Comparer avec rms pdf...

Algèbre

672. Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$. Montrer que $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_1 & 1 & x_2 & 1 & 0 \\ x_1^2 & 2x_1 & x_2^2 & 2x_2 & 2 \\ x_1^3 & 3x_1^2 & x_2^3 & 3x_2^2 & 6x_2 \\ x_1^4 & 4x_1^3 & x_2^4 & 4x_2^3 & 12x_2^2 \end{vmatrix} \neq 0.$

SSI $x_1 \neq x_2$.

Sol : Exercice agaçant de calcul, avec identités remarquables...

On remplace la 3 ème col par elle même moins la première.

Puis la quatrième par elle même moins la seconde.

On développe suivant la première ligne, on met $x_2 - x_1$ en facteur 2 fois.

Puis la deuxième col du det 4*4 par elle même moins la prems...Etc

On continue à mettre $x_2 - x_1$ en facteur ...

673. [Hors programme] Déterminer, si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

le rang de la comatrice de M en fonction de celui du rang de M.

674. Déterminer les sous-espaces stables par la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

675. Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 5 \\ -1 & -2 & 5 \\ -1 & -3 & 6 \end{pmatrix}$ et $E = \text{Vect}\,(I_3, A)$.

a) L'espace E est-il stable par produit matriciel ?

b) Déterminer les matrices de E inversibles et d'inverse dans E.

c) Existe-t-il $M \in E$ telle que $M^2 = A$?

Sol : a) Oui car, $A^2 = -2I_3 + 3A(*)$ suivi d'un calcul simple.

b) C'est simple, mais il faut bien prendre le problème.

On développe un produit comme un bourrin.

$(\alpha I + \beta A)(\alpha' I + \beta' A) = I$ on range , on utilise la liberté de la famille (I, A) et (*).

On arrive à l'inversibilité de la matrice $\begin{pmatrix} \alpha & -2\beta \\ \beta & \alpha + 3\beta \end{pmatrix}$.

On calcule le determinant, (erreur de calcul ? ?) $\alpha^2 + 3\alpha\beta + 2\beta^2$.

On met sous forme canonique.

c) Le même calcul ? Oui je le pense, mais je n'ai pas développé ...

676. Soient $n \geqslant 2, \mathcal{H}$ l'ensemble des matrices de trace nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

et $\mathcal{N}$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

a) Les ensembles $\mathcal{H}$ et $\mathcal{N}$ sont-ils des espaces vectoriels ?

b) Montrer que l'espace engendré par $\mathcal{N}$ est inclus dans $\mathcal{H}$.

c) Cette inclusion est-elle une égalité ?

677. Soient u un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-ev E de dimension finie et $P \in \mathbb{C}[X]$.

a) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Mq, si $u - \lambda$ id n'est pas injective, alors $P(u) - P(\lambda)$ id non plus.

b) On suppose $\deg(P) \geqslant 1$. Montrer que, si $P(u) - \mu$ id n'est pas injectif,

alors il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\mu = P(\lambda)$ et $u - \lambda$ id non injective.

678. Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}$ puis résoudre l'équation $M^3 + 2M = A$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Sol : a) 2 vp distinctes $(3, -12)$ donc Dz. Calculs complets faciles.

On arrive par similitude à $G^3 + 2G = D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}$.

Or (aspest polynomial) $GD = DG$.

Mais (classique ? ?) comme D diagonale à vp distinctes, G diag aussi ...

$G = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, on remplace, $a^3 + 2a = 3$ pareil avec b et -12.

Le polynôme $X^3 + 2X$ est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

Sol unique , $a = -2, b = 1$...

On peut facilement finir le boulot.

679. Soit $\varphi \in \mathbb{R}$. La matrice $\begin{pmatrix} 0 & \sin 2\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & 0 & \sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & \sin\varphi & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

680. Considérons l'application u définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $u(P) = X^n P\left(\frac{1}{X}\right)$.

a) Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Montrer que u est diagonalisable et exhiber une base de vecteurs propres.

(Oral Ccp)...On aura tout vu.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $\Phi : P(X) \mapsto X^n P(1/X)$.

Montrer que Φ est un endomorphisme diagonalisable de $\mathbb{R}_n[X]$.

Sol :

- On trouve $\Phi\left(X^k\right) = X^{n-k}$.

La matrice dans $1, X, \ldots, X^n$ est « antidiagonale » de coefficients antidiagonaux 1.

On a $\Phi^2 = \mathrm{Id}$, donc Φ est une symétrie vectorielle donc diagonalisable.

- Les polynômes invariants sont les $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ qui sont tels que $a_{n-k} = a_k$.

- Les polynômes changés en leur opposé sont les $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ tels que $a_{n-k} = -a_k$.

- Une base de E_1 est les $U_k = X^k + X^{n-k}$ où $k \leqslant n-k$, donc $0 \leqslant k \leqslant \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

Une base de E_{-1} est les $V_k = X^k - X^{n-k}$ où $k < n-k$, donc $0 \leq k \leqslant \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$.

681. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = -\mathrm{id}$.

a) Montrer que, pour tout vecteur $a \neq 0, (a, f(a))$ est une famille libre.

Dans la suite, on notera $F(a)$ l'espace vectoriel engendré par ces deux vecteurs.

b) Montrer qu'il existe des vecteurs $a_1, \ldots, a_n$ tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{n} F(a_i)$.

c) Montrer que E est de dimension paire.

Trouver une base de E dans laquelle la matrice de f soit aussi simple que possible.

d) Donner le polynôme caractéristique de cette matrice.

Que dire du spectre de f ? L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

(Oral Xcachan) avant.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = -\operatorname{Id}_E$.

1. Donner un exemple en dimension 2.

2. Montrer que f n'a pas de valeur propre. En déduire que $\dim(E)$ est paire.

3. Pour tout $x \neq 0$, soit $F_x = \operatorname{Vect}\{x, f(x)\}$.

Montrer que F_x est un plan stable par f.

4. On pose $\dim(E) = 2n$, avec $n \geqslant 1$.

Montrer qu'il existe une base $(e_1, f(e_1), \ldots, e_n, f(e_n))$ de E.

5. Écrire la matrice de f dans cette base.

Sol

1. Dans $E = \mathbb{R}^2$ euclidien orienté, la rotation vectorielle d'angle $\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$ convient.

Sa matrice dans toute base orthonormale directe du plan E est $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Soit $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = \lambda x$.

Alors $\left\{ \begin{array}{l} f^2(x) = \lambda^2 x \\ f^2(x) = -x \end{array} \right. \Rightarrow \left(\lambda^2 + 1\right) x = 0 \Rightarrow x = 0$

Ainsi l'application f n'a pas de vecteur (ni évidemment de valeur) propre.

Le polynôme caractéristique de f, qui est de degré $\dim(E)$ n'a donc aucune racine réelle.

Il se factorise alors dans $\mathbb{R}[X]$ en facteurs irréductibles de degré 2 .

Il en résulte que la dimension E est un entier pair.

3. Soit $x \neq 0$ dans E.

Alors x n'est pas vecteur propre de f, et donc $f(x)$ n'est pas proportionnel à x.

Ainsi x et $f(x)$ sont libres, et donc F_x est un plan vectoriel.

Soit $u = \lambda x + \mu f(x)$ un élément de F_x.

Alors $f(x) = -\mu x + \lambda f(x) \in F_x$, donc F_x est un plan stable.

4. On choisit $e_1 \neq 0$ dans E, et on forme le plan F_{e_1}.

Pour $1 \leqslant p < n$, on suppose connus p vecteurs $e_1, e_2, \ldots, e_p$ non nuls

tels que la somme $G = F_{e_1} + F_{e_2} + \cdots + F_{e_p}$ soit directe.

Alors G est stable par f, et $\dim(G) = 2p < 2n$.

On se donne alors $e_{p+1} \notin G$ (donc non nul).

Les sous-espaces $G, F_{e_{p+1}}$ et $H = G \cap F_{e_{p+1}}$, sont stables par f.

Nécessairement $H = \{0\}$, sinon H serait une droite propre de f.

Ainsi la somme $G + F_{e_{p+1}} = \sum_{k=1}^{p+1} F_{e_k}$ est directe.

Par récurrence finie, on en déduit l'existence de $(e_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ telle que $E = \bigoplus_{j=1}^{n} F_{e_j}$.

On sait que chaque $(e_j, f(e_j))$ est une base de F_{e_j}.

Par concaténation, la famille $(e_1, f(e_1), \ldots, e_n, f(e_n))$ est une base $\mathcal{B}$ de E.

5. Par construction, la matrice de f dans $\mathcal{B}$ est diagonale par blocs égaux à

$$R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

682. Soit g un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie.

On s'intéresse à $\varphi : h \in \mathcal{L}(E) \mapsto h \circ g - g \circ h \in \mathcal{L}(E)$.

a) Que vaut le déterminant de φ ?

b) Montrer que les vecteurs propres de φ associés à des valeurs propres non nulles

sont des endomorphismes nilpotents.

c) Soit réciproquement h nilpotent. Montrer qu'il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\varphi_g(h) = h$.

Sol feuille 4 : 2.9, 73,47.

683. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de trace non nulle et $u : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \operatorname{tr}(A)M - \operatorname{tr}(M)A$.

L'endomorphisme u est-il diagonalisable ? Que se passe-t-il si $\operatorname{tr}(A) = 0$?

Sol : 2.22 et 38 feuille 4

684. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de projection.

Étudier la diagonalisabilité des endomorphismes

$u : M \mapsto AM, v : M \mapsto MA$ et $w : M \mapsto AM - MA$.

685. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et f_A l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ défini par $f_A(M) = AM$.

a) Montrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ on a $P(f_A) = f_B$, avec B à préciser.

b) Montrer que A est diagonalisable si et seulement si f_A l'est.

c) En écrivant la matrice de f_A dans une base bien choisie, donner les valeurs propres de f_A, leur multiplicité ainsi que la dimension des espaces-propres associés en fonction de ceux de A. Retrouvez ainsi le résultat de la question précédente.

686. Soient E un espace de dimension finie n et $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur.

Soit φ l'endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ défini par $\varphi : u \mapsto \dfrac{1}{2}(u \circ p + p \circ u)$.

a) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur p pour que φ soit un projecteur.

b) Montrer que les ensembles $A = \{u \in \mathcal{L}(E); \operatorname{Im} p \subset \operatorname{Ker} u, \operatorname{Im} u \subset \operatorname{Im} p\}$ et

$B = \{u \in \mathcal{L}(E); \operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} p, \operatorname{Ker} p \subset \operatorname{Ker} u\}$ sont des sous-espaces de $\mathcal{L}(E)$.

c) Montrer que φ est diagonalisable et préciser ses valeurs propres.

Sol : fait en classe.

687. Soient f et g deux endo d'un $\mathbb{R}$-ev de dim finie tels que $f \circ g = f + g$.

a) Montrer que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} g$ et $\operatorname{Ker}\ f = \operatorname{Ker} g$.

b) On suppose que f est diagonalisable.

Mq $f \circ g$ est diagonalisable, avec un spectre inclus dans $\mathbb{R} \backslash]0, 4[$.

Sol : $\heartsuit$.

a) $\ker(g) \subset \ker(f)$ clair en remplaçant.

Puis $g(x) = f((g - I)(x)) \subset Im(f)$.

Donc $Im(g) \subset Im(f)$.

Il suffit alors (dim finie) d'appliquer le thm du rang, pour obtenir l'égalité des dim.

Donc inclusion et égalité des dim, bref égalités.

b) Une vraie question, et si ça commutait ?

Attention à ne pas franchir la ligne blanche trop vite...

La coDz n'est pas encore acquise.

D'abord $1 \notin Sp(g)$(**).

Donc $f = g \circ (g - I)^{-1}(**)$.

Peut-on en déuire que ça commute ?

Oui, mais (C-H) : en dim finie $\chi_G(G) = 0$, on le divise par $X - 1$(**),

Il vient $Q(G) \circ (G - I) + \alpha I = 0$, $\alpha \neq 0$, sinon pb avec (**).

Oui en effet , 1 n'annule pas ce poly caract.

On en sort que : $Q(G) = -\alpha(G - I)^{-1}$, donc $(G - I)^{-1}$ poly en G.

La commutation est acquise, mais pas (encore ?) Codz.

Donc chacun laisse stable les sep de l'autre(*).

Soit $u \in E^f_{\lambda_1}$.

On a $(\lambda_1 - 1)g(u) = \lambda_1 u$. Il en sort $\lambda_1 \neq 1$. Attention, on parle de f.

On a utilisé $fg = gf$.

Mais aussi, $g(u)$ colin à u. Co Dz !

Il vient en revenant à une base adaptée, pour chaque sep $\lambda\mu = \lambda + \mu$.

Donc on parle de sol de $X^2 - SX + S = 0$, $\Delta = S^2 - 4S \geqslant 0$.

688. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable et $B = A^3 + A + I_n$.

Montrer que A est un polynôme en B.

Le résultat reste-t-il vrai si on remplace $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$?

(Oral Mines-Ponts)

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonalisable.

Soit $B = A^3 + A + I_n$.

1. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, montrer que A est un polynôme en B.

Qu'en est-il si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$?

2. Qu'en est-il si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, mais que A n'est pas supposée diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

Sol

1. Il existe $\Omega \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = \Omega D \Omega^{-1}$, où D est diagonale.

Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de A, de multiplicités respectives $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$.

Soit $P = X^3 + X + 1$. Alors :

$$B = P(A) = \Omega \Delta \Omega^{-1}$$

où $\Delta = P(D)$ est diagonale.

Mais $x \mapsto P(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Les valeurs propres distinctes de B sont donc les $\mu_k = P(\lambda_k)$,

avec les mêmes multiplicités α_k.

Il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}_{p-1}[X]$ tel que :

$$\forall k \in \{1, \ldots, p\}, Q(\mu_k) = \lambda_k$$

Avec ces notations, $Q(\Delta) = D$, donc :

$$A = \Omega Q(\Delta) \Omega^{-1} = Q\left(\Omega \Delta \Omega^{-1}\right) = Q(B)$$

- Le résultat ne tient plus si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Le problème vient de la non injectivité de

$$P : z \in \mathbb{C} \mapsto z^3 + z + 1$$

On a en effet par exemple $P(0) = 1 = P(i)$.

Considérons $A = \mathrm{diag}(i, 0, \ldots, 0)$. On a :

$$B = P(A) = \mathrm{diag}(P(i), P(0), \ldots, P(0)) = I_n$$

Mais bien sûr A n'est pas un polynôme en $B = I_n$ (les polynômes en I_n sont les αI_n).

2. Là aussi, le résultat ne tient plus. Par exemple :

Soit $A = \mathrm{diag}(R, \ldots, R)$ avec $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Alors $A^2 = -I_n$ donc $B = A^3 + A + I_n = I_n$.

Mais A n'est pas un polynôme en B.

689. Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, u, v deux endomorphismes de E.

a) Mq u et v n'ont pas de valeur propre commune ssi $\chi_u(v)$ est inversible.

b) On suppose qu'il existe $f \in \mathcal{L}(E) \backslash \{0\}$ tel que $u \circ f = f \circ v$.

Montrer que u et v ont une valeur propre commune.

Que peut-on dire si f est un automorphisme ?

Sol a) Clair $\chi_u(v) = \prod_1^r (v - \lambda_i Id)^{m_i}$,

son inversibilité est équivalente à tous les déterminants non nuls.

b) Voir feuille 4 , exo2.19 ou ddl 68.

On écrit $C = PJ_rQ$ où P, Q sont inversibles et $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

L'égalité $AC = CB$ devient $(P^{-1}AP)\, J_r = J_r\, (QBQ^{-1})$.

Si on raisonne par blocs, cela implique que $P^{-1}AP$ et QBQ^{-1} sont triangulaires par blocs, avec le même premier bloc diagonal (de taille r).

Ainsi les polynômes caractéristiques de $P^{-1}AP$ et QBQ^{-1} (donc ceux de A et B) ont un facteur de degré r en commun.

c) $\chi_A = \chi_B$.

1144. CCINP. Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) = \emptyset$.

a) Montrer que, si P est un polynôme annulateur de A,

alors les valeurs propres de A sont racines de P.

b) Montrer que la matrice $\chi_A(B)$ est inversible.

c) Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Prouver : $AX = XB \Leftrightarrow X = 0$.

d) Montrer que, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

il existe une unique matrice $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $AX - XB = M$.

Sol :

(Oral Mines-Ponts 2018) ... Tjs les mêmes habitudes.

a) Cours.

Soit A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, à spectres disjoints.

1. On a $\chi_A(X) = \prod_{k=1}^{n} (X - a_i)$, donc $\chi_A(B) = \prod_{k=1}^{n} (B - a_i I_n)$.

Or les spectres de A et B sont disjoints.

Ainsi les $B - a_i I_n$ sont inversibles, donc $\chi_A(B)$ aussi par produit.

2. L'application $\varphi : M \mapsto AM - MB$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Montrons que c'est un isomorphisme.

Soit $M \in \operatorname{Ker} \varphi$, donc tel que $AM = MB$.

Par récurrence immédiate, il vient : $\forall k \in \mathbb{N}, A^k M = M B^k$.

Par linéarité, $P(A)M = MP(B)$, pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$.

En particulier $\chi_A(A)M = M\chi_A(B)$.

Mais $\chi_A(A) = 0$ (Cayley-Hamilton), et $\chi_A(B)$ est inversible.

Ainsi $M = 0$, donc φ est un isomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

En particulier :

$$\begin{gathered} \forall Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \exists! X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ AX - XB = Y \end{gathered}$$

Voir 1144 ! ! !

690. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n et u un endomorphisme de E

tel que, pour tout $x \in E$, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $u^p(x) = x$.

a) Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

Montrer qu'il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $u^q(e_k) = e_k$.

En déduire que $u^q = \mathrm{id}$.

b) On suppose u diagonalisable. Montrer que $u^2 = \mathrm{id}$.

691. Soit $\varphi : x \mapsto e^{-x^2}$.

On admet que φ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et que son intégrale vaut $\sqrt{\pi}$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme H_n tel que,

pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi^{(n)}(x) = (-1)^n H_n(x)\varphi(x)$.

Préciser le degré et le coefficient dominant de H_n.

b) Montrer que l'application $(P, Q) \mapsto \langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)\varphi(t)\mathrm{d}t$ est un ps sur $\mathbb{R}[X]$.

c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $P \in \mathbb{R}[X], \langle P, H_n\rangle = \langle P', H_{n-1}\rangle$.

En déduire que la famille (H_n) est orthogonale. Calculer $\|H_n\|^2$ pour tout n.

d) Soient $x, t \in \mathbb{R}$. Étudier la convergence de la série de terme général $\dfrac{t^n H_n(x)}{n!}$.

