\forall \mathrm{t} \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{S}_\mathrm{t}^{-1}\,\mathrm{A}_\mathrm{t}\mathrm{S}_\mathrm{t} = \mathrm{A}_0.$$

Démontrer qu'il existe une application continue $\mathrm{B} : \mathbb{R} \to \mathfrak{M}_\mathrm{n}(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall \mathrm{t} \in \mathbb{R}, \quad A'_t = B_tA_t - A_tB_t.$$

2. Rcpt, on suppose qu'il existe une application continue $B : \mathbb{R} \to \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad A'_t = B_t A_t - A_t B_t.$$

Démontrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, la matrice $A(t)$ est semblable à $A(0)$.

Sol...

Enoncé incomplet ou pire.

1 : On part de l'hypothèse réécrite :

$$\forall \mathrm{t} \in \mathbb{R}, \quad A_\mathrm{t} S_\mathrm{t} = S_\mathrm{t} A_0$$

et on dérive en appliquant la formule de Leibniz :

$$\forall \mathrm{t} \in \mathbb{R}, \quad A'_\mathrm{t} S_\mathrm{t} + A_\mathrm{t} S'_\mathrm{t} = \mathrm{S}'_\mathrm{t} A_0$$

Comme la matrice S_t est inversible, on en déduit que

$$\forall \mathrm{t} \in \mathbb{R}, \quad A'_\mathrm{t} = \mathrm{B_t} A_\mathrm{t} - A_\mathrm{t} \mathrm{B_t} \quad \text{avec} \quad \mathrm{B_t} = \mathrm{S}'_\mathrm{t} S_\mathrm{t}^{-1}$$

a) Comme S est de classe $\mathcal{C}^1$, l' application $[t \mapsto S'_\mathrm{t}]$ est continue et comme

$S_t \in GL_n(\mathbb{R})$ pour tout $t \in \mathbb{R}$,

l'application $\left[t \mapsto S_t^{-1}\right]$ est de classe $\mathcal{C}^1$. (Inutile de calculer la dérivée, fait en cours.)

2. Réciproquement, on s'appuie sur le calcul précédent pour deviner ce que vaudrait S_t.

On a en effet vu que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{S}'_\mathrm{t} = \mathrm{B_t S_t}.$$

Autrement dit, S serait une solution d'une équa diff linéaire homogène du premier ordre :

"facile" à résoudre ! Si on a les bonnes hyp...Commutations...

• Comme $[t \mapsto B_t]$ est continue, elle admet une primitive $[t \mapsto C_t]$ (de classe $\mathcal{C}^1 \ldots$)

telle que $C_0 = O_n$ et on pose

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad S_t = \exp C_t.$$

On a ainsi défini une application de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$S_0 = \exp O_n = I_n$$

et ""on sait que""...

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad S_t' = C_t' \left(\exp C_t\right) = \left(\exp C_t\right) C_t' = B_t S_t = S_t B_t$$

On "sait" aussi que

$$\forall \mathrm{t} \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{S_t^{-1}} = \exp\left(-\mathrm{C_t}\right)$$

et "donc que"

$$\forall \mathrm{t} \in \mathbb{R}, \quad \frac{\mathrm{d}\left[\mathrm{S_t^{-1}}\right]}{\mathrm{dt}} = -\mathrm{C_t'} \cdot \exp\left(-\mathrm{C_t}\right) = -\mathrm{B_t} \cdot \exp\left(-\mathrm{C_t}\right) = -\exp\left(-\mathrm{C_t}\right) \cdot \mathrm{B_t}$$

• On considère maintenant l'application $F : \mathbb{R} \to \mathfrak{M}_{\mathfrak{n}}(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F(t) = S_t^{-1} A_t S_t = \exp\left(-C_t\right) \cdot A_t \cdot \exp\left(C_t\right).$$

En particulier,

$$\mathrm{F}(0) = \mathrm{I}_n^{-1}\ \mathrm{A_0 I_n} = \mathrm{A_0}.$$

En tant que produit de trois applications de classe $\mathcal{C}^1$, la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ et on calcule sa dérivée : pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} F'(t) = & -\left[\exp\left(-C_t\right) \cdot B_t\right] \cdot A_t \cdot \exp\left(C_t\right) \\ & + \exp\left(-C_t\right) \cdot A_t' \cdot \exp\left(C_t\right) \\ & + \exp\left(-C_t\right) \cdot A_t \cdot \left[B_t \cdot \exp\left(C_t\right)\right] \\ = & \exp\left(-C_t\right) \cdot \left(A_t \cdot B_t - B_t \cdot A_t + A_t'\right) \cdot \exp\left(C_t\right) \\ = & O_n \end{aligned}$$

par hypothèse sur B_t. La fonction F est donc constante :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad S_t^{-1} \cdot A_t \cdot S_t = F(0) = A_0.$$

1037 Enoncé ds Centrale.

(a) Il ne s'agit pas d'un système différentiel mais de deux équations différentielles

indépendantes l'une de l'autre. On les résout donc séparément.

