RMS Centrale
PSI *
Année 2019

Année -2.

Attention aux erreurs de frappes...

Algèbre

987. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on pose $\varphi(A) = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$.

a) Montrer que l'on définit ainsi une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $\forall i \in [\![1,n]\!], |a_{i,i}| > \sum\limits_{j\neq i}^{n} |a_{i,j}|$. Montrer que pour tout

$b \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'équation $AX = b$ admet une unique solution dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Sol : a) Est -ce du cours ?

Il suffirait de montrer que $A \in GL_n(\mathbb{R})$, prenons un éventuel élément non nul du noyau ; X.

Soit j tel que $x_j \neq 0$ soit la plus grosse composante de X en valeur absolue.

En regardant $AX = 0$, on cible la ligne j , on isole $\alpha_{j,j}x_j$,

on majore brutalement par inégalité triangulaire , absurde.

988. Soient $n \geqslant 1, A, B \in \mathbb{R}_n[X]$ et $a \in \mathbb{R}$. On suppose $A(a) \neq 0$.

On considère l'ensemble $E = \{P \in \mathbb{R}_n[X], P + P(a)A = B\}$ et la fonction $f : P \mapsto P(a)A$

a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et calculer son rang.

b) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

c) En utilisant la question precédente, déterminer E.

Sol : D'abord l'image est naturellement incluse dans $< A >$.

Et $f(A) \neq 0$. Donc le rang est 1. Rappel : $dim\mathbb{R}_n[X] = n + 1$.

b) Oui , c'est diagonalisable . Base adaptée formée de A puis une base du noyau.

Diag $(A(a), 0, ..., 0)$.

c) Tout d'abord, ceci est typique d'une vla, principe de superposition.

Là, il faut maintenenant discuter suivant les paramètres.

Si $A(a) \neq -1$, la matrice de l'application (pas f) est inversible, solution unique.

On évalue en a, il vient $P(a) = \dfrac{B(a)}{1+A(a)}$.

D'où, $P_0 = B - \dfrac{B(a)}{1+A(a)}A$.

Mais si $A(a) = -1$, la matrice est $\operatorname{diag}(0, 1, ..., 1)$ donc l'image est $\ker f$.

Donc si $B(a) \neq 0$ ensemble vide.

Mais si $B(a) = 0$, les solutions sont l'addition naturelle d'une solution particulière et du noyau.

B_0 solution particulière B lui-même.

Donc $B + < A >$.

989. A quelles conditions $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & c & 2 & 0 \\ d & e & f & 2 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Le cas échéant, diagonaliser effectivement A.

Sol :

Les valeurs propres de A sont 1 et 2 , et elles sont doubles.

La matrice A est donc diagonalisable si et seulement si les noyaux de $A - I_4$ et de $A - 2I_4$ sont de dimension 2, c'est-à-dire (car on en dimension 4 et en vertu du théorème du rang) si ces matrices sont de rang 2.

D'une part : $A - I_4 = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

D'autre part : $A - 2I_4 = \begin{pmatrix} -1 & a & b & c \\ 0 & -1 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ainsi $\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{rg}(A - I_4) = 2 \Leftrightarrow a = 0 \\ \operatorname{rg}(A - 2I_4) = 2 \Leftrightarrow f = 0 \end{array} \right.$

Une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable est donc : $a = f = 0$.

992. PYTHON Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\omega_n = e^{2i\pi/n}$ et

$F_n \in M_n(\mathbb{C})$ la matrice $\left(\omega_n^{(k-1)(l-1)}\right)_{1\leqslant k,l\leqslant n}$.

a) Ecrire une fonction Python qui prend un entier n en argument et renvoie F_n.

Afficher plusieurs matrices F_n.

b) Calculer avec Python le produit $F_n\overline{F_n}$.

c) Écrire une fonction Python qui prend un entier n en argument et renvoie F_n^{-1}.

Que peut-on conjecturer ?

d) Ecrire une fonction Python qui prend deux entiers n et k en arguments et renvoie F_n^k.

Que peut-on conjecturer ?

e) Démontrer les conjectures précédentes.

f) Déterminer les valeurs propres de F_n. Cette matrice est-elle diagonalisable ?

Sol : Exo utile... Voilà les codes :

Attention à la manipulation des complexes, donc attention aux dtypes...

```
import numpy as np
import numpy.linalg as alg
from numpy.polynomial import Polynomial
from math import *

#pour un affichage raisonnable
#on peut limiter le nombre de décimales
np.set_printoptions(precision=2)
# et ici ce n'est pas du luxe...
def F(n):#je ne m'occupe pas de diminuer la complexité
    omega=np.exp(2*1j*np.pi/n)
    F=np.zeros((n,n),dtype=complex)# attention aux types...
    for i in range(n):
        for k in range(n):
            F[i,k]=np.exp(2*1j*np.pi*i*k/n)
    return F/sqrt(n)# la racine carrée facilite la lecture
#for s in range(2,5):
    print(np.dot(F(s),np.conj(F(s))))
def FI(n):
    G=alg.matrix_power(F(n),-1)
    return G
def FP(n,k):
    HH=F(n)
    H=np.identity(n,dtype=complex)#ou np.eye
    if k==0:
        return H
    elif k>0:
        L=H
        for s in range(k):
            L=np.dot(L,HH)#ou méthode dot(voir Centrale.py)
        return L
    else:
        L=H
        for s in range(k):
            L=np.dot(L,HH)
        return alg.matrix_power(L,-1)
#alg.eigvals(F(5))
```

1) Voir code .