692. Soient E un espace préhilbertien réel et F un sous-espace de E.

a) Montrer que $F \subset \left(F^{\perp}\right)^{\perp}$.

b) Dans le cas où $E = \mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire défini par :

$\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t$ et $F = \{P \in E, P(0) = 0\}$, calculer $F^{\perp}$ et $\left(F^{\perp}\right)^{\perp}$.

c) À quelle condition a-t-on $F = \left(F^{\perp}\right)^{\perp}$?

693. Soient E un espace euclidien, f et g deux endomorphismes de E vérifiant :

$$\forall x, y \in E, \langle f(x), y\rangle = \langle x, g(y)\rangle.$$

a) Exprimer $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ en fonction de $\operatorname{Ker} g$ et $\operatorname{Im} g$.

b) Soit F un sev de E. Montrer que F est stable par f ssi $F^{\perp}$ est stable par g.

c) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Existe-t-il toujours un endo $g \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant ces hypothèses ?

694. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ telle que la matrice

PMP^{-1} ait ses deux coefficients diagonaux égaux.

695. Soient A une matrice symétrique réelle et $B = A^3 + A + I_n$.

Montrer qu'il existe un polynôme P tel que $A = P(B)$.

696. a) Déterminer la borne inférieure des $\lambda \in \mathbb{R}^+$tels que :

$\forall A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \operatorname{tr}(A^2) \leqslant \lambda \operatorname{tr}\left(AA^{\mathrm{T}}\right)$.

b) Déterminer la borne inférieure des $\lambda \in \mathbb{R}^+$tels que :

$\forall A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), |\det(A)| \leqslant \lambda \operatorname{tr}\left(AA^{\mathrm{T}}\right)$.

c) Généraliser ces résultats à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour le second point, on comparera $|\det(A)|^{\frac{2}{n}}$ à $\operatorname{tr}\left(AA^{\mathrm{T}}\right)$.

Voir monnier 642

Sol sur cahier jaune 2023.

697. Soient E un espace euclidien, $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $u : x \in E \mapsto \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k$.

a) Montrer que u est un endomorphisme symétrique de E.

b) Vérifier que $\operatorname{Sp}(u) \subset \mathbb{R}^{+*}$.

c) En déduire qu'il existe un automorphisme symétrique v de E tel que $u^{-1} = v^2$.

Est-il unique ?

d) Soit v un tel automorphisme.

Montrer que $(v(e_1), \ldots, v(e_n))$ est une base orthonormée de E.

Sol : a) Calcul quantifié facile, $< x, f(y) >= \sum_{1}^{n} < e_k, x >< e_k, y >=< y, f(x) >$.

b) Pour x vp, $< f(x), x >= \lambda < x, x >= \sum_{1}^{n} < e_k, x >^2 \geqslant 0$.

Mais si $\lambda = 0$ on obtient $\forall k, < e_k, x >= 0$, donc $x = 0$, non.

c) u est dz en bon car symétrique réel.

$u \sim diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, les vp sont positives.

Il suffit par exemple de prendre $v = diag(1/\sqrt{\lambda_1}, ..., 1/\sqrt{\lambda_n})$ dans la même base.

Rq : il est bien symétrique car sa matrice l'est en Bon, inversible aussi par det.

Pas d'unicité , $-v$ fonctionne.

d) Soit un candidat, comme u autom, soient des $(u_j)_1^n$ des antécédents des $(e_j)_1^n$.

Par sym de v, $< v(e_j), v(e_i) >=< (e_j), v^2(e_i) >=< (e_j), u^{-1}(e_i) >=< (e_j), (f_i) >$.

Or $u(u_j) = e_j$, donc $\sum_{1}^{n} < e_k, u_j > e_k = e_j$.

On peut identifier sur la base, $< e_k, u_j >= \delta_j^k$.

Il vient $< v(e_j), v(e_i) >= \delta_j^i$, avec le bon cardinal, BON.

Sol voir ddl 98.

698. Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $A = \frac{1}{2}\left(M + M^T\right)$.

Soient λ_1 et λ_n la plus petite et la plus grande valeur propre de A.

Montrer que toute valeur propre réelle λ de M vérifie $\lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_n$.

Sol : A est dz en bon, $A = \Omega D \Omega^T$ car $\Omega \in \mathcal{O}_n$.

Pour λ vp de M et X vp associé, $MX = \lambda X$.

$X^T AX = \frac{1}{2}(X^T(AX) + (AX)^T X) = \lambda X^T X$.

Dans $X^T AX = (\Omega^t X)^T D(\Omega^T X)$, on traduit en coordonnées, on encadre les vp.

Bref $\lambda_1 X^T X \leqslant X^T AX \leqslant \lambda_n X^T X$.

Voir monnier 6418

699. Dans un espace euclidien E, soient p et q deux projecteurs orthogonaux,

respectivement sur des sous-espaces F et G.

a) Montrer que $p \circ q \circ p$ est un endomorphisme symétrique.

b) Montrer que E est la somme orthogonale de $\mathrm{Im}(p) + \mathrm{Ker}(q)$ et de $\mathrm{Im}(q) \cap \mathrm{Ker}(p)$.

c) Montrer que $p \circ q$ est diagonalisable.

Sol : Bel exo, des révisons en tous genres et du neuf.

a) P et Q projecteurs orthogonaux donc sym en BON (spectral).

Ds cette bon $(PQP)^T = P^TQ^TP^T = PQP$ c'est symétrique et

donc DZ pour la suite...Mais...

b) Révisions de première année...ou exo 5 Feuille 10.

$(A+B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$, c'est exactement notre situation.

Cf $(\ker P)^\perp = Im(P)$ car proj orthogonale.

Mais nous sommes de dim finie donc $(A+B)\bigoplus(A+B)^\perp = E$.

c) Attention à ne pas écrire que PQ est symétrique,

ça n'a aucune raision d'être vrai, il faudrait $PQ = QP$...

Il faut se servir de la question a).

On regarde la matrice de PQ dans une bon adaptée à b)

Il en sort $\left(\begin{array}{c|c} H & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$, car quand on applique PQ à un vecteur de $\mathrm{Im}(q)\cap\mathrm{Ker}(p)$,

le Q ne change rien car on n'est dans l'image du projecteur Q et le P intervient

alors dans le noyau de P.

Le premier sev de gauche est stable par PQ car $Im(PQ) \subset Im(P) \subset Im(P) + \ker(Q)$.

Regardons en détail H.

Par cours de première année (Grassmann) ou exo 11 fauille 2,

$A + B = (A\cap B)\bigoplus A' \bigoplus B'$, avec A' (resp B') suppl de $(A\cap B)$ dans A.

Dans un BOn adaptée à cette somme , on arrive à

$\left(\begin{array}{c|c|c} 0 & H_1 & 0 \\ \hline 0 & H_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ car ce qui est ds le noyau de Q est annulé par Q et $Im(P)$ stable par PQ.

La matrice $\left(\begin{array}{c|c} 0 & H_1 \\ \hline 0 & H_2 \end{array}\right)$ représente donc la matrice de la restriction de PQ à $Im(P)$.

Et voilà la feinte, elle n'est pas forcément symétrique mais c'est la restriction

d'un endo dz, donc dz (cours réduction p 28).

Et oui, dans $Im(P)$, $PQ = PQP$ (dz par a).

Voir aussi exos 45.46.47 ddl spe.

Analyse

700. Pour $x \in \mathbb{R}$, déterminer la limite de $\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$ quand n tend vers l'infini.

En déduire, pour $z \in \mathbb{C}$, la limite de $\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n$ quand n tend vers $+\infty$.

Sol : Fait en cours.

701. Soient $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ tels que Q ne s'annule pas sur $\mathbb{N}$.

Étudier la convergence de la série de terme général $(-1)^n \dfrac{P(n)}{Q(n)}$.

Sol : Facile, on regarde les degrés respectifs,

tous les cas sont clairs sauf $deg(P) = deg(Q) - 1$.

On fait un dl simple, deux morceaux, un cssa, l'autre abs cvte.

702. Soit $\alpha > 1$. On pose, pour $n \geqslant 2, u_n = \dfrac{1}{(n+1)^\alpha} + \dfrac{1}{(n-1)^\alpha} - \dfrac{2}{n^\alpha}$.

a) Montrer la convergence de la série $\sum u_n$ puis calculer la somme S de cette série.

b) On pose, pour $n \geqslant 2, S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} u_k$.

Montrer que $S_n = 1 + \dfrac{1}{2^\alpha} + \dfrac{1}{(n+1)^\alpha} - \dfrac{1}{n^\alpha}$.

c) Trouver un équivalent de $R_n = S - S_n$.

703. Soit, pour $n \in \mathbb{N}, u_n = \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}$.

Déterminer les couples $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ pour lesquels la série de terme u_n soit convergente.

Déterminer alors la somme de cette série.

704. a) Soit $n \geqslant 1$. Montrer que les intégrales $\displaystyle\int_0^\pi \frac{1}{1+\cos^2(nx)}\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^\pi \frac{1}{1+\cos^2(x)}\mathrm{d}x$ sont égales puis déterminer leur valeur.

b) Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,\pi],\mathbb{R})$. Déterminer la limite de $\displaystyle\left(\int_0^\pi \frac{f(x)}{1+\cos^2(nx)}\mathrm{d}x\right)_{n\geqslant 1}$.

705. On considère une fonction y de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^+$dans $\mathbb{R}$.

a) Donner une primitive de $y^2-(y')^2+(y'')^2-(y+y'+y'')^2$.

b) Montrer que la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} y^2$ et de $\displaystyle\int_0^{+\infty} (y'')^2$

implique celle de $\displaystyle\int_0^{+\infty} yy'$ et de $\displaystyle\int_0^{+\infty} (y')^2$.

c) Montrer que la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} y^2$ et de $\displaystyle\int_0^{+\infty} (y'')^2$ implique l'inégalité :

$\displaystyle\int_0^{+\infty} y'^2 \leqslant \int_0^{+\infty} y^2 + \int_0^{+\infty} y''^2$.