On les traite comme des équations du second ordre en les écrivant sous forme résoluble

(ce qui nous donne l'expression des fonctions f et g à définir pour appliquer odeint).

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x(\mathrm{t}) \\ x'(\mathrm{t}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'(\mathrm{t}) \\ -\alpha x'(\mathrm{t}) \end{pmatrix} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} y(t) \\ y'(\mathrm{t}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{y}'(\mathrm{t}) \\ -\alpha \mathrm{y}'(\mathrm{t}) - 1 \end{pmatrix}$$

REMARQUE.- Bien entendu, si on devait mener les calculs à la main,

on traiterait ces équations comme des équations du premier ordre d'inconnues $x'(t)$ et $y'(t)$.

- Pour une résolution numérique, tous les paramètres doivent être choisis :

pour le moment, la constante de temps α,

la durée d'étude $\mathrm{T}_{\max}$ et la vitesse initiale v sont fixés arbitrairement.

```
import numpy as np
from scipy.integrate import odeint

a=0.5
T_max, v=15,3.5
def f(X, t):
    x, xprime=X[0], X[1]
    x_seconde =-a * xprime
    return np.array ( [xprime, x_seconde ])
def g(Y, t):
    y,yprime=Y[0],Y[1]
    y_seconde=-a*yprime-1
    return np.array([yprime,y_seconde])
T=np. arange (0,t_max,0.01)
CI=np.array([0,v])
X=odeint(f, CI, T)
Y=odeint(g, CI, T)
```

• On rappelle la manière dont est défini le tableau retourné par la fonction odeint :

- la valeur $T[0]$ est l' instant initial t_0 ;

- le tableau CI contient $x\,(t_0)$ et $x'\,(t_0)$;

- le résultat X est un tableau de n lignes et 2 colonnes où n est égal à T ;

- pour tout $0 \leqslant k < n$, les flottants $X[k, 0]$ et $X[k, 1]$ sont des valeurs approchées

de $x\,(t_k)$ et $x'\,(t_k)$ où t_k est égal à $T[k]$.

(e) Dans un premier temps, on peut superposer les graphes de x et de y en fonction du temps.

```
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
plt.plot (T, X[:,0])

plt.plot (T, Y[:, 0])
```

On constate que la fonction x tend vers une limite finie,

tandis que la fonction y admet une asymptote oblique.

• On peut aussi tracer le support de l'arc paramétré $(x(t), y(t))_{t \in T}$.

```
plt.  figure()
plt.plot (X[:, 0], Y[:, 0])
```

On retrouve, sous une forme différente, les propriétés précédentes :

la trajectoire admet une asymptote verticale

(limite finie pour $x(t)$, limite infinie pour $y(t)$) mais on perd une information :

on ne voit plus que $y(t) = \mathcal{O}(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$.

• Pour tracer les trajectoires qui correspondent à plusieurs conditions initiales,

il faut répéter les opérations effectuées précédemment au sein $d'une$ boucle for.

```
plt.figure()
for v in np. arange (0.2,5.2,0.2):
    CI=np.array([0, v])
    X= odeint (f, CI, T)
    Y= odeint (g, CI, T)
    plt.plot (X[:,0], Y[:,0])
```

---

984 :

1.Une urne contient n boules blanches et n boules noires.

On effectue des tirages sans remise (une boule à la fois) jusqu'à ce que les boules

restant dans l'urne soient toutes de la même couleur.

Modéliser la loi du nombre $\mathrm{X_n}$ de boules qui restent dans l'urne à l'issue des tirages.

2. On considère deux urnes contenant chacune n boules.

On effectue des tirages sans remise (une boule à la fois),

en choisissant à chaque fois l'une des deux urnes de manière équiprobable

jusqu'à ce que l'on constate que l'urne choisie soit vide.

Modéliser la loi du nombre $\mathrm{Y_n}$ de boules qui restent dans l'autre urne à ce moment-là.

Calculer un équivalent de l'espérance de $\mathrm{Y_n}$.

Sol :

1. On modélise les tirages par une famille $(U_k)_{1\leqslant k\leqslant 2n}$ de variables aléatoires

de Bernoulli définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$, en faisant l$'$ hypothèse que

$$\forall (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k) \in \{0,1\}^k, \quad P\left(U_{k+1} = 1 \mid U_1 = \varepsilon_1, \ldots, U_k = \varepsilon_k\right) = \frac{n-\sigma_k}{2n-k}$$

où $\sigma_k = (\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_k)$.