2) (np.dot(F(3),np.conj(F(3)))), on conjecture que c'est $n.I_n$.

conj comme conjugué !

Il nous vient l'idée du $\sqrt{n}$ qui améliore bcp la lecture...

3) Voir code. Il semble que $F_n^{-1} = \dfrac{1}{n}\overline{F_n}$. Je note $G_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}F_n$...

4) Voir code. Fonction FP.

On conjecture que $G_n^4 = I_n$, d'où les puissances de F_n.

Rq : On conjecture aussi $G_n^2 = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & S_{n-1} \end{array}\right)$.

Avec S_{n-1} qui n'a des 1 que sur la "mauvaise" diagonale.

e) Calculs de première année :

Il faut poser les produits matriciels qui finiront par confirmer que $G_n\overline{G_n} = I_n$ et $G_n^2 = ...$

L'essentiel dans ce calcul est de maitriser que $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}(\omega_n^s)^j$,

vaut n quand s multiple de n et 0 sinon.

Ceci se démontre facilement avec des sommes géométriques. (attention à la raison).

Le conjugué dans les calculs revient à multiplier l'exposant de ω_n par -1.

Pour $G_n^4 = (G_n^2)^2$, il ne faut pas passer par les coefficients,

mais regarder l'application linéaire associée à G_n^2...

f) Oui, c'est diagonalisable. Mais ça ne vient pas du thm spectral , car ici symétrique mais $\mathbb{C}$.

On un polynôme annulateur scindé simple pour G_n, $X^4 - 1$.

Les valeurs propres sont donc incluses dans : $\{1, -1, i, -i\}$, pour G_n.

Ne pas oublier de remultiplier par $\sqrt{n}$.

Les valeurs propres sont dans la dernière ligne du code.

Le détail mathématique ne me semble pas raisonnable...

993. PYTHON Soit n un entier naturel. On considère la matrice $A_{n+1} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que $a_{j-1,j} = j-1, a_{j+1,j} = n+1-j$ pour tout j, et dont tous les autres coefficients sont nuls.

a) Écrire une fonction Python qui prend un entier n en argument et renvoie A_{n+1}

b) Déterminer avec Python les valeurs propres de A_{n+1}. Que peut-on conjecturer ?

c) Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ canoniquement associé à la matrice A_{n+1}.

Montrer qu'il existe un polynome Q ne dépendant pas de n tel que,

pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X], u(P) = QP' + nXP$.

d) En déduire les éléments propres de u.

e) La matrice A_{n+1} est-elle diagonalisable ?

```
import numpy as np
import numpy.linalg as alg
from numpy.polynomial import Polynomial
from math import *
#pour un affichage raisonnable
#on peut limiter le nombre de décimales
np.set_printoptions(precision=2)

def A(n):# attention aux index...
    B=np.zeros((n+1,n+1))
    for j in range (0,n+1):
        B[j-1,j]=j
    for j in range (0,n):
        B[j+1,j]=n-j
    return B
#alg.eigvals(A(s))
```

b) On peut conjecturer à la lecture des résulats Python que les valeurs propres

sont 2 à 2 distinctes et au nombre de $n+1$ et valent $2k-n$ pour $k \in \{0, ..., n\}$.

Bref $\{n, n-2, n-4, ..., 2-n, -n\}$.

c) En regardant l'image de la base canonique, on conjecture que $Q = 1 - X^2$.

On regarde l'endomorphisme ainsi crée et ça marche pour toute la base canonique.

d) On gère le problème comme une EDL homogène du premier ordre (première année).

Soit $\lambda \in \{n, n-2, n-4, ..., 2-n, -n\}$, l'EDL est : $P' + \dfrac{nX - \lambda}{1 - X^2} P = 0$.

On intègre ...$P = \mu(X^2 - 1)^{n/2}. \left(\dfrac{X+1}{X-1}\right)^{2k-n}$.

On trouve bien des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$!!! Penser à simplifier les quotients.

Penser à séparer le cas n pair et le cas contraire.

Penser à vérifier les degrés, le cas n pair amène à la non-injectivité.

e) Bref, ça diagonalise.

994.