Sol : a) Oui, ça servira à la troisième question.

Il y a un téléscopage, la primitive est $y^2+(y')^2+2yy' = -(y+y')^2$.

b) On fait une IPP sur $\displaystyle\int_0^x (y')^2 = [yy']_0^x - \int_0^x yy"$.

La dernière intégrale possède une limite car y et $y"$ sont de carrés intégrables.

Le classique $|yy"| \leqslant y^2+(y")^2(***)$.

Or, celle de gauche à un comportement croissant donc yy' possède une limite (evt infinie).

Mais (*) $\displaystyle\int_0^x yy' = (y^2(x)-y^2(0))/2$. Donc si yy' tend vers autre chose que 0,

y^2 tend vers l'infini, ce qui contredit son aspect intégrable.

Ainsi $\lim\limits_{\infty}(yy') = 0$.

On reporte dans l'ipp, y' est de carré intégrable.

Là, on n'a que la limite nulle en l'infini de yy' pas son aspect intégrable.

Je pense qu'il y a une erreur d'énoncé car, ça ne sert à rien ds l'exo et

surtout pas ds cet ordre, voir plus loin, mais ...

c) Grâce à la première question,

$$(**)\int_0^x (y^2-(y')^2+(y")^2) = \int_0^x (y+y'+y")^2+(y+y')^2(0)-2(y+y')^2(x).$$

Là , je viens de comprendre, l'interrogateur est ...

La convergence de l'intégrale de yy' est équivalente à une limite de y^2 en l'infini(*).

Qui ne pourrait être que 0 car y est de carré intégrable.

On aurait yy' et y^2 de limite nulle, si c'est le cas pour y' aussi,

le morceau négatif d'avant va tendre vers 0.

Et notre objet (**) devient la limite d'un objet positif plus un $o(1)$.

Or il a été établi convergeant. L'inégalité demandée en résulte.

On va débloquer ce qui manque, nous avons yy' de limite nulle donc y^2

a une dérivée de limite nulle et est intégrable.

On va prouver qu'elle tend vers 0, on traduit par l'abs que $g=f^2$ ne tend pas vers 0,

$\exists\varepsilon>0/\forall n\in\mathbb{N},\exists x_n>n,|g(x_n)|>\varepsilon.$

On prend des n assez grands pour que la dérivée soit aussi dominée par ε.

Sur le segment $[x_n,x_n+0.5]$, g dépasse $\varepsilon/2$ par inégalité accroissements finis.

$\displaystyle\int_{x_n}^{x_n+0.5} g \geqslant \varepsilon/4$. Mais les $\varepsilon/4$ s'additionnent de n en n.

L'intégrale de g explose, or elle est intégrable...

Pour $(y')^2$ tendant vers 0, je choisis un autre chemin, par (***)

$y'y"$ est intégrable puisque y' et $y"$ sont de carrés intégrables.

Et $\displaystyle\int_0^x y'y" = ((y')^2(x) - (y')^2(0))/2$.

Donc $(y')^2$ a une limite en l'infini, qui ne peut être que 0.

Je crois que tout y est, on peut certainement faire plus simple...

Rq complémentaire : Avec des hypothèses similaires sur $\mathbb{R}$,

On peut obtenir : $\displaystyle\left(\int_{\mathbb{R}} (y')^2\right)^2 \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}} (y)^2\right)\left(\int_{\mathbb{R}} (y'')^2\right)$.

Sol : Par copier coller de notre méthode $\displaystyle\int_{-\infty}^0 (y')^2 = -y'(0)y(0) + \int_{-\infty}^0 yy"$.

On en déduit : $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} (y')^2 = -\int_{\mathbb{R}} yy"$.

On applique C-S.

706. Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\left(x^n + \left(\frac{-x}{1-x}\right)^n\right)$.

Déterminer le domaine de définition D de f puis calculer $f(x)$ pour $x \in D$.

707. Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-(nx)^2}$.

a) Déterminer le domaine de définition puis étudier la continuité de f.

b) Préciser la limite de f en $+\infty$.

c) Exhiber un équivalent simple de f en 0 .

708. Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \ln\left(1 + e^{-nx}\right)$.

a) Déterminer le domaine de définition D de f.

Montrer que f est continue et décroissante sur D.

b) Montrer que f admet une limite finie en $+\infty$ que l'on déterminera.

c) Déterminer un équivalent de f en 0 en admettant que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

709. On considère une série entière $\sum a_n z^n$, de rayon de convergence $R > 0$.

a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum \frac{a_n}{n!} z^n$.

b) On pose $b_n = \dfrac{a_n}{1 + |a_n|}$.

i) Montrer que la la série entière $\displaystyle\sum_n b_n z^n$ a un rayon de convergence $R' \geqslant 1$.

ii) Déterminer R' en fonction de R.

710. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que A admet trois valeurs propres distinctes,

que l'on ne calculera pas mais dont on déterminera les parties entières.

b) Déterminer le rayon de convergence de $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{tr}(A^n)\, x^n$ et calculer sa somme.

Sol Jmf 2 fois.

2. Par hypothèse, on a $\operatorname{tr}\left(A^k\right) = 0$ pour tout $k \geqslant 1$.

Le rayon de $\sum \operatorname{tr}\left(A^k\right) z^k$ est $R = +\infty$.

Par l'absurde supposons que A admette des valeurs propres distinctes de 0 .

On les note $a_1, \ldots, a_p$ avec $0 < |a_1| \leqslant \ldots \leqslant |a_p|$.

On note $m_1, \ldots, m_p$ leurs multiplicités respectives.

La série $\sum \operatorname{tr}\left(A^k\right) x^k$ est la somme des $\sum m_i a_i^k x^k$ (pour $1 \leqslant i \leqslant p$).

Leurs rayons respectifs sont $\frac{1}{|a_1|} \geqslant \cdots \geqslant \frac{1}{|a_p|}$.

Pour $|x| < \frac{1}{|a_p|}$, on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \operatorname{tr}\left(A^k\right) x^k = \sum_{i=1}^{p} m_i \sum_{k=0}^{+\infty} (a_i x)^k = \sum_{i=1}^{p} \frac{m_i}{1 - x a_i}$$

Le rayon R est donc inférieur ou égal $\dfrac{1}{|a_p|}$, ce qui est absurde.

En conclusion, A n'a que la valeur propre nulle et on conclut comme en (1).

penser à P'/P...

Mais aussi

Il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure telles que $A = PTP^{-1}$.

Les coefficients diagonaux de T sont les valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de T.

Pour tout k de $\mathbb{N}$, on a alors : $A^k = PT^kP^{-1}$, donc $\operatorname{tr}\left(A^k\right) = \operatorname{tr}\left(T^k\right)$.

De plus T^k est triangulaire supérieure de coefficients diagonaux $\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k$.

Ainsi $\operatorname{tr}\left(A^k\right) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^k$,

et $\sum \operatorname{tr}\left(A^k\right) z^k$ est la somme des séries entières $\sum \lambda_j^k z^k$.

Le rayon de $\sum \lambda_j^k z^k$ est $R_j = \dfrac{1}{|\lambda_j|}$

(en posant $R_j = +\infty$ si $\lambda_j = 0$).

De plus : $\forall z \in D\left(0, R_j\right), \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_j^k z^k = \frac{1}{1 - \lambda_j z}$.

Enfin la série somme des $\sum \lambda_j^k z^k$ a pour rayon $R \geqslant \min\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} R_j$.

Pour tout z tel que $|z| < R$, on a alors :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \operatorname{tr}\left(A^k\right) z^k = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{1 - \lambda_j z}$$

Bien sûr si tous les $\lambda_i = 0$ (A est nilpotente) alors $R = +\infty$.

Dans ce cas, on a alors :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \sum_{k=0}^{+\infty} \operatorname{tr}\left(A^k\right) z^k = \operatorname{tr}\left(I_n\right) = n$$

Dans le cas général, soit $m_1, \cdots, m_r$ les multiplicités respectives de $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$.

Avec ces notations : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \operatorname{tr}\left(A^k\right) z^k = \sum_{j=1}^{r} \frac{m_j}{1-\lambda_j z}$.

Le rayon de convergence est alors exactement :

$$R = \min_{1 \leqslant j \leqslant n} \frac{1}{|\lambda_j|} = \frac{1}{\max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} (|\lambda_j|)}$$

En effet si par exemple λ_1 est valeur propre de module maximum,

alors $\dfrac{m_1}{1-\lambda_1 z}$ n'est pas borné au voisinage de $\dfrac{1}{\lambda_1}$

alors que les autres termes de la somme sont bornés sur ce voisinage.

Terminons par une expression de la somme en fonction du polynôme caractéristique :

On a $\chi_A = \displaystyle\prod_{j=1}^{r} (X-\lambda_j)^{m_j}$.

Ainsi $\dfrac{\chi_A'(z)}{\chi_A(z)} = \displaystyle\sum_{j=1}^{r} \frac{m_j}{z-\lambda_j}$.