Ce modèle est raisonnable : si l'événement $[U_1 = \varepsilon_1, \ldots, U_k = \varepsilon_k]$ est réalisé,

cela signifie qu'on a obtenu $\sigma_k = \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_k$ fois "1".

On a donc obtenu $k - \sigma_k$ fois " 0 ".

Comme l'urne contient initialement n boules de type "1" et n boules de type "0",

il reste donc $(2n-k)$ boules, parmi lesquelles on compte $(n-\sigma_k)$ boules de type "1"

et (donc) $(n-k+\sigma_k)$ boules de type "0".

Le quotient $(n-\sigma_k)/(2n-k)$ peut donc s'interpréter comme une hypothèse

d'équiprobabilité sur le résultat du $(k+1)$-ième tirage.

En supposant de plus que

$$P(u_1 = 1) = \frac{1}{2}\left(= \frac{n}{2n}\right)$$

ce modèle est complet, puisque les hypothèses qu'on vient de poser permettent de calculer

$$\mathrm{P}\left(\mathrm{U}_1 = \varepsilon_1, \ldots, \mathrm{U}_{2\mathrm{n}} = \varepsilon_{2n}\right)$$

quel que soit $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{2n}) \in \{0,1\}^{2n}$ par de la formule des probabilités composées.

- On peut en particulier vérifier que

$$\mathrm{P}\left(\mathrm{U}_1 = \varepsilon_1, \ldots, \mathrm{U}_{2\mathrm{n}} = \varepsilon_{2n}\right) = \frac{1}{\left(\begin{array}{c} 2n \\ n \end{array}\right)}$$

pour toute famille $(\varepsilon_k)_{1 \leqslant k \leqslant 2n}$ telle que $\sigma_{2n} = n$

$($= les familles qui constituent le support de la loi du vecteur $\left(\mathrm{U}_k\right)_{1 \leqslant k \leqslant 2n}\big)$.

Cette forme d'équiprobabilité va nous permettre de ramener le calcul

de la loi de X_n à du dénombrement.

- L'événement $[X_n = k]$ signifie qu'il ne reste k boules, toutes du même type, dans l'urne.

On a donc effectué $(2n-k)$ tirages,

qui ont amené les n boules $d'un$ premier type et $(n-k)$ du second type :

$$[X_n = k] = [X_n = k, U_{2n} = 1] \sqcup [X_n = k, U_{2n} = 0]$$

et par équiprobabilité

$$\mathbf{P}\left(X_n = k\right) = 2P\left(X_n = k, U_{2n} = 0\right).$$

D' après la règle du jeu, l'événement $[X_n = k, U_{2n} = 0]$ est égal à

$$\Big[X_n = k, \quad \underbrace{\mathrm{U}_{2n-k} = 1}_{\substack{\text{dernière boule} \\ \text{de type "1"}}} \quad , \underbrace{\mathrm{U}_{(2n-k)+1} = \mathrm{U}_{(2n-k)+2} = \cdots = \mathrm{U}_{(2n-k)+\mathrm{k}} = 0}_{\text{les } k \text{ derniers tirages}}\Big].$$

C' est donc la réunion de tous les événements

$$[\mathrm{U}_1 = \varepsilon_1, \ldots, \mathrm{U}_\mathrm{n} = \varepsilon_\mathrm{n}]$$

tels que $\varepsilon_{2n-k} = 1$ et $\varepsilon_{2n-k+1} = \varepsilon_{2n-k+2} = \cdots = \varepsilon_{2n} = 0$.

Comme il existe exactement $\left(\begin{array}{c} 2n-k-1 \\ n-1 \end{array}\right)$ événements de ce genre

(on place les $(n-1)$ boules de type "1" qui ont précédé la dernière boule de type "1" parmi les $(2n-k-1)$ premiers tirages), on en déduit que

$$\forall 1 \leqslant \mathrm{k} \leqslant \mathrm{n}, \quad \mathrm{P}\left(X_n=\mathrm{k}\right)=\frac{2\left(\begin{array}{c}2n-k-1\\ n-1\end{array}\right)}{\left(\begin{array}{c}2n\\ n\end{array}\right)}$$

- Il n'est pas inutile de vérifier la cohérence de ce résultat ! Comme

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\left(\begin{array}{c}2n-k-1\\ n-1\end{array}\right) &= \sum_{k=1}^{n}\left(\begin{array}{c}(n-1)+(n-k)\\ n-1\end{array}\right)\\ &= \sum_{k=n-1}^{2n-2}\left(\begin{array}{c}k\\ n-1\end{array}\right) \quad (k \leftarrow 2n-k-1)\\ &= \left(\begin{array}{c}2n-1\\ n\end{array}\right)\\ &= \frac{n}{2n}\left(\begin{array}{c}2n\\ n\end{array}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\begin{array}{c}2n\\ n\end{array}\right) \quad \text{(triangle de Pascal)}\end{aligned}$$

