Comparer avec rms pdf...

1125. ENSEA. Trouver toutes les matrices $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Sol : Soit B cette matrice , on va réviser le cours.

$AB = A^3 = BA$, donc chacun stabilise les sep de l'autre, noyau y compris,

donc $A = \begin{pmatrix} .. & .. & .. \\ .. & .. & .. \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$.

Mais en calculant le polynôme caractéristique par blocs, z est valeur propre donc $z = 0$.

Car $A^4 = B^2 = 0_3$, et les valeurs propres sont à prendre parmi les racines des

polynômes annulateurs.

Puis $AB(\overrightarrow{c}) = A(\overrightarrow{a}) = BA(\overrightarrow{c})$, or $A(\overrightarrow{c}) \in \ker B$, car $z = 0$. $A(\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{0}$.

Bilan provisoire $A = \begin{pmatrix} 0 & .. & .. \\ 0 & zz & .. \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Mais zz est valeur propre et donc nul.

On peut alors faire la réciproque en partant de $A = \begin{pmatrix} 0 & .. & .. \\ 0 & 0 & .. \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On arrive à $A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \frac{1}{\alpha} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1126. CCINP. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 4 .

a) Soit u un endomorphisme de E tel que $\mathrm{rg}(u) = 2$ et $u^2 = 0$.

i) Montrer que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Im}(u)$.

ii) Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle u est représenté par $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Soit u un endomorphisme de E tel que $\mathrm{rg}(u) = 3$ et $u^4 = 0$.

i) Montrer que $\mathrm{Ker}\,(u^2) = \mathrm{Im}\,(u^2)$.

ii) Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle u est représenté par $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Sol : a)i) $u^2 = 0$ donc $Im(u) \subset \ker(u)$.

Donc égalité par thm du rang et ainsi égalité des dimensions.

ii) Soit (a, b) base de $Im(u) = \ker(u)$.

Soit (c, d) des antécédents de a et b.

La famille (dans cet ordre) a, b, c, d est une base qui nous convient.

Pour la liberté il suffit d'écrire une combinaison linéaire nulle et d'appliquer u.

b)i)$u^4 = \omega$ entraine $(**)Im(u^2) \subset \ker(u^2)$. Montrons l'égalité des dimensiions.

Si $rg(u^2) = 3$ alors $\dim \ker(u^2) = 1$ incohérent avec $(**)$.

Si $(*)rg(u^2) = 1$ alors la matrice (base adaptée à $Im(u) \oplus < \overrightarrow{d} >$) de u

serait $\begin{pmatrix} A & C \\ 0_{1,3} & 0 \end{pmatrix}$.

Car l'image de u est stable par u, les vecteurs colonnes de A génèrent $Im(u^2)$.

Donc $rg(A) = 1$ par $(*)$, le rang de la matrice globale ne pourrait excéder 2. Absurde.

$rg(A) = 0$, absurde pour les mêmes raisons.

Donc $rg(A) = 2$, donc $(**)$ devient une égalité.

ii) Utilisation du a) ? ?

Mon plan est le suivant $u^3 \neq \omega$ car sinon $Im(u^2) \subset \ker(u)$ incohérent par les dimensions.

(Par hypothèse $dim(\ker(u)) = 1$).

Soit un vecteur x_0 tel que $u^3(x_0) \neq \overrightarrow{0}$.

La famille $(x_0, u(x_0), u^2(x_0), u^3(x_0))$ est une base classique qui convient presque

à notre objectif...Il suffit de changer l'ordre des vecteurs.

1127. CCINP. Soient f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $f + f^3 = 0$

et A sa matrice dans la base canonique.

a) Montrer que A n'est pas inversible.

b) Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Ker}\,(f^2 + I_3)$.

c) Montrer que Ker f n'est pas réduit au vecteur nul.

d) Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Sol : fait en classe.

1128. CCINP, a) Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^{2n}$ tel que $u^2 = 0$ et $\mathrm{rg}\, u = n$.

i) Montrer que $\mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Im}\, u$.

ii) En déduire qu'il existe une base de $\mathbb{R}^{2n}$ dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^{3n}$ tel que $u^3 = 0$ et rg $u = 2n$.

i) Montrer que Ker $u = \mathrm{Im}\, u^2$.

ii) En déduire qu'il existe une base de $\mathbb{R}^{3n}$ dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} 0 & I_n & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Sol : Centrale ... Voir exercices relevés.

1129. ENSEA. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) La matrice A est-elle diagonalisable ?

b) Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) En déduire l'expression de A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

d) Retrouver cette expression en observant que $A = I_3 + N$, où N est nilpotente.

Sol : a) Non par polynôme caractéristique $(X-1)^3$,

la seule vp est 1 et ce n'est pas l'identité.

b) Dois-je rédiger ? ?

Rq 2 méthodes : $(1,0,0),(0,1,1),(0,0,-1)$.

Si oui, ne pas hésiter à me demander...

1130. IMT. Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ a & 0 & c \\ a & b & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calculer le déterminant de A.

b) À quelle condition A est-elle diagonalisable ?

1131. IMT. Soient E un espace vectoriel de dimension trois, (e_1, e_2, e_3) une base de E.

Pour $a \in \mathbb{C}$, soit $f_a \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f_a(e_1) = f_a(e_3) = ae_1 + e_2 - ae_3$ et $f_a(e_2) = 0$.

a) Donner une base de l'image et du noyau de f_a.

b) Donner la matrice de f_a dans la base (e_1, e_2, e_3).

c) Calculer A^2. Qu'en déduire ?

d) Quelles sont les valeurs propres de f_a ?