Sol vu exo 1 : oraux centrale bis 2019

995. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $(E_1) : A^4 + I_2 = 0$ et $(E_2) : A^T A = AA^T$.

u et v les endomorphismes resp représentés par A et A^T dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

a) i) Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Quelles sont les valeurs propres possibles ?

ii) Montrer que tout vecteur propre de u est vecteur propre de v.

b) Quelles sont les matrices satisfaisant (E_1) et (E_2)?

Sol : rq perso, il y a peut-être plus court que ça...Mais attention aux solutions bidons.

On remarque (?) des solutions "évidentes", les 4 rotations vectorielles d'angles $\pi/, 3\pi/4, ...$

a)i) C'est l'occasion de résoudre $z^4 + 1 = 0$... Classique ?

Sol évidente : $e^{\frac{i\pi}{4}}$. Donc $z/(e^{\frac{i\pi}{4}})$ est une racine quatrième de l'unité $\mathbb{U}_4$.

A est annulé par ce polynôme scindé simple sur $\mathbb{C}$, donc diagonalisable.

Les valeurs propres sont à prendre dans les racines de ce polynôme : $e^{\frac{i\pi}{4}}\mathbb{U}_4$.

ii) Du cours, page 15 du votre .

Comme ça commute, chacun laisse stable les sep de l'autre...On a alors un endo induit.

On parle de la restriction de v à $\ker(u - \lambda Id)$.

Cet endo induit admet lui-même une valp (on est sur $\mathbb{C}$)...

Le vect propre associé est donc recevable pour les deux . Clair ? sinon me demander !

Attention , ici il a un tout ! ! !

Dans le cas très particulier qui est le notre, les sep sont de dimension 1,

car dim globale 2 et ce n'est pas une homothétie.

Donc $\forall X \neq \overrightarrow{0} / uX = \lambda X$, $vX \in \ker(u - \lambda Id) =< X >$.

b) Là, ça chauffe un peu...

Rappels , il y avait les 4 du début, les seules ?

A est $\mathbb{C}$ diago, mais trace, détermiant, poly caract seront les mêmes.

Soient α, β les valeurs propres de cette diagonalisation, elles sont distinctes,

sinon on aurait un homothétie (impossible). Rappel pas de valp réelle.

Mais la somme et le produit doivent rester réels.

On est dans la liste proposée avant, si on a α , un seul β convient, le conjugué.

Ne pas conclure trop vite, on ne connait pas la base de diagonalisation...

Le fait qu'il n'y aurait 4 solutions ne saute pas encore aux yeux...

Mais par ii) quand u est diagonale, v aussi ! ! ! Codiagonalisation (même base).

Les valp de v sont les mêmes que u car le même polynôme caractéristique. Page 12 de...

Donc si $\alpha, \overline{\alpha}$ pour u, pareil pour v mais pas ds le même ordre !

Sinon, $u = v$, et alors elle aurait été symétrique depuis le début et donc DZ par spectral, non !

Bref $A = P^{-1} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \overline{\alpha} \end{pmatrix} P$ et $A^T = P^{-1} \begin{pmatrix} \overline{\alpha} & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} P$ donc $A.A^T = P^{-1} D D' P = I_n$.

Donc A est orthogonale, de déterminant 1 (voir D). A est une rotation !

4 fois l'angle vaut π... Gagné !

997. Soit U l'ensemble des polynômes unitaires à coefficients complexes et φ l'application de

U dans U définie par $\prod_{k=1}^{n} (X - \lambda_k) \mapsto \prod_{k=1}^{n} \left(X - \lambda_k^2\right)$.

a) L'application φ est-elle injective ? surjective ?

b) Déterminer une condition sur n pour que $\varphi\left(X^n - 1\right) = X^n - 1$

c) i) Calculer le polynôme caractéristique de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$.

ii) Montrer que deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.

iii) En déduire que si P est à coefficients entiers, alors $\varphi(P)$ l'est également.

Sol : a) Non pas injectif, car $(x-1)^2$ et $(x-1)(x+1)$ ont la même image.

Oui, c'est surjectif car tous les nombres complexes ont des racines.

b) Pour que ce soit réalisé, il faut que les carrés de $\mathcal{U}_n$ recouvrent le même ensemble.

Or l'application "carré" va bien de $\mathcal{U}_n$ vers $\mathcal{U}_n$. Et donc même cardinaux.

L'injectivité ferait l'affaire entièrement.

Si n est pair , ça ne marche pas car -1 et 1 ont le même carré.

Si n impair ça marche, car $(x,z) \in \mathcal{U}_n^2$ et $x^2 = z^2$ et $x \neq z$.

Entraine $2k\pi = 2s\pi + n\pi[2n]$, impossible.