On peut donc écrire :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \operatorname{tr}\left(A^k\right) z^k = \frac{1}{z} \frac{\chi_A'(1/z)}{\chi_A(1/z)}$$

711. Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes définie par

$T_0 = 1, T_1 = X$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$.

a) Montrer que, pour tout $x \in [-1,1], T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$.

b) Calculer, pour $(p,n)\in\mathbb{N}^2, I_{p,n}=\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{T_p(y)T_n(y)}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y$.

c) Montrer que, pour tout x tel que $|x|\geqslant 1$, on a

$$2T_n(x)=\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n+\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n$$

d) Déterminer, pour $|x|\geqslant 1$, le rayon de convergence de la série entière $\sum T_n(x)z^n$, puis donner la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}T_n(x)z^n$.

712. a) Montrer que la fonction $f : x\mapsto \dfrac{1}{\cos x}$ est dse au voisinage de 0.

b) Encadrer son rayon de convergence entre deux réels strictement positifs.

713. Soit (a_n) la suite définie par $a_0=1, a_1=0$, et pour $n\in\mathbb{N}, a_{n+2}=(n+1)\,(a_n+a_{n+1})$.

a) Montrer que, pour tout $n\geqslant 2, (n-2)\,!\leqslant a_n\leqslant n\,!$.

b) En déduire le rayon de convergence R de la série entière $S : x\mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n!}x^n$.

c) Montrer que, pour tout $x\in]-R,R\,[, (1-x)S'(x)-xS(x)=0$.

d) En déduire S.

714. Soit $n\in\mathbb{N}$. On s'intéresse aux chemins permettant de rejoindre le point de coordonnées (n,n) en partant de $(0,0)$ et en ne se déplaçant que d'une unité vers la droite ou vers le haut. a) Calculer le nombre de chemins possibles.

b) Soit d_n le nombre de chemins où, à chaque instant, on se trouve au-dessus de la diagonale, au sens large. On pose $d_0=1$. Vérifiez que $d_1=1, d_2=3, d_3=5$.

c) Démontrer que $d_{n+1}=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}d_kd_{n-k}$.

Ind. Considérer B_k, le nombre des chemins où la première rencontre avec la diagonale (hors en $(0,0)$) se fait en position (k,k).

d) Démontrer que $0\leqslant d_n\leqslant\begin{pmatrix}2n\\ n\end{pmatrix}$.

En déduire un minoration du rayon de convergence de $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n x^n$.

e) Montrer que : $\forall x \in]-R, R\left[\backslash\{0\}, \exists \varepsilon(x) \in \{-1,1\}, f(x) = \dfrac{1+\varepsilon(x)\sqrt{1-4x}}{2x}\right.$.

En déduire d_n pour tout entier naturel n.

715. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(nt)}{(1+n^4t^2)^2}\,\mathrm{d}t$.

a) Justifier l'existence de I_n.

b) Déterminer la limite de (I_n) ; donner un équivalent de I_n.

Sol : a)facile arctant est bornée.

b) I_n tend vers 0 par cv dominée naturelle , arctan bornée par $\pi/2$ et $\varphi(t) = \dfrac{1}{(1+t^2)^2}$.

Pour l'équivalent il faut être malin, chgt à justifier $u = n^2 t$.

On arrive à $\displaystyle\frac{1}{n^3}\int_0^{\infty} \frac{n.\arctan(u/n)}{(1+u^2)^2} du$.

On termine par primitive naturelle.

716. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Déterminer le domaine de définition D de la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin^2(nt)}{\sin(t)}$.

b) Montrer que, pour tout $t \in D$, $\dfrac{\sin^2(nt)}{\sin(t)} = \sin(t) + \sin(3t) + \cdots + \sin((2n-1)t)$.

c) En déduire que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(nt)}{\sin(t)} dt \sim \frac{1}{2}\ln n$.

717. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{n+1}\ln t}{1-t^2}\,\mathrm{d}t$.

a) Justifier la convergence de I_n. Exprimer I_n sous forme de somme.

b) Déterminer un équivalent de I_n.

Sol : Classique , on développe $\dfrac{1}{1-t^2}$ en séries, on inverse par Fubini.

$\displaystyle\int_0^1 t^s \ln(t)dt = -\frac{1}{(s+1)^2}$. A justifier.

On arrive à $\displaystyle -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2k+2)^2}$, oui !

On termine par comparaison série intégrale (équivalent reste série Riemann cvte).

On fait un dessin, gign , sur les bords $\displaystyle\frac{1}{2}\int_n^{\infty} \frac{1}{t^2}$.

718. Soit $\displaystyle F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} e^{-xt} \, \mathrm{d}t$.

Déterminer le domaine de définition, de continuité, de dérivabilité de F. Calculer F.

719. Soient $\displaystyle f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} \, \mathrm{d}t$ et $\displaystyle g : x \mapsto \cos(x) \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, \mathrm{d}t - \sin(x) \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t} \, \mathrm{d}t$.

a) Justifier que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t} \, \mathrm{d}t$ convergent.

b) Montrer que f et g sont solutions sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle $y'' + y = \dfrac{1}{x}$.

c) En déduire que $f = g$ puis déterminer la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, \mathrm{d}t$.

Sol : Feuille 8 exo 9.

720. a) Justifier l'existence de $\displaystyle\Delta = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \, \mathrm{d}t$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier la convergence de $\displaystyle I_n = \int_0^{+\infty} t^{2n} e^{-t^2} \, \mathrm{d}t$.

Exprimer I_n en fonction de Δ.

c) Soit $\displaystyle F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \cos(xt) e^{-t^2} \, \mathrm{d}t$.

Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$. Donner une expression de $F(x)$ en utilisant b).

d) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$. Retrouver le résultat de la question c).

721. Soit ρ une application continue sur $[0, 1]$, à valeurs strictement positives.

On pose $\displaystyle F : \mu \mapsto \int_0^1 \rho(t)^{\mu} \mathrm{d}t$.

a) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et préciser $F'(0)$.

b) Déterminer la limite de $F(\mu)^{1/\mu}$ quand μ tend vers 0 .

c) Vérifier directement la validité de ce résultat pour $\rho(t) = \exp(\alpha t)$.

722. Pour $x > 0$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \ln(t) \ln(1 - t^x)\, \mathrm{d}t$.

a) Montrer que f est correctement définie.

b) Exprimer $f(x)$ sous forme de la somme d'une série de fonctions.

c) Donner un équivalent de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$. On admettra : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

723. a) Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{e^t - 1}\, \mathrm{d}t$ est bien définie.

a) On admet que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Montrer que $I = \displaystyle\frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$.

724. Soient $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{1 - e^{-\sqrt{t}}}\, \mathrm{d}t$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t e^{-nt}\, \mathrm{d}t$.

a) Justifier la définition et calculer I_n.

b) Justifier la définition de I et donner sa valeur.

725. On considère $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{n+1} \ln t}{1 - t^2}\, \mathrm{d}t$.

a) Montrer que cette intégrale est cvte, puis l'écrire sous forme de somme d'une série.

b) En déduire un équivalent de I_n lorsque $n \to +\infty$.

Sol cf 717.

726. Déterminer les couples $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1 + t^b}\, \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{a + kb}$.

Voir exo ♡♡♡♡.

727. Soit $n \in \mathbb{N}$. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $xy' - ny = 0$.

728. Résoudre l'équation différentielle $xy'' - y' + 4x^3y = 0$ sur $\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R}^{-*}$, puis sur $\mathbb{R}$.

729. Déterminer les extrémums de $(x, y) \mapsto y\,(x^2 + (\ln y)^2)$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$.

Sol feuille 12 exo 16.

Probabilités

730. Soit $(X_k)_{k \geqslant 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires suivant la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. On pose $S_0 = 0$ et, pour $n \geqslant 1, S_n = X_1 + \cdots + X_n$; ainsi, S_n définit la position après n déplacements d'une marche aléatoire sur l'axe des entiers relatifs, en commençant en 0 . Déterminer $\mathbf{P}\,(S_n = 0)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, puis un équivalent quand n tend vers l'infini.

731. Soient a et n deux entiers naturels. On considère an clients qui choisissent chacun un fournisseur. Il y a n fournisseurs et ils sont choisis au hasard. Soit X_i la variable aléatoire associée au nombre de clients du fournisseur i. Soit Y la variable associée au nombre de fournisseurs qui n'ont pas de clients.

a) Donner la loi, l'espérance et la variance de X_i.

b) Calculer $\mathrm{Cov}\,(X_1 + X_2 + \cdots + X_n, X_i)$.

En déduire $\mathbf{E}\,(X_jX_i)$ et $\mathrm{Cov}\,(X_j, X_i)$.

Calculer le coefficient de corrélation de X_j et X_i pour $i \neq j$.

c) Calculer l'espérance et la variance de Y.

732. Soient deux variables aléatoires indépendantes X et Y suivant respectivement des lois géométriques de paramètres p_1 et p_2.

a) Déterminer la probabilité pour que la matrice $\begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

b) Soit Z une troisième variable aléatoire, suivant la loi de Bernoulli de paramètre q.

Ces trois variables aléatoires étant supposées mutuellement indépendantes,

déterminer la probabilité pour que la matrice $\begin{pmatrix} X & Z \\ 0 & Y \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

733. Soient A et B deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Déterminer la probabilité que toutes les solutions de l'équation différentielle $y'' + (A-1)y' + By = 0$ tendent vers 0 en $+\infty$.

Sol voir Mines 19 à la fin.

734. Soient $p \in]0,1[$ et $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires suivant la loi géométrique de paramètre p.

a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $Y_n = \min(X_1, \dots, X_n)$.

Déterminer la loi, puis l'espérance, de Y_n.

b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $Z_n = \max(X_1, \dots, X_n)$.

Déterminer la loi de Z_n, puis un équivalent de $\mathbf{E}(Z_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Voir feuille proba III ? ?

735. Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes, centrées, ayant un moment d'ordre $2, \sigma_1, \dots, \sigma_n$ leurs écarts-types et $\sigma = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2}$.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$.

Soient $\varepsilon > 0$ et, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $A_k^\varepsilon = (|S_k| \geqslant \varepsilon) \bigcap_{1\leqslant i<k} (|S_i| < \varepsilon)$.

a) Exprimer l'événement $\left(\max_{i\leqslant k} |S_i| \geqslant \varepsilon\right)$ en fonction des A_k^ε.

b) Montrer que $\mathbf{E}\left((S_n - S_k)^2 \mathbf{1}_{A_k^\varepsilon}\right) = \mathbf{E}\left(S_n^2 \mathbf{1}_{A_k^\varepsilon}\right) - \mathbf{E}\left(S_k^2 \mathbf{1}_{A_k^\varepsilon}\right)$.

Ind. Considérer $\mathbf{E}\left((S_n - S_k) S_k \mathbf{1}_{A_k^\varepsilon}\right)$.

c) En déduire que $\mathbf{P}\left(\max_{i\leqslant n} |S_i| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \dfrac{n\sigma^2}{\varepsilon^2}$.

d) Comparer ce résultat avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebytchev.

Voir 688 695 jmf.

Mettre exos comatrices JMF...

Exos retournés de 2022

Ens Cachan Pottier :

Soit $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R})$ telle que $\displaystyle\lim_{\|x\| \to +\infty} \frac{|u(x)|}{\|x\|} = +\infty$.

$\mathcal{B}_r = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x\| < r\}$.

On veut montrer que ∇u est surjectif.

1) Si $n = 1$ est-ce le cas ?

2) On suppose $n = 2$ et par l'absurde , ∇u n'est pas surjectif.

• Montrer l'existence de f et $c \in \mathbb{R}^2$ tels que

$f(x) = u(x) - < x, c >$ où ∇f ne s'annule pas .

• Montrer que $\displaystyle\lim_{\|x\| \to +\infty} \frac{|u(x)|}{\|x\|} = +\infty$.

Toujours $n = 2$.

3) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \backslash \mathcal{B}_r$, montrer qu'il existe $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2 \backslash \mathcal{B}_r$

tels que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$ avec γ continue.

En déduire que $f(\mathbb{R}^2 \backslash \mathcal{B}_r)$ est un intervalle.

4) Toujours $n = 2$.

Montrer qu'il existe $(x_p) \in (\mathbb{R}^2 \backslash \mathcal{B}_r)^{\mathbb{N}}$ telle que (incohérent) :

$\displaystyle\sup_{\|x\| \geqslant r} f(x) - \frac{1}{p+1} \leqslant f(x_p) \leqslant \sup_{\|x\| \geqslant r} f(x)$.

5) Toujours $n = 2$.

Montrer que $f(\mathbb{R}^2 \backslash \mathcal{B}_r) = \mathbb{R}$.

6) Toujours $n = 2$.

Montrer que il existe $(u_p) \in \mathbb{R}^2$ telle que $\forall p \in \mathbb{N}, f(u_p) = 0$ et $\|u_p\| \to +\infty$.

Conclure.

Mines Pottier : 15 mn préparation.

Exo 1 :

Sur $]-1, 1[$, $\varphi(x) = \arcsin^2(x)$.

Ceci est une question de cours : p 18 du vôtre.

1) Montrer que φ DSE sur un ensemble à déterminer.

2)Trouver une équa diff vérifiée par φ, en déduire le DSE.

Exo 2 : Très proche du cours.

Soit $\psi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$, $\psi(P) = (1 - X^2)P" - 2XP'$, muni du ps $(P, Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} PQ(t)dt$.

1) Endomorphisme ?

2) Soient P_1, P_2 des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes.

Montrer qu'ils sont orthogonaux.

3) Signe des valeurs propres ?

4) Soit ψ_n la restriction à $\mathbb{R}_n[X]$, endomorphisme.

5) ψ_n DZ ?

6) Soit $P_i = (1 - X^2)^i$, et $Q_i = P_i^{(i)}$.

Mq $(Q_0, ..., Q_n)$ est une bon de DZ.

7) $\|Q_n\|^2$?

Sol :

1) Bien sûr, on envoie un polynôme sur un polynôme et la linéarité de la dérivation

fait le reste, rq le produit scalaire est dans le cours.

Rq utile : $\psi(P) = (1 - X^2)P" - 2XP' = ((1 - X^2)P')'$.

2) L'endo est symétrique (**) (pas encore sa matrice) car :

$\forall (P, Q) \in E^2, (\psi(P), Q) = (\psi(Q), P) = \displaystyle\int_{-1}^{1} (t^2 - 1)P'Q'(t)dt$, ceci directement par IPP.

Donc $((\psi(P_1), P_2) = \lambda_1(P_1, P_2) = \lambda_2(P_1, P_2) \Rightarrow (P_1, P_2) = 0$.

3) Attention à l'ordre des questions, ici pas encore de restriction comme au 4,

donc pas question de regarder la matrice ds la base canonique.

On prend un polynôme normalisé de degré s qui est vecteur propre associé à la vp λ,

on identifie les coeff dominants.

Il en sort $\lambda = -s(s + 1) \leqslant 0$.

4) La linéarité est conservée, seul le problème du degré se pose, aucun problème,

les degrés baissent ou stagnent.

5) Bien sûr, car en bon la matrice sera symétrique (**), donc thm spectral.

Rq : on aurait pu regarder ds la base canonique,

matrice triangulaire sup, vp 2 à 2 distinctes...

6) On a bien sûr reconnu les polynômes de Legendre

(certainement vus en sup dm ou ds ou td).

Je donne les idées considérées comme classiques.

Le degré de Q_i est i.

Séparons les pbs ;

– Vecteurs propres ?

Il est immédiat par dérivation que $(1-X^2)P_i' = -2iXP_i$.

On dérive $i+1$ fois par la formule de Leibniz de chaque côté.

Les sommes s'arrêtent à 2 et 1, on range, surprise !

$\psi(Q_i) = -i(i+1)Q_i$.

– Orthogonalité ?

Rq : énoncé étourdi , base orthogonalle de vp mais pas encore normée (voir 7).

On écrit $\displaystyle\int_{-1}^{1} (P_i)^{(i)}.(P_j)^{(j)}$, $i > j$.

On enchaine les ipp , les crochets sont nuls car $1, -1$ sont racines d'ordre i de P_i.

Donc si on dérive moins de i fois elles restent racines.

On arrive à 0 car le petit polynôme disparait...

Rq : bons degrés et bon cardinal.

7) On trouve $\|Q_n\|^2 = \dfrac{2}{2n+1}.4^n(n!)^2$.

On utilise les mêmes IPP qu'avant et $(Q_n)^n = (-1)^n.\dfrac{(2n)!}{n!.2^n}$.

Rq : j'ai peut-être écrit une étourderie mais je suis certain que le plan fonctionne !

Mines-Ponts : Vermel.

Exo 1 : Presque du cours.

Soit $(E, \|\|)$ un plan euclidien et (u, v) une base (unitaire) de E.

1) Montrer que : $\exists\theta \in]0, \pi[/(u, v) = \cos(\theta)$.

2) Soient $i = \dfrac{u+v}{\|u+v\|}$ et $j = \dfrac{u-v}{\|u-v\|}$, montrer que c'est une bon.

Exprimer (i, j) en fonction de θ.

3) Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ défini par : $\varphi(x) = \lambda(x|u)u + \mu(x|v)v$.

A quelles conditions sur (λ, μ) , φ est-il un automorphisme orthogonal.

Exo 2 : typé MPSI...

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des bijections de $[\![1, n]\!]$ dans lui même.

Soit $\mathcal{D}_n = \{\sigma \in \mathcal{S}_n / \forall i \in [\![1, n]\!], \sigma(i) \neq i\}$, $d_n = card(\mathcal{D}_n)$.

1) Calcul de d_1, d_2, d_3.

2) En supposant que $\forall n \geqslant 3, d_n = (n-1)(d_{n-1} + d_{n-2})$.

Montrer que $\forall n \geqslant 1, d_n = (n!) \displaystyle\sum_{2}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

3) On prend σ au hasard dans $\mathcal{S}_n$.

Soit $E_n(k)$, l'événement "σ admet exactement k points fixes".

Exprimer $\mathcal{P}(E_n(k))$ en fct des d_i.

4) Prouver ce qui a été admis.

Sol : exo 1 :

1) On applique Cauchy-Schwarz, inégalité stricte car famille libre.

Ce nombre entre -1 et 1 au sens strict est donc le cosinus d'un angle entre $]0, \pi[$.

2) Par bilinéarité et normes 1 $(u + v, u - v) = 0$, orthogonalité.

Ils sont naturellement normés.

Par trigonométrie (angle double) $\|u + v\| = 2\cos(\theta/2)$.

$\|u - v\| = 2\sin(\theta/2)$, aucun pb de signe tout facilement positif !

3) φ clairement linéaire de E vers E.

On utilise la bon précédente car automorphisme orthogonal

équivalent à envoyer une bon sur une bon.

On traduit l'orthogonalité de $\varphi(i)$ et $\varphi(j)$.

Par bilinéarité il sort $\lambda = \pm\mu$.

Pour finir, on traduit $\|\varphi(i)\| = 1$ et $\|\varphi(j)\| = 1$.

On étudie séparément les deux cas $\lambda = \mu$ et $\lambda = -\mu$.

On remplace, on simplifie, il vient ds le premier cas :

$\lambda = \mu = \pm 1$ et $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, c'est $\pm Id$.