Cet endomorphisme est-il inversible ? diagonalisable ?

1132. ENSEA. Soit ψ l'application qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe $P + P'$.

a) Montrer que ψ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Soit M_ψ la matrice représentant ψ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Cette matrice est-elle inversible ?

c) Pour $n = 2$, cette matrice est-elle diagonalisable ?

1133. IMT. Soient $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ vérifiant $A_{1,1} + A_{2,1} = A_{1,2} + A_{2,2} = 1$,

et f l'endomorphisme canoniquement associé.

a) Montrer que si $A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ alors $y_1 + y_2 = x_1 + x_2$.

b) Montrer que $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de f et préciser la valeur propre associée.

c) Montrer que, si V est un vecteur propre non colinéaire à $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$,

alors V est un vecteur propre associé à la valeur propre 1.

1134. CCINP. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

a) La matrice A est-elle diagonalisable ? Déterminer ses éléments propres.

b) Trouver une matrice $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$.

c) Les matrices $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $B^2 = A$ sont-elles diagonalisables ?

1135. Navale. a) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que, si A est inversible,

alors $\chi_{AB} = \chi_{BA}$; montrer que ce résultat reste valable pour A quelconque.

Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie n.

On note E_λ et F_λ les sous-espaces propres de $f \circ g$ et $g \circ f$ associés à λ.

b) Soit λ une valeur propre non nulle de $f \circ g$.

Montrer que λ est une valeur propre de $g \circ f$ puis que $g\,(E_\lambda) \subset F_\lambda$ et $f\,(F_\lambda) \subset E_\lambda$.

En déduire que E_λ et F_λ sont de même dimension.

1136. CCINP. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & j^2 & j \\ j^2 & j & 1 \\ j & 1 & j^2 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer les valeurs propres de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?

b) Soit $\Phi : M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}) \mapsto AMA \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

Déterminer l'image de Φ ainsi que ses valeurs propres.

1137. CCINP. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonalisable et de rang 1.

On pose $B = \begin{pmatrix} \alpha A & \beta A \\ \gamma A & 0 \end{pmatrix}$ avec $\alpha + \beta = \gamma, \beta + \gamma \neq 0$ et $\beta\gamma \neq 0$.

a) Exprimer le polynôme caractéristique de B à l'aide de celui de A.

Que peut-on en déduire concernant les valeurs propres de B ?

b) Montrer que, si X est dans le noyau de A, $\begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix}$ est dans le noyau de B.

c) Montrer que $\dim(\operatorname{Ker} B) \geqslant 2 \dim(\operatorname{Ker} A)$.

c) Montrer que B est diagonalisable.

1138. CCINP. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ mais pas diagonalisable.

b) Donner les droites stables par A.

c) Donner les plans stables par A.

1139. CCINP. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

a) Donner le rang de A ; en déduire la dimension du noyau.

b) La matrice A est-elle diagonalisable ?

c) Que dire de la multiplicité de la valeur propre 0 ?

d) Montrez que A admet trois valeurs propres $0, \lambda, 1-\lambda$.

e) Donnez un polynôme annulateur de A de degré 3 .

1140. CCINP. Dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, soit une matrice M vérifiant les hypothèses suivantes :

$M^4 = 4M^2$, et -2 et 2 sont des valeurs propres de M.

a) Montrer que $\mathrm{Sp}(M) \subset \{-2, 0, 2\}$.

b) La matrice M est-elle diagonalisable ?

1141. CCINP. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $M^2 + M^T = I_n$.

a) Montrer que, si P est un polynôme annulateur de M,

toute valeur propre de M est racine de P.

b) On suppose dans cette question seulement que M est symétrique.

Montrer que M est diagonalisable puis que $\mathrm{tr}(M)\det(M) \neq 0$.

c) Montrer que M est diagonalisable.

d) Montrer que M est inversible si et seulement si 1 n'est pas valeur propre de M.

Sol : Fait dans une autre liste cette année.

1142. CCINP. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

a) Calculer le rang de B en fonction du rang de A.

b) Exprimer χ_B en fonction de χ_A.

c) On suppose que A est inversible et possède n valeurs propres distinctes.

Montrer qu'elle est diagonalisable.

d) Le résultat demeure-t-il vrai pour une matrice A diagonalisable non inversible ?

Sol : voir ccp 2019 corr 1214 ou feuille 4 exo 85.

1143. CCINP. a) Énoncer le théorème de Cayley - Hamilton.

b) Soient A, B, C, dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que $AC = CB$ et que $C \neq 0$.

Montrer que pour tout $P \in \mathbb{C}[X], P(A)C = CP(B)$.

c) Montrer qu'un produit de matrices est inversible ssi tous ses facteurs 1 le sont.

En déduire que A et B ont au moins une valeur propre commune.

d) Réciproquement, si A et B ont une valeur propre commune,

montrer qu'il existe une matrice C non nulle telle que $AC = CB$.

Sol :Voir feuille 4, 2.19

Mais aussi 67 de ddl

En clair : a) Cours.

b) On démontre par rec que $A^k C = CB^k$. Puis on ajoute les comb lin.

c) Le déterminant est multiplicatif, donc le produit des det est non nul ssi tous non nuls.