Il y a plus simple, $x^2 = z^2 \Leftrightarrow x + z = 0$... or $x^n = z^n = 1 = (-x)^n = -1$...

c)i) Matrice compagnon, $X^n - \sum_{0}^{n-1} a_k X^k$.

ii) Classique : ceci découle de $A = P^{-1}BP$ entraine

$\det(XI_n - A) = \det(XI_n - P^{-1}BP) = \det(XP^{-1}I_nP - P^{-1}BP) = \det(P^{-1}(XI_n - B)P)$.

iii) A quoi servent les questions précédentes ?

Soit une matrice diagonale diag $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ ds le cas P à coeff entiers.

On écrit une matrice compagnon qui à le même poly caract

(il suffit de bien recopier les coeff sur la denière colonne).
Attention au traquenard, elle ne sont pas forcément semblables ! !

Cette matrice compagnon ,

je la $\mathbb{C}$ trigonalise, elles sont semblables avec sur la diagonale, $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$.

Je la mets au carré, elle reste triangulaire avec une diag $(\lambda_1^2, ..., \lambda_n^2)$.

Donc le poly caract est $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(X - \lambda_k^2\right)$.

La matrice compagnon qui a pour poly caract $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (X - \lambda_k)$,

est à coeff entiers, sont carré aussi, donc son poly caract aussi.

Gagné ! !

1004. Soit E un espace euclidien. On dit qu'un endomorphisme

$f \in \mathcal{L}(E)$ est une contraction lorsque : $\forall x \in E, \|f(x)\| \leqslant \|x\|$.

a) Montrer qu'un endomorphisme symétrique f est une contraction

si, et seulement si, $Sp(f) \subset [-1, 1]$.

b) Montrer que si f est un endomorphisme symétrique alors, pour tout polynôme

$P \in \mathbb{R}[X]$ et tout $x \in E$, on a $\|P(f)(x)\| \leqslant \|x\| \displaystyle\sup_{a \in \mathrm{Sp}(f)} |P(a)|$.

Sol : a) f symétrique donc diagonalisable en bon.

Si $\exists \lambda$ vp telle que $|\lambda| > 1$. $f(x) = \lambda_i x \Rightarrow \|f(x)\| = |\lambda| \|x\| > \|x\|$ aie.

Si $\forall \lambda_i, |\lambda| \leqslant 1$, $\|f(x)\|^2 = \left\|\sum x_i f(e_i)\right\|^2 = \left\|\sum x_i \lambda_i e_i\right\|^2 \underset{Bon}{=} \sum x_i^2 \lambda_i^2 \leqslant \sum x_i^2$.

b) $P = \displaystyle\sum_{0}^{m} \beta_k X^k$, $\left\|\displaystyle\sum_{0}^{m} \beta_k f^k(x)\right\| = \left\|\displaystyle\sum_{0}^{m} \beta_k \sum_{i=1}^{n} x_i \lambda_i^k e_i\right\|$. On inverse les sigmas.

$\left\|\displaystyle\sum_{1}^{n} x_i P(\lambda_i) e_i\right\| \underset{Bon}{=} \sqrt{\displaystyle\sum_{1}^{n} x_i^2 P^2(\lambda_i)} \leqslant \sup_{a \in \mathrm{Sp}(f)} |P(a)| . \sqrt{\displaystyle\sum_{1}^{n} x_i^2}$.

1005 . a) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $I_n + M$ est inversible.

Montrer qu'il existe un polynôme P tel que $(I_n + M)^{-1} = P(M)$.

b) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique. Montrer que $I_n + A$ et $I_n - A$ sont inversibles.

Sol : Soit P le polynôme caractéristique de M, $P(M) = 0$, $P(-1) \neq 0$ car -1 non vp...

Par division euclidienne, $P = (X+1)Q + c$, avec $c \neq 0$.

$(M+I)Q(M) = -cI$, l'inverse de $M+I$ est $-\dfrac{Q(M)}{c}$.

b) Que veut l'auteur ? Je propose : $A^T = -A$, $AX = \pm X (\neq \overrightarrow{0})$.

Ainsi $X^T A^T = \pm X^T$, $-X^T A = \pm X^T$, donc $-X^T AX = \pm X^T X$ alors ,

$-X^T X = \|X\|^2$, bref $X = \overrightarrow{0}$. Absurde , $-1, 1$ ne sont pas vp.

1007. Soient $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^{2019} = B^{2019}$.

a) Montrer que A et A^{2019} sont diagonalisables ; quel lien y a-t-il entre leurs valeurs propres ?

b) Montrer que $A = B$.

c) Si $A^2 = B^2$, a-t-on nécessairement $A = B$?

Sol : hyper classique...

a) Thm spectral , A diagon en bon, donc A^{2019} aussi.

Bien sûr , les vp sont les puissances 2019 de celles de A.

b) 2 plans : le mien :

$\exists (D, E) \in \mathcal{D}_n, (U, V) \in \mathcal{O}_n$ telles que $A = UDU^T$ et $B = VEV^T$.

A la puissance 2019, c'est pareil. Les termes diagonaux sont les mêmes et l'application

$x \mapsto x^{2019}$ est injective sur $\mathbb{R}$.