2 On modélise la seconde expérience par une famille $(V_k)_{1\leqslant k\leqslant 2n+2}$ de variables aléatoires

de Bernoulli définies sur l'espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathrm{P})$ en supposant que la probabilité

$$\mathrm{P}\left(\mathrm{V}_1=\varepsilon_1,\cdots,\mathrm{V}_{2n+2}=\varepsilon_{2n+2}\right)$$

est la même pour tout vecteur $\varepsilon=(\varepsilon_k)_{1\leqslant k\leqslant 2n+2}\in\{0,1\}^{2n+2}$ tel que

$$\sigma_{2n+2}=\sum_{k=1}^{2n+2}\varepsilon_k=n+1$$

Cela revient à dire qu'on effectue de manière équiprobable $(2n+2)$ tirages successifs,

tantôt dans l'urne "1", tantôt dans l'urne "0",

et qu'on effectue exactement $(n+1)$ tirages dans chacune des urnes.

Le cardinal de l'ensemble E_{n+1} des vecteurs ε tels que $\sigma_{2n+2}=n+1$ est égal à $\left(\begin{array}{c}2n+2\\ n+1\end{array}\right)$

(on choisit les positions de n éléments égaux à "0" parmi $(2n+2)$ positions possibles,

les n éléments égaux à "1" occuperont les positions restées libres).

- Ce modèle est évidemment complet,

puisque la loi du vecteur aléatoire $(V_k)_{1\leqslant k\leqslant 2n+2}$ est parfaitement définie.

- Ce modèle est aussi raisonnable au regard de la situation étudiée.

Car dans l'énoncé, chaque urne contient n boules et après avoir tiré les n boules de l'urne,

il faut un $(n+1)$-ième tirage pour constater que l'urne est vide.

On peut aussi bien imaginer que chaque urne contient en fait $(n+1)$ boules et que la procédure s'arrête lors du tirage de cette $(n+1)$-ième boule fictive : cet artifice permet de ramener cette nouvelle situation à la situation précédente.

- Il reste cependant à vérifier que ce modèle est cohérent avec l'énoncé qui exige que

$$\forall 1 \leqslant \mathrm{k} \leqslant 2\mathrm{n}+2, \quad \mathrm{P}\left(\mathrm{V_k}=1\right)=\frac{1}{2}.$$

Or

$$[\mathrm{V_k}=1]=\bigsqcup_{\substack{\varepsilon\in \mathrm{E}_{n+1}\\ \text{t.q. } \varepsilon_{\mathrm{k}}=1}}\left[\ \mathrm{V}_1=\varepsilon_1,\ldots,\mathrm{V}_{2\mathrm{n}+2}=\varepsilon_{2n+2}\right].$$

Ces événements sont tous équiprobables et leur nombre est égal à $\begin{pmatrix} 2n+1 \\ n \end{pmatrix}$

(il faut placer n "1", la position k est occupée par un "1" et on choisit n positions parmi

les $(2n+1)$ autres positions pour placer les n autres "1"). Donc

$$\mathbf{P}\left(\mathrm{V_k}=1\right)=\frac{\begin{pmatrix} 2n+1 \\ \mathrm{n} \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} n+2 \\ n+1 \end{pmatrix}}=\frac{(2n+1)!}{n!(n+1)!}\cdot\frac{(n+1)!(n+1)!}{(2n+2)!}=\frac{n+1}{2n+2}=\frac{1}{2}.$$

Jusqu'ici, tout va bien...

- La valeur prise par la variable aléatoire Y_n est comprise entre 0

(lorsqu'on vide la seconde urne avant de constater que la première urne vidée est bien vide)

et n (lorsqu'on constate qu'une urne est vide avant de tirer la première boule de l'autre urne).

- Comme dans le premier cas,

$$[Y_n=k]=[Y_n=k,V_{2n+2}=0]\sqcup[Y_n=k,V_{2n+2}=1]$$

et par équiprobabilité,

$$\mathbf{P}\left(Y_n = k\right) = 2P\left(Y_n = k, V_{2n+2} = 0\right).$$

L'événement $[V_{2n+2} = 0]$ signifie que le dernier tirage a lieu dans l'urne "0"

et donc qu'on a déjà constaté que l' urne "1" a été vidée.

La contrainte $[Y_n = k]$ signifie alors qu'on a tiré k fois de suite dans $l'urne$ "0" avant d'effectuer le $(2n+2)$-ième et dernier tirage (également dans l' urne " 0" ").