On applique b) avec le poly caract de B.

$\chi(A)C = 0$, on applique sur e_i td $C(e_i) = e_i' \neq 0$.

On en tire $e_i' \in \ker \chi_B(A)$ qui est donc de det nul.

Or $\chi_B(X) = \beta \prod (X - \lambda_j)$.

Donc il existe un λ_j (vp de B) ts $A - \lambda_j I$ de det nul , λ_j vp commune.

d) Soit $X, Y \neq 0$ tq $AX = \lambda X$ et $B^T Y = \lambda Y$, $C = XY^T$ est valable.

Car les vp de B sont aussi celles de B^T. Le λ est le même.

Rq . $AC = CB = \lambda C$ histoire de matrice de rang 1.

1144. CCINP. Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) = \emptyset$.

a) Montrer que, si P est un polynôme annulateur de A,

alors les valeurs propres de A sont racines de P.

b) Montrer que la matrice $\chi_A(B)$ est inversible.

c) Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Prouver : $AX = XB \Leftrightarrow X = 0$.

d) Montrer que, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

il existe une unique matrice $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $AX - XB = M$.

Sol :

(Oral Mines-Ponts 2018) ... Tjs les mêmes habitudes.

a) Cours.

Soit A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, à spectres disjoints.

1. On a $\chi_A(X) = \prod_{k=1}^{n} (X - a_i)$, donc $\chi_A(B) = \prod_{k=1}^{n} (B - a_i I_n)$.

Or les spectres de A et B sont disjoints.

Ainsi les $B - a_i I_n$ sont inversibles, donc $\chi_A(B)$ aussi par produit.

2. L'application $\varphi : M \mapsto AM - MB$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Montrons que c'est un isomorphisme.

Soit $M \in \operatorname{Ker} \varphi$, donc tel que $AM = MB$.

Par récurrence immédiate, il vient : $\forall k \in \mathbb{N}, A^k M = MB^k$.

Par linéarité, $P(A)M = MP(B)$, pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$.

En particulier $\chi_A(A)M = M\chi_A(B)$.

Mais $\chi_A(A) = 0$ (Cayley-Hamilton), et $\chi_A(B)$ est inversible.

Ainsi $M = 0$, donc φ est un isomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

En particulier :

$$\begin{gathered} \forall Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \exists! X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ AX - XB = Y \end{gathered}$$

1145. CCINP. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = BA$ et $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

a) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Exprimer $P(M)$ en fonction de $P(A), P'(A)$ et B.

b) Montrer que M est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable et $B = 0$.

1146. CCINP. Soit $\mathcal{D}_n$ l'ensemble des matrices A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\chi_A(T) = \prod_{k=1}^{n} (T - a_{k,k})$.

a) Montrer que toute matrice triangulaire est dans $\mathcal{D}_n$.

b). La matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1 est-elle dans $\mathcal{D}_n$?

c) L'ensemble $\mathcal{D}_n$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

d) Montrer que, si M appartient à $\mathcal{D}_n$, alors $M + aI_n$ appartient à $\mathcal{D}_n$ pour tout réel a.

e) Montrer que toute matrice de $\mathcal{D}_2$ est triangulaire.

f) Exhiber un ensemble infini de matrices de $\mathcal{D}_3$ nilpotentes non triangulaires.

1147. CCINP. Soient E un espace euclidien de dimension $n, (e_1, \ldots, e_n)$

une bon de E et $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille de vecteurs de E telle que $\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2 < 1$.

a) Montrer que, pour tous $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, $\left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \right\|^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2 \right)$.

b) En déduire que la famille $(e_1 + x_1, \ldots, e_n + x_n)$ est une base de E.

Sol : très scolaire, a) bien sûr C-S , mais attention on a des vecteurs.

$\left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \right\| \leqslant \left\| \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| \|x_k\| \right\| \leqslant C - S$, puis on met au carré.

b) La liberté suffirait, $\sum_{1}^{n} \lambda_k (e_k + x_k) = \overrightarrow{0} \Rightarrow \sum_{1}^{n} \lambda_k (e_k) = -\sum_{1}^{n} \lambda_k (x_k)$,

On regarde les normes au carré, celle de gauche $\sum_{1}^{n} \lambda_k^2$, car Bon.

Puis par l'absurde si un λ_k non nul, on utilise a) à droite, fini.

1148. *CCINP*. Pour P et Q dans $\mathbb{R}_n[X]$ on pose $\psi(P, Q) = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(1) Q^{(k)}(1)$.

a) Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Soit $E = \{P \in \mathbb{R}_n[X]; P(1) = 0\}$.

Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ et préciser sa dimension.

c) Déterminer la distance à E du polynôme constant égal à 1.

Sol : fait en cours .

1149. CCINP. a) Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $I_n = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2} \, \mathrm{d}t$.

On distinguera les cas n pair et n impair. Ind. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \, \mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$.

b) Pour P et Q dans $\mathbb{R}[X]$ on pose $\varphi(P, Q) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t) Q(t) e^{-t^2} \, \mathrm{d}t$.

i) Montrer que φ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

ii) Déterminer $d\left(X^3, \mathbb{R}_2[X]\right)$.