Les termes diagonaux de D et E sont donc les mêmes.

Quitte à réordonner les vecteurs de base , on peut imposer $D = E$.

Rq : réordonner les vecteurs c'est simplement remplacer par une autre matrice orthogonale.

En notant $W = V^T U \in \mathcal{O}_n$, il vient $WD^{2019} = D^{2019} W (*)$.

Soit $D = \text{diag}\ (\lambda_1, ..., \lambda_n)$. $W = (w_{i,j})$.

On développe (*), il vient $w_{i,j} \lambda_j^{2019} = \lambda_i^{2019} w_{i,j}$. Calcul à faire !

Si $w_{i,j} \neq 0$ ("sinon rien à faire") , on a (injectivité) $\lambda_i = \lambda_j$.

Donc $\forall(i,j), w_{i,j}\lambda_j = \lambda_i w_{i,j}$, et dès lors, $WD = DW$.

Donc $UDU^T = VDV^T$ bref $A = B$.

Mais les interrogateurs attendaient peut-être :

Les sep de A sont les mêmes que ceux de A^{2019} donc que ceux de B^{2019}

qui sont les mêmes que ceux de B, donc sep par sep les endos sont les mêmes.

Très court, mais il faut maitriser ce que l'on utilise...

c) Non bien sûr, Id et une symétrie.

Analyse

1008. Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie.

a) Montrer que les boules de E sont convexes.

b) Soit C une partie convexe de E. On suppose que C est dense dans E. Montrer que $C = E$.

i) dans le cas où $E = \mathbb{R}$.

ii) dans le cas général.

Relire .

Sol a) Du cours.

b) a) C'est une conséquence immédiate de l'inégalité triangulaire.

b) i) Les convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles et le seul intervalle dense dans $\mathbb{R}$ est $\mathbb{R}$ lui-même.

ii) Quitte à faire une translation, il suffit de montrer que $0 \in C$.

Soit F le sous-espace vectoriel de E engendré par C.

II est fermé (car E est de dimension finie).

Alors $E = \bar{C} \subset \bar{F} = F$, donc $F = E$.

Par conséquent C engendre E, donc il contient une base $B = (e_1, \ldots, e_n)$ de E.

Le convexe C contient l'ensemble

$$\Delta = \{t_1e_1 + \ldots + t_ne_n \mid t_1, \ldots, t_n \geqslant 0, t_1 + \ldots + t_n = 1\}$$

On va montrer que C contient un point x à coordonnées strictement négatives dans la base B, et on écrira 0 comme barycentre de x et d'un point de Δ (faire un dessin en dimension 2 : la droite passant par x et 0 coupe Δ du côté opposé à x). L'ensemble $U=\{t_1e_1+\ldots+t_ne_n \mid t_1,\ldots,t_n<0\}$ est un ouvert non vide de E. II rencontre donc C : il existe $x=-(x_1e_1+\cdots+\ x_ne_n)\in C\cap U$ (avec $x_1,\ldots,x_n>0$). Posons $s=x_1+\ldots+x_n$. Le point $y=(x_1e_1+\ldots+x_ne_n)/s$ appartient à Δ donc à C Sachant que $-1<0<1/s$, on en déduit que le vecteur nul de E est situé sur le segment $[x,y]\subset C$.

1009. PYTHON. On pose, pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2, N(x,y)=\displaystyle\int_0^1|x-ty|\,\mathrm{dt}$.

a) Vérifier que N est bien une norme sur $\mathbb{R}^2$.

b) Tracer la courbe de la fonction $x\mapsto N(x,1)$ pour $x\in[-1/2,3/2]$ avec Python.

c) Calculer $N(x,1)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

d) En déduire la valeur de $N(x,y)$ pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

e) Soit C le cercle unité d'équation $x^2+y^2=1$. Tracer la courbe de $x\mapsto N\left(x,\sqrt{1-x^2}\right)$ pour $x\in[-1,1]$ avec Python. Estimer les valeurs de sup $N(C)$ et inf $N(C)$ a l'aide du tracé.

f) Déterminer la valeur exacte de sup $N(C)$.

Sol :

```
from math import *
from scipy import *
import scipy.integrate as integr
from matplotlib.pyplot import *
import matplotlib.pyplot as plt
from numpy import *

T = np.linspace(-0.5, 1.5, 300)
TT= np.linspace(-1.0, 1.0, 1300)

def N(x,y):
    def f(t):
        return abs(x-y*t)
    return integr.quad(f,0,1)[0]
#G= [N(x,1) for x in T]
#plt.plot(T,G)
#plt.show()
GG= [N(x,sqrt(1-x*x)) for x in TT]
plt.plot(TT,GG)
plt.show()
```

Les maths :

a) La preuve de la norme est clasique, on fait attention à ne rien oublier.