Autrement dit, on s$'$ intéresse aux événements

$$[(V_1, \ldots, V_{2n+2}) = \varepsilon]$$

tels que

$$V_{2n+1-k} = 1, \quad V_{(2n+1-k)+1} = \cdots = V_{(2n+1-k)+k} = 0, \quad V_{2n+2} = 0$$

(on constate que l'urne "1" est vide ; on tire encore k boules dans l'urne "0" et on constate pour finir que l'urne "0" est vide elle aussi).

Le nombre de ces événements est égal à $\begin{pmatrix} 2n-k \\ n \end{pmatrix}$ (on choisit la place des n boules "1" parmi les ($2n-k$) positions libres) et par conséquent

$$\forall 0 \leqslant k \leqslant n, \quad P\left(Y_n = k\right) = \frac{2\begin{pmatrix} 2n-k \\ n \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 2n+2 \\ n+1 \end{pmatrix}}.$$

REMARQUE.

- On constate que les variables aléatoires Y_n et $X_{n+1} - 1$ suivent la même loi :

les encadrements $1 \leqslant k \leqslant n+1$ et $0 \leqslant k-1 \leqslant n$ sontéquivalents et

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left(\mathrm{X}_{n+1} - 1 = \mathrm{k} - 1\right) = \mathrm{P}\left(\mathrm{X}_{\mathrm{n}+1} = \mathrm{k}\right) = \frac{2\begin{pmatrix} 2(\mathrm{n}+1) - \mathrm{k} - 1 \\ (\mathrm{n}+1) - 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 2(\mathrm{n}+1) \\ \mathrm{n}+1 \end{pmatrix}} = \frac{2\begin{pmatrix} 2\mathrm{n} - (\mathrm{k}-1) \\ \mathrm{n} \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 2\mathrm{n}+2 \\ \mathrm{n}+1 \end{pmatrix}} \\ = \mathrm{P}\left(\mathrm{Y}_{\mathrm{n}} = \mathrm{k} - 1\right). \end{aligned}$$

Si on veut traiter l'exercice dans le temps imparti, il serait judicieux de partir de cette remarque, en la fondant par un argument combinatoire (sans entrer dans les détails).

Comme Y_n est bornée, c'est bien une variable aléatoire d'espérance finie et, par définition de l'espérance,

$$\begin{aligned} E(Y_n) &= \sum_{k=0}^{n} kP(Y_n = k) = \frac{2}{\binom{2n+2}{n+1}} \sum_{k=0}^{n} k.\binom{2n-k}{n} \\ &= \frac{2}{\binom{2n+2}{n+1}} \left[2n \sum_{k=n}^{2n} \binom{k}{n} - \sum_{k=n}^{2n} k \binom{k}{n} \right] \qquad (k \longleftarrow 2n-k) \end{aligned}$$

D'après la formule du triangle de Pascal (généralisée),

$$\sum_{k=n}^{2n} \binom{k}{n} = \binom{2n+1}{n+1} \text{ et } \sum_{k=n}^{2n} k \binom{k}{n} = (n+1)\binom{2n+2}{n+2} - \binom{2n+1}{n+1}$$

donc

$$\forall n \geqslant 1, \quad E(Y_n) = \frac{2}{\binom{2n+2}{n+1}} \cdot \left[(2n+1)\binom{2n+1}{n+1} - (n+1)\binom{2n+2}{n+2} \right].$$

Après quelques simplifications,

$$E(Y_n) = \frac{n}{n+2}$$

qui tend vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$.

1109 :

Soit $(X_n)_n \geqslant 1$, une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur

l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$. On suppose que ces variables suivent toutes la même loi

géométrique $\mathcal{G}$(p) de paramètre 0 < p < 1 et on note, comme d'habitude, $q = 1 - p$.

Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose

$$C(\omega) = \max \{n \in N^* : X_1(\omega) \leqslant X_2(\omega) \leqslant \cdots \leqslant X_n(\omega)\}.$$

1. Pour $k \in N^*$, calculer $\mathbf{P}(X_1 \geqslant k), \mathbf{P}(X_2 \geqslant X_1, X_1 = k)$ et $\mathbf{P}(C \geqslant 2)$.

2.Écrire une fonction geomCr(q) qui renvoie une réalisation de la variable aléatoire C.

3.Écrire une fct nbGeomCr (q) qui renvoie la moyenne de C calculée sur 1000 réalisations.

En admettant que C soit une variable aléatoire de variance finie,

justifier que cette fonction donne une valeur approchée acceptable de $\mathbf{E}$(C).

4. Tracer nbGeomCr (q) en fonction de $0 < q < 1$.

Que peut-on conjecturer sur les limites de $\mathbf{E}$(C) lorsque q tend vers 0 ou vers 1 ?

5. Démontrer que

$$\mathbf{P}\left(X_n \geqslant X_{n-1} \geqslant \cdots \geqslant X_1 \geqslant k\right) = \frac{(1-q)^n q^{n(k-1)}}{(1-q)\left(1-q^2\right)\cdots\left(1-q^n\right)}$$

pour tout k $\in$ N*.