1150. IMT. Soient $p \geqslant 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^T A = A A^T$ et $A^p = 0$.

En considérant la matrice $B = A^T A$, montrer que $A = 0$.

Sol : Classique, $B^p = 0$ en remplaçant et en rangeant.

Mais B symétrique réelle donc Dz, bref $B = 0$.

Donc $tr(B) = 0$, et donc la norme de Schur de A est nulle. $A = 0$.

1151. CCINP. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telles que $M = \frac{1}{3}(A+2B) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

a) Calculer $AB^T + BA^T$. Ind. Calculer MM^T.

b) Montrer que $A = B$.

Sol : Rq , ça marche avec des réels positifs de somme 1 qcq.

a) On développe MM^T, il vient (par les diff orthogonalités) $AB^T + BA^T = 2I_n(*)$.

b) Donc $\forall X$, $\|(AB^T + BA^T)X\| = 2\|X\| \leqslant \|AB^T X\| + \|BA^T X\| = 2\|X\|$.

C'est donc un cas d'égalité de l'inégalité triangulaire.

Les vecteurs sont donc positivement liés.

Mais les matrices orthogonales conservent les normes.

Le coeff positif est donc 1.

Il vient $AB^T X = BA^T X$, ainsi $AB^T = BA^T = I_n(*) = AA^T$,

les matrices sont inversibles , $A = B$.

1152. CCINP. Soient $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $M = \begin{pmatrix} 1 & -C^T \\ C & I_n \end{pmatrix}$.

a) Calculer $M^T M$. En déduire que M est inversible.

b) Montrer que $M^{-1}M^T$ est une matrice orthogonale.

1153. CCINP. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M \neq I_n, M^3 = I_n$ et $M^T M = MM^T$.

a) Montrer que $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

b) Déterminer les matrices vérifiant ces hypothèses dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Sol : a) $(M.M^T)^3 = I_n$, en développant , puis rangement.

Or MM^T est symétrique réelle donc dz, $D^3 = I_n$, $D = I_n$.

b) Par déterminant égal à 1, c'est une rotation.

Les angles recevables sont $\pm\dfrac{2\pi}{3}$.

Analyse

1154. CCINP. Soient $a \in \mathbb{R}$ et, pour $P \in \mathbb{R}[X], N_a(P) = |P(a)| + \displaystyle\int_0^1 |P'(t)|\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que N_a est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.

b) Montrer que, si E est un espace vectoriel réel muni d'une norme N,

si $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ converge vers $x \in E$, alors $N(x_n) \to N(x)$.

c) Pour quelles valeurs de a la suite des $P_n = \left(\frac{X}{2}\right)^n$ est-elle convergente pour N_a ?

Sol : a) Dois-je rédiger ?

Inégalités triangulaires, nullité de l'intégrale d'une fonction positive, cie...

b) Le nerf de l'histoire, la notion de norme est $1 - Lip$, donc cie.

Rq : par inégalité triangulaire normale puis inversée :

$|\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x - y\|$.

c) Par b) il **faut** la cv de $N_a(P_n)$.

$N_a(P_n) = \dfrac{1}{2^n}[1 + |a|^n]$, $|a| \leqslant 2$ est CN.

Alors par b) si $|a| < 2$, la limite de $N_a(P_n)$ étant 0,

la seule limite éventuellement recevable serait le poly nul.

La réciproque est claire.

Mais $a=2$, $N_a(L)=1$ est CN,

on remplace pour la réciproque, il vient $L(2)=1$ et ...$L'=0$.

On teste $L=1$, attention L est un polynôme.

Ca marche facilement.

Pour $a=-2$, c'est pas la même tambouille...

Il nous faudrait $L(-2)=(-1)^n$, ben non, pas de cv.

Plus en classe si besoin.

1155. CCINP. On note $E=\{f\in\mathcal{C}^1([0,1]), f(0)=0\}$.

On pose, pour toute fonction $f\in E$:

$N(f)=\|f\|_\infty+\|f'\|_\infty$ et $N'(f)=\|f+f'\|_\infty$.

a) Montrer que N et N' sont des normes sur E.

b) Établir, pour tout $x\in[0,1]$: $e^x f(x)=\displaystyle\int_0^x e^t\left(f(t)+f'(t)\right)\mathrm{d}t$.

c) Montrer qu'il existe deux réels α et β tels que : $\forall f\in E, \alpha N'(f)\leqslant N(f)\leqslant\beta N'(f)$.

1156. IMT. a) Montrer que, pour $n\in\mathbb{N}^*, l'$ équation

$x-\ln x=n$ admet une unique solution $x_n\in]\,0,1]$.

b) Montrer que $x_n\to 0$ puis que $x_n\sim e^{-n}$.

c) Obtenir un développement asymptotique de x_n.

1157. IMT. a) Montrer que, pour $n\in\mathbb{N}^*$, l'équation $\displaystyle\sum_{k=1}^n x^k=1$

admet une unique solution dans $[0,1]$. On la note a_n.

b) Montrer que la suite (a_n) est décroissante et minorée par $1/2$.

c) Montrer que la suite (a_n) converge et déterminer sa limite.

Sol : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose sur $\mathbb{R}^+$, $f_n(x) = x^n + x^{n-1} + ... + x^2 + x - 1$.