Pour l'inégalité triangulaire : $\int_0^1 |(x+x')-t(y+y')|dt = \int_0^1 |(x-ty)+(x'-ty')|dt \leqslant$.

$N(x,y)+N(x',y')$.

Pour c) $\int_0^1 |x-y|dt$, il faut séparer les cas en x pour virer la valeur absolue.

De plus si $x \in [0,1]$, il faut séparer le segment d'intégration en 2...

Résultats après calculs faciles mais pas drôles :

- $x \geqslant 1$, $0.5*(2x-1)$.
- $x \leqslant 0$, $0.5*(1-2x)$.
- $x \in [0,1]$, $x^2-x+0.5$.

Rq : parfaitement cohérent avec le graphe Python.

d) Si $y=0$, on a $|x|$.

Sinon, $|y|.N\left(\frac{x}{y},1\right)$, et on applique les différents cas précédents...

e) Voir graphe Python, il semblerait que le sup vaille 1.115 et l'inf 0.222.

f) D'abord on peut se restreindre au cas $y \geqslant 0$, car $N(x,y)=N(-x,-y)$, pb symétrique...

On pourrait tout calculer au d) voir que la fonction est $\mathcal{C}^1$ etc...

Calculs lourds , fastidieux , points crtiques etc...

Soyons malins , il est clair que le max est atteint avec x entre -1 et -0.8.

Je ne calcule le d) que dans ce cas, $y>0$, $x<0$...le deuxième du c...

Il vient : le max de $\dfrac{-2x+\sqrt{1-x^2}}{2}$.

On dérive, tableau de variations, on otpimise en $x=-\sqrt{\dfrac{4}{5}}$, cohérent !

Le max, on remplace, et c'est cohérent...

1010. Pour tous entiers naturels non nuls n et p, on pose $L_p(n)=\displaystyle\sum_{h=p+1}^{np}\frac{1}{k}$.

a) Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, la suite $\left(L_p(n)\right)_p$ converge vers limite notée $L(n)$.

b) Montrer que, pour tous $m,n \geqslant 1, L(mn)=L(m)+L(n)$.

c) Montrer que la suite $(L(n))_n$ est strictement croissante.

d) Montrer que, pour tout $n \geqslant 1, L(n)=\ln(n)$.

Sol : Comment se prendre la tête pour rien...

a) A n fixé, $L_p(n) \leqslant n$, majoration brutale par le nombre de termes

multiplié par le plus grand. De plus c'est monotone croissant en p,

pour le prouver on fait la différence entre le rang $p+1$ et le rang p,
gros téléscopage additif, il reste $-\dfrac{1}{1+p}+\dfrac{1}{np+1}+...+\dfrac{1}{np+n}$.

La partie positive (n termes) peut être minorée brutalement par $\frac{1}{p}$.

On applique le thm de limite monotone.

b) On fixe m, n, $L_p(mn) = \sum_{p+1}^{mnp} = \sum_{p+1}^{np} + \sum_{np+1}^{mnp}$.

Le premier morceau tend vers $L(n)$, le deuxième est $L_{np}(m)$,

qui est extraite de l'autre et donc cv vers $L(m)$.

On finit par unicité de la limite.

c) Tout simplement $m > n$, on regarde $L_p(m) - L_p(n)$ somme positive par téléscopage

et différence d'objets convergent.

Mais le problème est le strictement, on minore brutalement la différence précédente

par $\dfrac{m-n}{n} > 0$ et fixée ! !

d) Enfin ! Je propose d'appliquer le cours (que voulait l'auteur ?) .

Comparaison série-intégrale, $\ln\left(\dfrac{np+1}{p+1}\right) \leqslant L_p(n) \leqslant \ln(n)$.

Thm des gendarmes, les extrémités tendent vers $\ln(n)$.

1013. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = \displaystyle\int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \sin\left(x^2\right) \mathrm{d}x$.

Donner le signe de u_n en fonction de n.

Montrer que la série $\sum u_n$ converge mais n'est pas absolument convergente.

Sol : Classique :

a) Le signe de la fonction intégrée est constant sur l'intervalle,

positif ds le cas n pair et l'inverse sinon.

b) En valeur absolue, on minore par $\displaystyle\int_{\sqrt{\pi(n+\frac{1}{4})}}^{\sqrt{\pi(n+\frac{3}{4})}} |\sin(x^2)|dx \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{\pi(n+\frac{3}{4})} - \sqrt{\pi(n+\frac{1}{4})}\right)$.

Ce dernier terme est équivalent à $\dfrac{K}{\sqrt{n}}$ de série divergente.

Pour la convergence, somme partielle $S_N = \displaystyle\int_0^{\sqrt{(N+1)\pi}} \sin(x^2)dx$.

Cette suite est de même nature que l'intégrale généralisée : $\displaystyle\int \sin(x^2)dx$ sur $\mathbb{R}^+$.