6. Calculer $\mathbf{E}$(C) en fonction de q.

7. Démontrer les propriétés conjecturées plus haut.

Sol :

- En toute rigueur, C est une variable aléatoire à valeurs dans N $\cup$ {+∞} puisque

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad [C \geqslant k] \in \mathcal{A}$$

(en convenant que max N $= +\infty \geqslant k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$).

Le calcul de la loi de C permet de vérifier que C est néanmoins presque sûrement finie :

$$\mathbf{P}(C \in \mathbb{N}) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}^*}[C \geqslant k]\right) = \lim_{k\to+\infty} \mathbf{P}(C \geqslant k)$$

par continuité décroissante.

1. En décomposant sur le système complet d'événements associé à la variable aléatoire X_1,

$$[X_1 \geqslant k] = \bigsqcup_{i\geqslant k}[X_1 = i]$$

et par σ-additivité de $\mathbf{P}$,

$$\mathbf{P}\left(X_1 \geqslant k\right) = \sum_{i=k}^{+\infty} pq^{i-1} = q^{k-1}$$

Il est clair que

$$[X_2 \geqslant X_1, X_1 = k] = [X_2 \geqslant k] \cap [X_1 = k]$$

et comme X_1 et X_2 sont indépendantes et de même loi,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(X_2 \geqslant X_1, X_1 = k\right) &= \mathbf{P}\left(X_2 \geqslant k\right)\mathbf{P}\left(X_1 = k\right) = \mathbf{P}\left(X_1 \geqslant k\right)\mathbf{P}\left(X_1 = k\right)\\ &= q^{k-1} \cdot p \cdot q^{k-1}\\ &= p \cdot q^{2(k-1)}\end{aligned}$$

e. Avec la convention précisée plus haut,

$$[C \geqslant 2] = [X_2 \geqslant X_1] = \bigsqcup_{k \in N^*} [X_2 \geqslant X_1, X_1 = k] \in \mathcal{A}$$

donc

$$\mathbf{P}(C \geqslant 2) = \sum_{k=1}^{+\infty} p \cdot q^{2(k-1)} = \frac{p}{1-q^2} = \frac{1}{1+q}.$$

La documentation officielle de Python nous suggère fortement de commencer ainsi.

```
from numpy.random import default_rng as generateur
def G(p):
    return generateur().geometric(p)
```

Ensuite, il reste à effectuer des simulations successives jusqu'à ce qu'on tombe

sur une valeur plus petite que la valeur précédente.

```
def geomCr(q):
    p=1-q
    ref,C,valeur=G(p)1,G(p)
    while valeur>=ref:
        ref,C,valeur=valeur,C+1,G(p)
    return C
```

C'est ici qu'il est important de savoir que C est finie presque sûrement...

3. Il s'agit simplement de calculer une moyenne sur 1000 termes.

```
def nbGeomCr(q):
    S=0
    for n in range(1000):
        S+=geomCr(q)
    return S/1000
```

- Si C est une variable aléatoire de variance finie,

alors on peut appliquer la Loi des grands nombres :

si $(C_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi que C,

alors la moyenne

$$\frac{C_1+\cdots+C_n}{n}$$

converge en probabilité vers $\mathbf{E}(C)$ - au sens où

$$\forall \varepsilon>0, \quad \lim_{n\to+\infty}\mathbf{P}\left(\left|\frac{C_1+\cdots+C_n}{n}-\mathbf{E}(C)\right|\geqslant\varepsilon\right)=0$$

C'est en ce sens que la valeur renvoyée par la fonction $nbGeomCr(q)$ (avec $n=10^3$)

est une approximation convenable de $\mathbf{E}$(C).

• On a énoncé la Loi des grands nombres telle qu'elle figure au programme.

Sous les mêmes hypothèses (et même sous des hypothèses plus faibles),

la moyenne empirique converge vers $\mathbf{E}$(C) presque sûrement :

$$\mathbf{P}\left(\lim_{n\to+\infty}\frac{C_1+\cdots+C_n}{n}=\mathbf{E}(C)\right)=1$$

4.Le code est bien connu.