La fonction f_n est **strictement croissante** et **continue** sur l'**intervalle** $\mathbb{R}^+$,

elle induit donc une bijection de $\mathbb{R}^+$ vers $\left[f_n(0), \lim_{+\infty} f_n \right[= [-1, +\infty[$.

Donc il existe un unique u_n positif tel que $f_n(u_n) = 0$.

On remarque que $\forall x \in \mathbb{R}^+_*$, $f_{n+1}(x) > f_n(x)$, ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$

$f_{n+1}(u_n) = u_n^{n+1} > 0 = f_{n+1}(u_{n+1})$ et donc $u_{n+1} < u_n$,

la suite (u_n) est donc strictement décroissante.

Cette suite décroissante est minorée par 0 , donc cvte (thm limite monotone) .

$u_2 < u_1 = 1 \Rightarrow 0 < u_n^{n+1} < u_2^{n+1} \underset{\infty}{\to} 0$, $\lim_{n\to\infty} u_n^{n+1} = 0$.

Sur $[0, 1[$, $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k - 2 = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x} - 2 = \dfrac{2x - x^{n+1} - 1}{1 - x}$

Or $f_n(u_n) = 0$ donc $2u_n - 1 = u_n^{n+1}$, il en sort :

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{1}{2}}$$

1158. IMT. Déterminer la nature de la série de terme général $\sin\left(\pi(\sqrt{2} + 1)^n\right)$.

Sol : Classique quand on connait.

On remarque que $(\sqrt{2} + 1)^n + (-1)^n(\sqrt{2} - 1)^n = (\sqrt{2} + 1)^n + (-\sqrt{2} + 1)^n \in 2\mathbb{Z}$.

Par développement simple binomial.

Donc $u_n = -(-1)^n \sin((\sqrt{2} - 1)^n)$, qui est absolument cvte car $(\sqrt{2} - 1) < 1$.

1159. CCINP. a) Montrer que, pour x dans un domaine D à préciser, $\tan(2x) = \dfrac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$.

b) Montrer que $\pi = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1} (\sqrt{2} - 1)^{2n+1}$.

Sol : a) Classique de trigo, le domaine est $]-\pi/2, \pi/2[\setminus \pm\pi/4$ modulo π.

Il suffit de remarquer que $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$ et $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$.

b) Enoncé faux , on reconnait le devt en dse de Arctan, on l'applique en $\sqrt{2} - 1$.

On a le droit car le rayon est 1.

Le a) permet en aplliquant en $\pi/8$ de calculer $\tan(\pi/8) = \sqrt{2} - 1$.

On reporte.

1160. Navale. Déterminer la nature de la série de terme général $\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}\right)$.

1161. CCINP. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in]\,0, \pi\,[$ et, pour $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sin u_n$.

a) Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

b) Montrer que la série de terme général u_n^3 converge. Ind. Considérer $u_{n+1} - u_n$.

c) Montrer que la série de terme général u_n^2 diverge. Ind. Considérer $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$.

Sol : déjà fait dans une autre liste.

1162. ENSEA. Soit, pour $n \geqslant 2, u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$.

a) Montrer que $u_n = v_n - \dfrac{1}{n} + \dfrac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} + o\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ avec $v_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

b) Déterminer la nature des séries $\sum v_n$ et $\sum u_n$.

c) Montrer que $v_n \sim u_n$. Conclusion ?

Sol : Fait en classe.

1163. CCINP. Soient (a_n) une suite positive et (u_n) la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}^{+*}$ et,

pour $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{u_n + \sqrt{u_n^2 + a_n^2}}{2}$.

a) Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \leqslant \dfrac{a_n}{2}$.

b) Montrer que, si la série de terme général a_n converge, alors la suite (u_n) converge.

c) La réciproque est-elle vraie ? Ind. Considérer $u_n = \dfrac{n}{n+1}$.

Sol :

1. On remarque que la suite (u_n) est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

On voit aussi qu'elle est croissante.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} 0 \leqslant u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{u_n^2 + a_n^2} - u_n\right) \\ &= \frac{1}{2}\frac{a_n^2}{\sqrt{u_n^2 + a_n^2} + u_n} \leqslant \frac{a_n^2}{2\sqrt{a_n^2}} = \frac{a_n}{2} \end{aligned}$$

Si $\sum a_n$ converge, alors $\sum (u_{n+1} - u_n)$ aussi (par domination),

donc $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge (lien suite/série).

2. On doit chercher une suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ tq $(\star)$ soit vérifiée avec la suite $n \mapsto u_n = n/(n+1)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on trouve :

$$\begin{aligned} a_n^2 &= (2u_{n+1} - u_n)^2 - u_n^2 = 4u_{n+1}\left(u_{n+1} - u_n\right) \\ &= 4\frac{n+1}{n+2}\left(\frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1}\right) = \frac{4}{(n+2)^2} \end{aligned}$$

Ainsi la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est définie par $a_n = \dfrac{2}{n+2}$.

La suite (u_n) converge, et pourtant $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ diverge.

1164. IMT. On cherche les applications f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant (*) :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \dfrac{f(x+n) - f(x)}{n}$.

a) Soit f vérifiant (*).

i) En considérant des valeurs particulières de n, montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f'(x+1)$.

ii) Montrer que $\displaystyle\int_x^{x+1} f'(t)\mathrm{d}t$ ne dépend pas de x, puis que f' est constante.

b) Donner toutes les solutions du problème posé.