Car l'écart entre les 2 est $o(1)$. Ceci découle du fait que, $|u_n|$ tend vers 0.

Le sinus est contrôlable par 1 et la différence des bornes tend vers 0.

Pour la convergence de ladite intégrale, on pose $v = x^2$.

On a $\displaystyle\int_1^{u^2} \frac{\sin(v)}{2\sqrt{v}} dv$.

Et on finit à la "Dirichlet" par IPP , $g = -\cos$, $f = \frac{1}{\sqrt{v}}$.

Crochet convergent et l'intégrale de droite est absolument convergente donc convergente.

1018. a) Montrer la divergence de la série harmonique et donner un équivalent

de la n -ieme somme partielle.

b) Soit $(u_n)_n$ une suite à valeurs strictement positives et α un réel > 0.

On pose, pour tout n, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$. On suppose que $(S_n)_n$ diverge.

Montrer que la série de terme général $\dfrac{u_n}{S_n^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

c) On suppose maintenant que S_n converge vers S et on note $R_n = S - S_n$.

Montrer que la série de terme général $\dfrac{u_n}{R_{n-1}^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha < 1$.

Sol : J'adore l'exo ! !

a) $\displaystyle\sum_1^N \frac{1}{k} \sim \ln(N)$ par comparaison série intégrale. Cours...

b) On trace la fonction $\dfrac{1}{t^\alpha}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Et là, en abscisse on subdivise par les S_k qui se déplacent vers la droite en tendant vers $+\infty$.

Les aires des rectangles, sont $\dfrac{u_n}{S_n^\alpha}$ car l'écart en abcisse est u_n et la hauteur $\dfrac{1}{S_n^\alpha}$.

Donc **SI** $\alpha > 1$, l'intégrale génralisée converge, et la somme des aires des rectangles est donc

majorée par une constante, donc notre série converge car croissante majorée.

Pour le cas $\alpha \leqslant 1$, il **suffit** de prouver la divergence dans le cas $\alpha = 1$,

Car si on diminue α tous nos objets augmentent, bref on sera minoré par du divergent positif.

On fixe $\alpha = 1$, par l'absurde si la série des $\dfrac{u_n}{S_n}$ converge, alors $\dfrac{u_n}{S_n}$ tend vers 0.

$\dfrac{u_n}{S_n} \underset{\infty}{\sim} -\ln\left(1 - \dfrac{u_n}{S_n}\right) = \ln \dfrac{S_n}{S_{n-1}}$. Mais la série $\sum \ln \dfrac{S_n}{S_{n-1}}$, diverge car télésc et $S_n \to \infty$.

c) On "recommence", on subdivise par les R_k qui tendent vers 0 en décroissant.

$R_k - R_{k+1} = u_{k+1}$. Cette fois nos rectangles sont contrôlés par $\displaystyle\int_{R_{k+1}}^{R_k} \frac{dt}{t^\alpha}$.

De nouveau si $\alpha < 1$, l'intégrale généralisée converge et notre série aussi.

Puis pour $\alpha \geqslant 1$, on regarde $\alpha = 1$, car si on augmente α...

Bref, on répète ce qui précède.

1019. a) On considère une suite (u_n) de limite nulle et p un entier naturel non nul.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} u_{np+k}$.

Montrer que les séries de termes généraux u_n et v_n sont de même nature et,

que si elles convergent, elles ont la même somme.

b) Montrer que la série de terme général $(-1)^n/(n+1)$ converge.

c) Montrer que la série de terme général $j^n/(n+1)$ converge et calculer sa somme.

Sol : Idée : regrouper par paquets.

$v_n = \displaystyle\sum_{np}^{(n+1)p-1} u_s$.

$\displaystyle\sum_0^N v_k = \sum_{s=0}^{Np-1} u_s$, donc si la série des u_s converge,

la série des v_k aussi comme suite extraite de la précédente (même limite).

La réciproque est vraie, car l'écart éventuel revient à un nombre fini de

termes qui convergent vers 0 bref du $o(1)$.

b) Bien sûr on reconnait l'harmonique alternée , mais ici on prend autrement.

Ici on prend $p = 2$, les hypothèses (limite nulle) sont là.

Il vient $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}\right)$, téléscopages ,réindexation.

c) Si les hyp sont là (oui) et que le regroupement cv , ça marche.

Ici $p=3$ la longueur du cycle...

Partie réelle : $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3k+1}-\frac{1}{2}.\frac{1}{3k+2}-\frac{1}{2}.\frac{1}{3k+3}\right)$.

On revient en somme partielle, très beau téléscopage de type première année.

Partie imaginaire : $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{0}{3k+1}+\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{3k+2}-\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{3k+3}\right)$.

A finir...