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numy as np
Q=np.linspace(0.01,0.99,100)
EC=[nbGeomCr(q) for q in Q]
plt.plot(Q,EC)
plt.xlabel("paramètre q")
plt.ylabel("Espérance de C")
```

Qui donne :

Courbe décroissante de 100 à 0.

On peut conjecturer que $\mathbf{E}(\mathrm{C})$ tend vers $+\infty$ au voisinage de 0

et vers une limite positive au voisinage de 1.

• Une variable aléatoire géométrique de paramètre p modélise le temps d'attente

du premier succès lors d'expériences indépendantes ayant une probabilité p de réussir

et donc une probabilité q d'échouer.

- Lorsque q tend vers 0, chaque expérience a une très forte probabilité de réussir.

Autrement dit, les variables aléatoires $\mathrm{X_n}$ sont très souvent égales à 1

(= réussite du premier coup).

On comprend ainsi que C peut alors prendre de grandes valeurs.

- Inversement, lorsque q tend vers 1 , chaque expérience a une faible probabilité de réussir

et dans ces conditions les variables aléatoires X_n peuvent prendre des valeurs assez grandes,

donc relativement variées et comme elles sont indépendantes,

il est très peu probable qu'elles prennent des valeurs croissantes.

On comprend que, cette fois, C est très souvent égale à 1 et que l'espérance

de C ne soit guère plus grande que 1.

5. Comme $X_1, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A})$,

$$[X_n \geqslant X_{n-1} \geqslant \cdots \geqslant X_1 \geqslant k] \in \mathcal{A}.$$

En décomposant cet événement sur le système complet associé à X_1,

$$\begin{aligned}[X_n \geqslant X_{n-1} \geqslant \cdots \geqslant X_1 \geqslant k] &= \bigsqcup_{\ell \in \mathbb{N}^*} [X_n \geqslant X_{n-1} \geqslant \cdots \geqslant X_1 \geqslant k] \cap [X_1 = \ell] \\ &= \bigsqcup_{\ell \geqslant k} [X_n \geqslant \cdots \geqslant X_2 \geqslant \ell] \cap [X_1 = \ell]\end{aligned}$$

Par σ-additivité, on en déduit que

$$\mathbf{P}\left(X_n \geqslant X_{n-1} \geqslant \cdots \geqslant X_1 \geqslant k\right) = \sum_{\ell=k}^{+\infty} \mathbf{P}\left([X_n \geqslant \cdots \geqslant X_2 \geqslant \ell] \cap [X_1 = \ell]\right).$$

Comme $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont indépendantes,

on déduit du lemme des coalitions que les événements

$$[X_n \geqslant \cdots \geqslant X_2 \geqslant \ell] \quad \text{ et } \ [X_1 = \ell]$$

sont indépendants, donc

$$\mathbf{P}\left([X_n \geqslant \cdots \geqslant X_2 \geqslant \ell] \cap [X_1 = \ell]\right) = \mathbf{P}\left(X_n \geqslant \cdots \geqslant X_2 \geqslant \ell\right) \mathbf{P}\left(X_1 = \ell\right).$$

De plus, comme $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont indépendantes et de même loi, les vecteurs aléatoires

$$(X_1, \ldots, X_{n-1}) \ \text{ et } \ (X_2, \ldots, X_n)$$

ont même loi et par conséquent

$$\mathbf{P}\left(X_n \geqslant \cdots \geqslant X_2 \geqslant \ell\right) = \mathbf{P}\left(X_{n-1} \geqslant \cdots \geqslant X_1 \geqslant \ell\right)$$

On a ainsi démontré que

$$\mathbf{P}\left(X_n \geqslant X_{n-1} \geqslant \cdots \geqslant X_1 \geqslant k\right) = \sum_{\ell=k}^{+\infty} \mathbf{P}\left(X_{n-1} \geqslant \cdots \geqslant X_1 \geqslant \ell\right) \mathbf{P}\left(X_1 = \ell\right)$$

pour tout $k \in N^*$ et tout $n \geqslant 2$.

e. En reprenant les calculs menés plus haut, on montre que

$$\forall k \in N^*, \quad \mathbf{P}\left(X_2 \geqslant X_1 \geqslant k\right) = \frac{pq^{2(k-1)}}{1-q^2} = \frac{(1-q)^2 q^{2(k-1)}}{(1-q)\left(1-q^2\right)}$$

et cela valide la formule de l'énoncé pour $n = 2$.

En supposant que

$$\mathbf{P}\left(X_{n-1} \geqslant \cdots \geqslant X_1 \geqslant \ell\right) = \frac{(1-q)^{n-1} q^{(n-1)(\ell-1)}}{(1-q)\left(1-q^2\right) \cdots \left(1-q^{n-1}\right)}$$

pour un entier $n \geqslant 2$ et pour tout $\ell \in N^*$, on déduit de ce qui précède que

$$\mathbf{P}\left(X_n \geqslant \cdots \geqslant X_1 \geqslant k\right) = \sum_{\ell=k}^{+\infty} \frac{(1-q)^{n-1} q^{(n-1)(\ell-1)}}{(1-q)\left(1-q^2\right)\cdots\left(1-q^{n-1}\right)} \cdot p^{\ell-1}$$