1165. CCINP. On cherche les fonctions $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant la condition (E) :

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x)f(y) = \displaystyle\int_{x-y}^{x+y} f(t)\mathrm{d}t.$

b) Soit $F : (x, y) \mapsto \displaystyle\int_{x-y}^{x+y} f(t)\mathrm{d}t.$

Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$ et calculer $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}.$

c) Soit f une solution de (E). Calculer $f(0)$ et $f''(x)f(y) - f(x)f''(y)$.

En déduire l'ensemble des solutions de (E).

1166. IMT. Justifier l'existence puis calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} (1 - t\arctan(1/t))\mathrm{d}t.$

1167. ENSEA. Soient $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\mathrm{d}x$ et $J = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\cos x)\mathrm{d}x.$

a) Justifier l'existence de I et de J.

b) Montrer que $I = J$.

c) Calculer $I + J$; en déduire la valeur de I.

Sol : mots clés cie, signe constant, avec les précautions d'usage, $\ln(\sin(x)) \underset{0}{\sim} \ln(x)$.

Maintenant que I converge on lui applique le chgt $\mathcal{C}^1$, strct monotone $u = \pi/2 - t$.

Il conserve la nature (cvte) et prouve $I = J$.

c) $I + J = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{\sin(2x)}{2}\right) = -\pi/2. \ln(2) + 1/2. \int_0^{\pi} \ln(\sin(u))du.$

On coupe la dernière en 2 au milieu $v = \pi - u$, les 2 morceaux sont égaux.

Bref $I = J = -\pi/2. \ln(2)$.

1168. CCINP. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a \in [0,1]$. Pour $x \in]0,1]$, on pose $f_n(x) = \dfrac{1-e^{-nx}}{x^a\left(1+x^2\right)}$.

a) Montrer que (f_n) converge simplement vers une fonction que l'on précisera.

b) Existe-t-il des valeurs de a pour lesquelles il y a convergence uniforme sur $]0,1]$?

c) Montrer que l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$ est convergente pour tout $a \in [0,1]$.

d) Pour $a \in [0,1[$, montrer que la suite (I_n) converge et déterminer sa limite.

e) Qu'en est-il pour $a = 1$?

1169. CCINP. Soit $F : x \mapsto -\displaystyle\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

a) Déterminer le domaine de définition de F.

b) Montrer que, pour tout $x \in [0,1], F(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$.

c) Montrer que, pour tout $x \in [0,1], F(x) + F(1-x) = \dfrac{\pi^2}{6} - \ln(1-x)\ln(x)$.

On admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et on pourra procéder par intégration par parties.

1170. CCINP. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}, a_n = \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n \mathrm{d}t$.

a) Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

b) Montrer que la série $\sum(-1)^n a_n$ converge.

c) On note respt R et f le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum a_n x^n$.

i) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \geqslant \dfrac{1}{2n+1}$.

ii) En déduire la valeur de R.

iii) Trouver une équation différentielle vérifiée par f.

Sol :

a) Cv vers 0 par tcd. La majoration est la fct cste 1.

b) CSSA car tend vers 0 et positive, la décroissance est aisée

par soustraction et positivité de l'intégrale.

c) Comme a_n tend vers 0 le rayon dépasse 1.

Pour l'inégalité, on minore le 1 par t^2, les 2 s'éliminent, intégrale de monome.

On en déduit que rayon est majoré par 1 , bref $R = 1$.

iii) Ipp classque sur a_n, on en sort $(2n+3)a_{n+1} = 1 + (n+1)a_n$.

On multiplie par x^n, $2f'$ apparait à gauche, la géométrique à dte,

on sépare le 1 ds la sigma, on ressort $xf' + f$.

$2f' + \dfrac{1}{x}(f - a_0) = xf' + f + \dfrac{1}{1-x}$, ça ne vend pas du rêve...

1171. CCINP. Soit f définie sur $I =]0,1[$par $f(x) = \dfrac{\ln x}{x-1}$..

a) Vérifier que f est prolongeable par continuité en 1.

b) Justifier l'intégrabilité de f sur I.

c) Donner, au voisinage de 1 , un développement de f en série entière.

d) Calculer l'intégrale de f sur I.

1172. CCINP. Soient $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+xt)}{t}\,\mathrm{d}t$ et D son domaine de définition.

a) Montrer que $]-1,1[\subset D$.

b) Trouver un développement en série entière de F.

c) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$.

d) Fournir une expression simple de F' sur $[0,1[$.

e) Proposer une autre méthode pour aboutir à ce résultat.

1173. CCINP. On souhaite montrer l'égalité $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln\left(t^2\right)\ln\left(1-t^2\right)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n(2n-1)^2}$.

a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln\left(t^2\right)\ln\left(1-t^2\right)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

b) Donner le développement en série entière de $\ln(1-t)$ et transformer le problème en un problème d'interversion intégrale/somme.

c) Calculer l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^1 \ln\left(t^2\right) t^{2n-2}\,\mathrm{d}t$.

d) En déduire l'égalité demandée.

Sol a) Pas obligatoire ! On va utiliser Fubini, mais à CCINP oui.

Equivalent en 0^+ à $-2\ln(t)$, en 1 négligeable devant $\ln(1-t)$.

b) On développe la dse, on applique Fubini (2 hyp) une fondamentale

$\displaystyle\sum \int |f_n|$ cv , oui on est en $\dfrac{K}{n^3}$.