1025. Soient $a,b\in\mathbb{R}_+^*$ et $(u_n)_n$ la suite définie par $u_0=1$ et,

pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n+a}{n+b}$.

a) Montrer que, pour tout $n, u_n>0$.

b) On pose, pour tout $n\in\mathbb{N}, v_n=\ln\left(n^{b-a}u_n\right)$.

i) Étudier la convergence de la série de terme général $v_{n+1}-v_{\mathrm{n}}$.

ii) En déduire une CNS pour que la série de terme général u_n converge.

On supposera dans la suite de l'exercice que cette condition satisfaite.

c) Déterminer le rayon de convergence de la série entière de coefficients u_n.

d) On note f la somme de la série entière précédente. Calculer $f(1)$.

Sol : a) Rec immédiate.

b)i) $v_{n+1}-v_n=\ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{b-a}\frac{n+a}{n+b}\right)=\ln\left(\left(1+\frac{b-a}{n}+\mathcal{O}(\frac{1}{n^2})\right).\frac{1+\frac{a}{n}}{1+\frac{b}{n}}\right)$.

Qui donne : $\ln\left(\left(1+\frac{b-a}{n}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right).\left(\left(1+\frac{a}{n}\right)\left(1-\frac{b}{n}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right)\right)$.

Soit : En calculant doucement $\left(\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$. La série des $v_{n+1}-v_n$ converge absolument.

Donc lien suite série, ou en sommant, téléscopant, v_n converge vers L.

On compose par exponetielle qui est continue, $u_n n^{b-a}$ tend vers $e^L \neq 0$.

Donc $u_n \underset{\infty}{\sim} \dfrac{e^L}{n^{b-a}}$. La CNS est donc $b > 1 + a$.

c) On applique la règle de d'Alembert (avec la variable). $\left|\dfrac{u_{n+1}.x^{n+1}}{u_n.x^n}\right| \to |x|$.

Le rayon est 1.

La convergence en 1 a été établie plus haut. Notons $f(1) = S$.

On a $(*)(n+b)u_{n+1} = (n+a)u_n$, grâce à la CNS, nous savons que nu_n tend vers 0.

Je somme la relation (*), il vient $\displaystyle\sum_0^{N+1} ku_k + (b-1)\sum_1^{N+1} u_k = \sum_0^N ku_k + a\sum_0^N u_k$.

Je range un peu, je fais tendre n vers l'infini, $S = \dfrac{b-1}{b-a-1}$.

1028. On considère la suite $(I_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n}$.

a) On définit les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_n \geqslant 1$

par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n), v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1)$.

Montrer qu'elles convergent vers la même limite.

b) Montrer que pour tout $n \geqslant 1, I_{n+1} = \left(1 - \dfrac{1}{3n}\right) I_n$.

c) Montrer qu'il existe des réels α et β tels que $\ln(I_n) = \alpha\ln(n) + \beta + o(1)$.

d) Montrer que la série de terme général I_n converge.

Sol : a) Exo de première année : elles sont tout simplement adjacentes,

on note la limite commune γ cste d'Euler.

b) Intégration par partie, $u' = 1$, $v = ...$

Puis on fait le classique $+1 - 1$.

c) Rq : $I_n > 0$, $\ln\dfrac{I_{n+1}}{I_n} = \ln\left(1 - \dfrac{1}{3n}\right) = -\dfrac{1}{3n} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

On fait une somme partielle : on utilise a) on arive à $\ln I_n = -\dfrac{1}{3}\ln(n) + K + o(1)$.

d) Enoncé étourdi, $I_n \underset{\infty}{\sim} \dfrac{K'}{n^{\frac{1}{3}}}$. La série diverge.

1029. On donne $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$. Soit $a > 0$ et $\xi \in \mathbb{R}$.

Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} e^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$, Ind. On pourra dériver par rapport à ξ.

Sol : on a fait en cours, on dérive par rapport à ξ, les deux dérivées sont les mêmes,

application de la dérivation sous le signe somme , caractère local de la dérivation.

On montre qu'elles ont la même valeur en 0.

1034. On considère l'équation différenticlle $(E) : \left(1 + x^2\right) y'' + xy' - y = 0$.

a) Justifier qu'il existe une unique solution de (E) sur R vérifiant $y(0) = \sqrt{2}$ et $y'(0) = 0$.

b) Déterminer les solutions de (E) développables en séries entières.

c) En posant $x = \mathrm{sh}(t)$, résoudre (E).

Sol : a) Thm de C-L, attention à citer les bonnes hypothèses.

b) Méthode hyper classique, il en sort $a_{n+2} = -\dfrac{n-1}{n+2} a_n$ pour $n \geqslant 0$.

Il arrive a_1 qcq, puis les a impairs nuls . Et une rec peu rigolote pour les pairs.

c) On pose $g(t) = f(sh(t))$. Attention, c'est de la composition de fonctions.

En remplaçant, il vient $g"(t) - g(t) = 0$.

Bref $f(t) = at + b\,\mathrm{ch}(Argsh(t))$, ça sautait aux yeux.

Probabilités

Voir Mines.