$$= \frac{(1-q)^n q^{n(k-1)}}{(1-q)\left(1-q^2\right)\cdots\left(1-q^{n-1}\right)\left(1-q^n\right)}$$
pour tout $k \in \mathrm{N}^*$: le résultat est démontré par récurrence.

$\therefore$ Remercions le sujet de cette précieuse indication : le calcul par récurrence de

$$\mathbf{P}\left(X_n \geqslant \cdots \geqslant X_1 \geqslant k\right)$$
est plus facile que le calcul direct de

$$\mathbf{P}\left(X_n \geqslant \cdots \geqslant X_1\right) = \mathbf{P}\left(X_n \geqslant \cdots \geqslant X_1 \geqslant 1\right)$$
Par définition de C,

$$\forall n \in N^*, \quad [C \geqslant n] = [X_n \geqslant \cdots \geqslant X_1 \geqslant 1] \in \mathcal{A},$$
ce qui prouve enfin que C est bien une variable aléatoire à valeurs dans $\mathrm{N} \cup \{+\infty\}$.

On peut aussi déduire du calcul précédent que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant \mathbf{P}(\mathrm{C} \geqslant n+1) = \frac{1-q}{1-q^{n+1}} \cdot \mathbf{P}(C \geqslant n) \leqslant \frac{1}{1+q} \cdot \mathbf{P}(C \geqslant n)$$
et donc que

$$\mathbf{P}(C \geqslant n) \underset{n \to +\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{(1+q)^n}\right).$$
Cela confirme ce qu'on avait annoncé :

$\mathbf{P}(\mathrm{C} = +\infty) = 0$ et on peut donc,

à une partie négligeable près de Ω, considérer que C est une variable aléatoire à valeurs dans N.

6. "On sait bien" qu'une variable aléatoire à valeurs dans N est d'espérance finie si,

et seulement si, la série $\sum P(C \geqslant n)$ est convergente et que, dans ce cas,

$$\mathbf{E}(C) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(C \geqslant n)$$

La remarque précédente prouve donc que C est une variable aléatoire d'espérance finie et que

$$E(C) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1-q^n)}{(1-q)\,(1-q^2)\cdots(1-q^n)}$$

7. Commençons par démontrer que C est une variable aléatoire de variance finie.

On sait que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbf{P}(C = n) = \mathbf{P}(C \geqslant n) - \mathbf{P}(C \geqslant n+1)$$

et, d'après la remarque faite plus haut,

$$0 \leqslant \mathbf{P}(C = n) = \frac{q\,(1-q^n)}{1-q^{n+1}} \cdot \mathbf{P}(C \geqslant n) \leqslant q\mathbf{P}(C \geqslant n)$$

Par conséquent,

$$\mathbf{P}(\mathrm{C} = \mathrm{n}) \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left[\left(\frac{\mathrm{q}}{1+\mathrm{q}}\right)^n\right]$$

et cette estimation prouve que C admet des moments de tout ordre :

quel que soit l'entier $d \geqslant 1$, la série $\sum n^{\mathrm{d}}\mathbf{P}(C = n)$ est (absolument) convergente.

On a ainsi validé a posteriori l'application de la Loi des grands nombres.

(Il reste à étudier les limites de $\mathbf{E}(C)$ lorsque q tend vers 0 ou vers 1) .

Pour cela, on pose $u_1(q) = 1$ et

$$u_n(q) = \frac{(1-q)^n}{(1-q)\,(1-q^2)\cdots(1-q^n)}$$
$$= \frac{1}{(1+q)\,(1+q+q^2)\cdots(1+q+\cdots+q^{n-1})}$$

pour tout $n \geqslant 2$ et tout $0 < q < 1$.

- Comme chaque fonction u_n est positive et décroissante, la fonction

$$[q \mapsto \mathbf{E}(C)]$$

est elle aussi positive et décroissante.

Elle admet donc une limite, finie ou infinie, lorsque q tend vers 0 et

$$\forall n \geqslant 2, \quad \lim_{q\to 0} \mathbf{E}(C) \geqslant \lim_{q\to 0} \sum_{k=1}^{n} u_n(q) = \sum_{k=1}^{n} \lim_{q\to 0} u_n(q) = n.$$

Cela prouve que $\mathbf{E}(C)$ tend effectivement vers $+\infty$ lorsque q tend vers 0 .

sur la deuxième expression de $u_n(q)$, il est clair que

$$\forall n \geqslant 2, \forall q \geqslant \frac{1}{2}, \quad 0 \leqslant u_n(q) \leqslant u_n(1/2)$$

et comme la série $\sum u_n(1/2)$ converge,

on a démontré que la série $\sum u_n$ convergeait normalement sur $[1/2, 1[$. Par conséquent,

$$\lim_{q\to 1} E(C) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{q\to 1} u_n(q) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} = e - 1 \approx 1,7$$

Equa diff voir CD 16.12 page 578.