La cv simple vient de l'existence du dse.

c) $\dfrac{2}{n(2n-1)^2}$, par IPP à bien justifier...

d) On a tout fait sauf calculer la somme, elts simples, sommes partielles,

$H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$.

Puis on sépare la somme des inverses des carrés en pairs et impairs.

1174. ENSEA. Déterminer les solutions de $xy'' - (x+1)y' + y = 0$ dse.

1175. CCINP. On considère l'équation différentielle $(E) : \left(x^2-1\right)y'' + 2xy' - 2y = 0$.

a) Déterminer les solutions polynomiales de (E).

b) Trouver une équation différentielle (E^*) vérifiée par $x \mapsto z(x) = xy(x)$.

c) Chercher a, b et c tels que $\dfrac{2-4x^2}{x\left(x^2-1\right)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x-1} + \dfrac{c}{x+1}$.

d) Résoudre (E^*) ; en déduire toutes les solutions de (E).

1176. CCINP. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

a) La matrice A est-elle diagonalisable ?

b) Montrer que A est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

c) Donner les solutions du système différentiel $\begin{cases} x' = -x - 4y \\ y' = x + 3y. \end{cases}$

1177. IMT. On considère le système

$(S) : \begin{cases} x' = y - z \\ y' = z - x \\ z' = x - y \end{cases}$ avec les conditions initiales $x(0) = 1$ et $y(0) = z(0) = 0$.

a) Existence et unicité des solutions de (S).

b) Montrer que si (x, y, z) est une solution,

alors $x + y + z$ et $x^2 + y^2 + z^2$ sont des fonctions constantes.

Que peut-on en déduire pour la trajectoire ?

c) Résoudre (S).

Sol : Voir notre feuille exo de classe.

1178. CCINP. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $f(x, y) = xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ si$(x, y) \neq (0, 0), f(0, 0) = 0$.

a) Montrer que f est continue.

b) Exprimer les dérivées partielles de f.

c) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.

d) Calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. Qu'en déduire ?

Sol : c'est du cours.

Probabilités

1179. IMT. On estime qu'il y a une chance sur 10^6 pour qu'un élève soit un génie.

On dispose d'un échantillon de 500000 élèves.

Soit X le nombre d'élèves qui sont des génies.

a) Quelle est la loi de X ?

b) Par quelle autre loi peut-on approcher X ?

1180. CCINP. Une urne contient N boules, r blanches et $N-r$ noires.

On effectue des tirages successifs sans remise, jusqu'à épuisement des boules blanches.

Soit X le nombre de tirages nécessaires.

a) Identifier la loi de X et donner son espérance pour $r=1$ et pour $r=N$.

b) Dans la suite, r est quelconque, compris entre 1 et N.

i) Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire X ?

ii) Montrer que, pour de telles valeurs de $k, \mathbf{P}(X=k)=\begin{pmatrix} k-1 \\ r-1 \end{pmatrix} / \begin{pmatrix} N \\ r \end{pmatrix}$.

c) Soient p et q dans $\mathbb{N}^*$. Trouver une relation liant $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} p-1 \\ q-1 \end{pmatrix}$.

En déduire que $\mathbf{E}(X)=\dfrac{r(N+1)}{r+1}$.

1181. CCINP. Dans une urne contenant n tickets dont p gagnants,

un joueur tire avec remise p tickets.

a) Calculer la probabilité $P(n,p)$ pour que le joueur tire au moins un ticket gagnant.

b) On suppose $p=\sqrt{n}$. Calculer la limite lorsque p tend vers l'infini de $P\left(p^2,p\right)$.

On donne $n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$.

c) Reprendre les questions précédentes lorsque le joueur tire p tickets sans remise.

1182. CCINP. On dispose d'une urne qui contient trois jetons numérotés $1,2,3$, et dans laquelle on effectue des tirages avec remise. Soient Y la variable aléatoire correspondant au numéro du tirage où l'on obtient pour la première fois un chiffre différent du premier chiffre obtenu et Z la variable aléatoire correspondant au numéro du tirage où l'on obtient pour la première fois un troisième chiffre.

a) Déterminer la loi de Y.

b) Quelle est la loi de $Y-1$? En déduire l'espérance et la variance de Y.

c) Déterminer la loi de (Y, Z).

d) En déduire la loi de Z.

1183. CCINP. Une urne contient a boules blanches et b boules noires.

On réalise n tirages avec remise.

a) Soit B_i l'événement «on tire i boules blanches». Calculer $\mathbf{P}\left(B_i\right)$.

b) Montrer que $\displaystyle\sum_{i=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2i}x^{2i}=\frac{(1+x)^n+(1-x)^n}{2}$.

c) Calculer la probabilité de tirer un nombre pair de boules blanches.

1184. a) Soient $c\in\mathbb{R}^{+}$et X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que,

pour $k\in\mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(X=k)=\dfrac{c}{k(k+1)}$.

Trouver a, b tels que, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{a}{k}+\dfrac{b}{k+1}$.

En déduire la valeur de la constante c.

b) Jacques et Isabelle jouent à un jeu.

Si X prend une valeur paire k, Isabelle donne k euros à Jacques ;

si X prend une valeur impaire k, Jacques donne k euros à Isabelle.