Sinon, même idée avec un peu plus de calculs.

Il vient $\lambda = \pm\dfrac{1}{\sin(\theta)}$.

En remplaçant, ce sont des symétries orthogonales par rapport aux premières

et deuxièmes bissectrices ds la bon (i, j).

Exo 2 :

1) Immédiat : $d_1 = 0$, $d_2 = 1$ (la seule transposition) ,

$d_3 = 2$ car les transpositions ont un pt fixe et l'identité 3 , il reste les 3 cycles.

2) On procède par récurrence forte.

$d_{n+1} = n(d_n + d_{n-1})$.

On remplace, on range, on fait apparaître les termes manquants qui finissent

par se téléscoper, calcul simple.

3) Il y a $\dbinom{n}{k}$ façons séparées et équiprobables de choisir les invariants.

Il reste donc à déranger les $n - k$ restants.

Toutes ces situations sont équiprobables.

Donc $\mathcal{P}(E_n(k)) = \dfrac{1}{n!}\dbinom{n}{k} d_{n-k}$.

Car $n!$ bijections équiprobables dans $\mathcal{S}_n$.

4) Là ce n'est pas si simple...

On sépare suivant les $n-1$ images possibles de n, on la nomme $a \neq n$.

On resépare suivant l'image de a, si c'est n il reste exactement $n-2$ éléments à déranger.

Sinon , on "oublie" n et on "voit" un dérangement des $n-1$ qui précèdent en imaginant que le n du bas est remplacé par a.

Meslin : Centrale 2.

E ensemble des fonctions continues bornées sur $\mathbb{R}$.

Pour $f \in E$, $N_0(f) = \sup\limits_{\mathbb{R}}(f)$ et $\Phi(f)(x) = \displaystyle\int_0^{\infty} \arctan(tx).\frac{f(t)}{1+t^2}dt$.

1) Mq Φ endomorphisme de E.

2) Soit $f \in E$, mq $\Phi(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_*^+$.

3)a) Info Python : Tracer $g = \Phi(f_0)$ sur $[0,5]$, où $f_0 : x \mapsto 1$.

Conjecturer $\lim\limits_{\infty} g(x)$, puis la cacluler.

b) Mq g est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_*^+$, calculer g'.

c) Info Python : Regarder $g(x) + g\left(\dfrac{1}{x}\right)$ sur Python.

Calculer $g(x) + g\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

4) En déduire $\displaystyle\sum_0^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Meslin : Centrale 1.

Soit $d_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec $d_A(M) = MA$.

Soit $g_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec $d_A(M) = AM$.

Soit $\Phi_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec $d_A(M) = AM - MA$.

1) Mq que Φ_A est un endomorphisme non injectif de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Déterminer son rang lorsque $A = diag(1, 2, ..., n)$.

2) $\psi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$., $B \longmapsto \Phi_B$.

Montrer que ψ est linéaire et donner son noyau.

3) On suppose qu'il existe une puissance s telle que $A^s = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

Montrer que $(\Phi_A)^\beta$ est nulle à partir d'une certaine puissance.

Sol sur demande .

Sol : Alerte rouge, exo tombé tous les ans (entre autre Dorian M).

Deux élèves seront désignés et je relirai avec grand soin !

Codes Python revus sur le cahier de prépa 2022-2023.

Sol : a) Attention à la continuité de l'image, continuité intégrales à paramètres,

domination car f bornée et arctan aussi.

On travaille sur $\mathbb{R}^+$, objet impaire.

b)Codes.

c) Convergence dominée à param continu , dedans on tend vers $\dfrac{\pi}{2(1+t^2)}$.

d) Dérivation int à param, mais il faut passer par le caractère local,

sur les segments de $\mathbb{R}_*^+$

Non dérivable en 0 cf graphe python mais pas facile à dém

(taux accroissement et $g(0) = 0$) .

$g'(x) = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{t}{(1+t^2)(1+x^2t^2)} dt$, peut-être calculable...

e) La dérivée est nulle fonct cste sur $\mathbb{R}_*^+$.

La cste se calcule en 1, par primitive directe , arctan au carré divisé par 2.

Cste égal à $\dfrac{\pi^2}{4}$.

```
import numpy as np
import scipy.optimize as resol
import scipy.integrate as integr
import matplotlib.pyplot as plt

def g(x) :
    def f(t) :
        return np.arctan(x*t)/(1+t*t)
    return integr.quad(f,0,np.inf)[0]

#affichage de g(x)
x=[]
y=[]
pas=0.03
abs=0
for k in range(80):
    x.append(abs)
    y.append(g(abs))
    abs=abs+pas

plt.plot(x,y)
plt.show()

#affichage de g(x) + g(1/x)
x=[]
y=[]
pas=0.01
abs=1.0
for k in range(2090):
    x.append(abs)
    y.append(g(abs)+g(1/abs))
    abs=abs+pas

#plt.plot(x,y)
#plt.axis([0.5, 5., 2., 4.])# astuce pour réguler l'écran voir feuilles Centrale 2
#plt.show()
```

f) Bien sûr les objets valent $\dfrac{\pi^2}{8}$, mais je n'ai pas vu d'inversion pour le prouver...

Une idée vient :

D'abord avec $t = 1/u$, xt devient x/t cf feuille 8 int à param.

On relit exo 7 de cette feuille 8...

La non dérivabilité en 0 apparait...

Mais aussi $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\ln(t)}{t^2-1}dt$, donc $f(1) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t^2-1}dt = \frac{\pi^2}{8}$.

On développe celle de gauche en série entière (géom), Fubini, gagné !

Si c'est ce qu'ils voulaient, ss aide directe de leurs parts, c'est du sadisme.

CCINP Micoulot exo 1 :

Voir 1202 année 2019 (corrigé tapé).

Exo 2 : Soit une urne avec a boules blanches et b boules noires.

On tire n boules avec REMISE, on note B_i l'événement "on a tiré i boules blanches".

1) Probabilité de B_i ?

2) Montrer que : $\displaystyle\sum_0^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2i} x^{2i} = \frac{(1+x)^n + (1-x)^n}{2}$.

3) Quelle est la probabilité que i soit pair ?

CCINP Ramaut exo 1 :

Exo 1 : On donne $\displaystyle\int_0^{\infty} exp(-t^2)dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

On étudie $I = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{t}}{e^t - 1}dt$.

1) Exisrence ?

2) Montrer que $I = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\displaystyle\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$.

Exo 2 :

On étudie le déplacement d'une puce sur un ensemble de 3 points $\{A, B, C\}$.

Au rang n la puce avec équiprobabilité d'aller sur l'une des deux autres cases.

On note $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $M = J - I_3$.

On note $U_n = \begin{pmatrix} \mathcal{P}(A_n) \\ \mathcal{P}(B_n) \\ \mathcal{P}(C_n) \end{pmatrix}$, avec A_n : la puce est en A au rang n.

1) Exprimer U_{n+1} en fonction de U_n.

2) M est-elle diagonalisable ? Donner ses sous espaces propres.

Exprimer M^n de cette manière.

3) Donner un polynôme annulateur de J.

Faire la division euclidienne de $(X-1)^n$ par ce polynôme et en déduire M^n.

4) Déterminer $\lim\limits_{\infty} U_n$.

Sol : Disponible.

CCINP Perla exo 1 :

Feuille 4 84 et 1219 ccp 19.

Exo 2 :

$I = \displaystyle\int_0^1 \frac{t.\ln^2(t)}{(t-1)^2}dt$.

1) Existence ?

2) Montrer que $I = 2\left(\displaystyle\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^2} - \sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\right)$.

Sol : disponible.

Je crois que fubini voir ddl int param 26.

au numerateur +1-1 , dse de $\dfrac{1}{(1-t)^2}$.

Ipp non je crois.

CCINP Mosson :

Exo 1 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle vérifiant $A^3 + 9A = O$ (1).

1) Montrer que $Sp(A) \subset \{0, 3i, -3i\}$.

2) A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?

3) A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

4) Si n impair mq A n'est pas inversible.

5) Montrer qu'il n'existe pas de matrice symétrique réelle non nulle vérifiant (1).

6) Donner une solution dans les cas $n = 4$ et $n = 5$.

Exo 2 :

Soit pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n dt$.

1) Mq a_n converge et donner sa limite.

2) Mq $\sum (-1)^n a_n$ converge.

3) On considère $\sum a_n x^n$ de rayon R, de somme f.

a) Mq $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \geqslant \dfrac{1}{2n+1}$.

b) En déduire R.

c) Mq $qqsn \in \mathbb{N}, (2n+3)a_{n+1} = 1(n+1)a_n$.

d) En déduire une équa diff d'ordre 1 vérifiée par f.

e) Conclure.

Sol : si vous voulez.

CCINP Dubois.

Exo 1 :

1) Trouver a, b, c tels que :

$$\frac{1}{t(t^2-1)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t+1} + \frac{c}{t-1}.$$

2) Résoudre l'équation différentielle :

$t(t^2-1)x' + 2x = t^2$.

Sur $]0,1[$ puis sur $]1,+\infty[$.

3) Sur $\mathbb{R}_*^+$.

Sol : sur demande.

Exo 2 :

Voir 1224 CCP 19 .

CCINP Loisel.

Exercice. 1
n candidats passent le permis de conduire avec chacun une probabilité $p \in]0,1[$ de le réussir.

Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de reçus .

1) Donner en justifiant la loi de X .

2) Les recalés repassent l'examen avec la même probabilité de réussite .

   On note Y la variable aléatoire représentant le nombre de reçus au 2 ème passage .