Déterminer l'espérance de gain de Jacques.

1185. CCINP. On considère deux variables aléatoires X_1 et X_2 indépendantes et suivant toutes deux la loi binomiale de paramètres n et $1/2$.

Pour tout $\omega \in \Omega$ on pose $M(\omega) = \begin{pmatrix} X_1(\omega) & 1 \\ 0 & X_2(\omega) \end{pmatrix}$.

Il s'agit de déterminer la probabilité que $M(\omega)$ soit diagonalisable.

a) En développant de deux manières le polynôme $(1+X)^{2n}$,

montrer l'égalité $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix}$.

b) Conclure.

Sol : $\mathcal{P}(X_1 = k) = \dfrac{\binom{n}{k}}{2^n}$.

On passe par l'extérieur, $\mathcal{P}(X_1 \neq X_2) = 1 - \displaystyle\sum_{0}^{n} \left(\frac{\binom{n}{k}}{2^n} \right)^2 = 1 - \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}$.

Stirling tend vers 1 , logique ?

Voir exo 30 feuille proba III(20212022)moi

1186. CCINP. Soit $p \in]0,1[$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$ on pose $p_k = p^2 k(1-p)^{k-1}$.

a) Montrer que $(p_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ définit une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^*$.

b) Soit X une variable aléatoire telle que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbf{P}(X = k) = p_k$.

Justifier l'existence et déterminer la valeur de $\mathbf{E}(X-1)$ puis de $\mathbf{E}((X-1)(X-2))$.

c) En déduire l'existence et la valeur de $\mathbf{E}(X)$ et de $\mathrm{V}(X)$.

1187. CCINP. a) Pour $r \in \mathbb{N}^*$, donner le développement en série entière au

voisinage de 0 de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ et de $x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)^r}$, ainsi que le rayon de convergence.

b) Soient $p \in]0,1[$ et $q = 1-p$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $p_k = \begin{pmatrix} k+r-1 \\ k \end{pmatrix} p^r q^k$.

Montrer que la suite $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définit bien une loi de probabilité sur $\mathbb{N}$.

c) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que : $\forall k \in \mathbb{N}, \mathbf{P}(X=k)=p_k$.

Déterminer la fonction génératrice de X.

d) En déduire l'espérance et la variance de X.

1188. CCINP. Un secrétaire doit joindre par téléphone n clients. Il les appelle un par un, les appels étant indépendants, et la probabilité qu'un client donné décroche est p. Soient $q=1-p$ et X la variable aléatoire égale au nombre de clients joints après une série d'appels.

a) Déterminer la loi de X. Préciser $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{V}(X)$.

Le secrétaire passe ensuite des appels aux clients qui n'ont pas été joints lors de la première vague d'appels. Soient Y et Z les variables aléatoires égales au nombre de clients joints lors de la deuxième vague d'appels et au nombre total de clients joints.

b) i) Exprimer Z à l'aide de X et Y. Préciser les valeurs possibles pour la variables Z.

ii) Calculer $\mathbf{P}(Z=0)$. Montrer que $\mathbf{P}(Z=1)=npq^{2n-2}(1+q)$.

iii) Soient $k \in [\![0,n]\!]$ et $h \in [\![0,k]\!]$.

Exprimer $\mathbf{P}(Y=h \mid Z=k)$.

iv) Soit $s \in [\![0,n]\!]$. Montrer que $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n-k \\ s-k \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n \\ s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ k \end{pmatrix}$ pour tout k.

Montrer que $\mathbf{P}(Z=s)=\begin{pmatrix} n \\ s \end{pmatrix}(1-q^2)^s\,(q^2)^{n-s}$ En déduire la loi de Z.

1189. CCINP. Soient $(p_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'éléments de $[0,1], (X_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes, telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, X_n$ suit la loi de Bernoulli de paramètre p_n. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*, \bar{p}_n=\dfrac{p_1+\cdots+p_n}{n}$. Soit $\varepsilon>0$.

a) Montrer que $\mathbf{P}\left(\left|\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}-\bar{p}_n\right| \geqslant \varepsilon\right) \to 0$.

b) On suppose que $\bar{p}_n \to p$. Montrer que $\mathbf{P}\left(\left|\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}-p\right| \geqslant \varepsilon\right) \to 0$.

1190. CCINP. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$, de même loi, admettant un moment d'ordre deux, telles que $Z=X+Y+1$ suive la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.

a) Déterminer l'espérance et la variance de X en fonction de p.

b) Déterminer la fonction génératrice de X. En déduire la loi de X.

1191. IMT. Soit $f : t \mapsto \dfrac{t}{2-t^2}$.

a) Développer f en série entière, préciser le rayon de convergence.

b) Donner la loi d'une variable aléatoire X dont la fonction génératrice est f.

c) Calculer l'espérance de X.

d) Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y = \frac{X}{2}$.

Sol : feuille 9 0.d

1192. CCINP. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\{0, \ldots, n\}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$

telle que pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}, \mathbf{P}(X = k) = \frac{a}{k+1} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$.

a) Soit $k \in \{1, \ldots, n\}$. Déterminer α tel que $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} n-1 \\ k-1 \end{pmatrix}$.

b) Déterminer a.

c) Calculer l'espérance de X.

d) Calculer la variance de X.

1141 aussi....voir 1012.