-i- Soit $i \in [0, n]$. Déterminer, pour $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(Y = k | X = i)$.

-ii- Prouver que $Z = X + Y$ suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres .

-iii- Déterminer l'éspérance et la variance de Z.

Exo 2 :

Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, et S le système différentiel associé.

1) A est-elle diagonalisable ?

2) Résoudre S.

Sol : classique mais dispo sur demande (les 2) .

Mines-Ponts Meslin.

Exo 1 :

On identifie $\mathbb{R}^4$ avec $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

1)a) Soit $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, antisymétrique et inversible, pour tout l'exo.

Mq $\forall X \in \mathbb{R}^4$, $X^T AX = 0$.

b) En déduire que pour $X \in \mathbb{R}^4$ non nul,

$$rg(AX, X) = 2$$

2)a) Mq $\exists (U, \lambda) \in \mathbb{R}^4 \backslash \{\overrightarrow{0}\} \times \mathbb{R}^*$ tq $A^2U = \lambda U$.

b) Quel est le signe de λ ?

c) Soit $P = vect(U, AU)$, mq P stable par A.

3) Question en plus ?

Exo 2 :

Le fameux exo 1 de la feuille 3 des evn.

Bonux : Soit X variable aléatoire entière, que dire de $\mathbb{E}(e^{tX})$?

Rq : perso , un exo bonux et on ne se rappelle pas de Q3 ? ?

Invitation à Dorian, délégué exceptionnel de regarder mes suggestions de Q3 !

Sol :

1)a) De part les formats, l'objet est un réel, on le transpose, c'est lui même,

il est alors égal à son opposé, il est nul.

b) On écrit une combinaison linéaire nulle, on multiplie à gauche par X^T,

on trouve le deuxième scalaire nul en appliquant 1)a) et $X^TX = \sum |x_k|^2 > 0(**)$.

On reporte au début, il vient que le premier scalaire est nul car 0 non vp.

2)a) A est antisym donc A^2 est symétrique, par thm spectral il y a une vp.

Rq : elle est non nulle car $\det A^2 \neq 0$.

2)b) Plus technique $\lambda < 0$ car non nulle par inversibilité et

les vp d'une antisym réelle sont nulles (pas ici) ou imaginaires pures.

Rappel de preuve : $AX = \lambda X \Rightarrow -\overline{X}^T A = \overline{\lambda X}^T \Rightarrow -\overline{X}^T \lambda X = \overline{\lambda X}^T X$.

Donc $-\lambda = \overline{\lambda}$ car (**) donc après diagonalisation de A sur $\mathbb{C}$,

il vient A^2 triangularisée, de diagonale $(\alpha_1^2, ..., \alpha_n^2)$..

Qui étaient toutes imaginaires pures donc leurs carrés réels négatifs.

c) Pour U c'est limpide, pour AU voir 2)a), on finit par comb lin.

3) On va montrer que l'on peut rédure en BON vers $\begin{pmatrix} 0 & b & 0 & 0 \\ -b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & -c & 0 \end{pmatrix}$.

Les idées, comme pour le spectral, l'endo associé à A est anti sym ssi sa matrice

est elle même antisym en bon.

Or U et AU sont orthogonaux (1a), on peut les normer.

On complète cette famille libre (1b) puis Gram-Schmidt.

Dans cette base il vient une matrice antisym où le plan de départ est stable :

Le plan de "droite" est alors stable par A aussi par anti sym de la matrice .

Et la matrice finale est antisym ! Donc aussi de diag nulle.

Mines-Ponts Roche Louis.

1) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$.

Là l'interrogateur se place ds un cadre spécifique, il veut les extremas globaux.

Il est très logique d'appliquer le protocole du cours, plus tard....

2) f admet-elle des extremas globaux sur $B_f(0, 2)$? Si oui ...

Sol : Enoncé particulier auquel je ne m'oppose pas.

Mais, il faut s'adapter .

Ce qu'il veut entendre c'est qu'une fonction continue sur un fermé borné en dim finie

est bornée et atteint ses bornes.

Je vais rédiger ce version non classique.

1) Il est clair que f n'a pas de max global sur $\mathbb{R}^2$ car $f(x, x)$ tend vers $+\infty$.

Cherchons un bon compact...

$f(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta)) = \rho^4(\cos^4(\theta) + \sin^4(\theta)) - 2\rho^2(\cos(\theta) - \sin(\theta))^2$.

En ouvrant les yeux le morceau en ρ^4 est $1 - \dfrac{\sin^2(2\theta)}{2} \geqslant \dfrac{1}{2}$.

Le morceau en ρ^2 est minoré 4, (on déphase de $\pi/4$ comme au bât B).

Donc $2f(x, y) \geqslant \rho^4 - 8\rho^2$, il vient que c'est positif à partir de $\rho = 2\sqrt{2}$.

On prend donc la boule centrée de rayon 3 comme compact.

Sur cette boule le minimum est atteint car f continue et est négatif car $f(0, 0) = 0$.

Ce mini ne peut donc pas être battu extérieur boule.

La fonction admet donc un mini global sur $\mathbb{R}^2$.

2) On va étudier sur la boule ouverte et sur son bord.

La fonction est $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert, recherche des pts critiques.

On annule les 2 dérivées partielles simultanément :

On trouve 3 candidats : $(0, 0), \pm(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, les derniers sur le bord.

Notre boule fermée est compact les minis et maxis existent et sont atteints.

$f(0, 0) = 0$ et $f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = -8$.

Regardons le bord $\rho = 2$: En polaires comme avant.

Avec de la bonne trigo, linéarisation, il vient : $8(1 + \sin(2\theta) - (\sin(2\theta))^2)$.

On étudie le polynôme $-V^2 + V + 1$ sur $[-1, 1]$ car on va mettre un sin.

On varie au plus de -1 à $5/4$.

Donc sur le bord on va de -8 à 10, le -8 c'est des pts critiques.

Bilan final : le mini global sur $\mathbb{R}^2$ est -8 (2 fois).

Les minis et maxis globaux sur la boule fermée de rayon 2 sont -8 et 10.

Remarque importante , savoir conclure quand on a l'intérieur et le bord...

Si le 10 était battu " dedans " ce serait un pt critique.

Voir sol cahier jaune 2023 plus précise.

On aurait pu aussi étudier ces pts comme d'habitude ...Exo 16 feuille 12.

Exo 2 : Voir mines 21, 699 !

Centrale 1 : Perla Flament.

X variable aléatoire discrète, F sa fonction de répartition.

1) Montrer que $\lim\limits_{\infty} F\left(x+\dfrac{1}{n}\right) = F(x)$.

En déduire que F est continue à droite en tout point.

Calculer F dans le cas d'une $\mathcal{G}(p)$, $p \in]0,1[$.

2) X variable aléatoire entière, on suppose l'existence de son espérance.

Montrer l'intégrabilité de $x \mapsto 1 - F(x)$.

Puis que $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\int_0^{\infty} (1 - F(x))dx$.

3) ? ?

Sol : Voir cours proba esperance et variance (2022-2023).

Sol : 1) Ceci est une question de cours qui s'argumente grâce à la monotonie de F

et par continuité décroissante, je peux reposter les démos.

Pour la suite F est croissante de 0 à 1, continue par morceaux avec

des sauts de discontinuité en les points de probabilité non nulles.

Pour une géométrique de paramètre p :

Sur chaque intervalle $[n, n+1[, n \geqslant 1$,

F est constante de valeur, $p\left(\sum_{0}^{n-1} q^s\right)$, nulle avant.

2) Pour l'espérance, on utilise l'équirépartition (démo ds le cours) :

$\mathbb{E}(X) = \sum_{\mathbb{N}} (\mathcal{P}(X > n))$, série convergente.

Par déf de la fonction de répartition $1 - F_X(t) = \mathcal{P}(X > t)$.

Donc sur les intervalles $[n, n+1[$, elle prend les valeurs $(\mathcal{P}(X > n))$.

Notre fonction est $\mathcal{C}^0_{pm}$ positive, donc on essaie de majorer.

$\int_0^x (1 - F_X(t))dt \leqslant \int_0^{\lfloor x \rfloor + 1} (1 - F_X(t))dt = \sum_0^{\lfloor x \rfloor} (\mathcal{P}(X > n)) \leqslant \mathbb{E}(X)$.

Donc notre intégrale généralisée converge.

De même, on minore par $\sum_0^{\lfloor x-1 \rfloor} (\mathcal{P}(X > n))$ qui tend vers $\mathbb{E}(X)$.

3) Une inégalité de Markov ? ?

Centrale 2 Roche : exercice très intéressant mais hélas incomplet.

$$f(x) = \sum_0^{+\infty} \frac{\sin((2n+1)x)}{(2n+1)^3}$$

1) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.

Montrer que f est périodique.

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

2) Majorer le reste.

Proposer un script qui renvoie une fonction g telle que $|f(x) - g(x)| \leqslant 0^{-3}$.

3) Soient les fonctions s de classe $\mathcal{C}^2$ dans $[0, \pi] \times]0, +\infty[$ telles que

$$\forall t \in]0,+\infty[, \forall x \in [0,\pi] \begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \\ u(\pi,0) = f(x) \\ u(\pi,t) = u(0,t) = 0 \end{cases}$$

a) $u(x,t) = \sum \dfrac{\sin((2n+1)x)}{(2n+1)^3} e^{-(2n+1)^2 t}$

Vérifier que u appartient à l'ensemble .

b) On veut montrer l'unicité de la solution.

On suppose u, v deux fonctions de cet ensemble.

Etudier les variations de $B(t) = \displaystyle\int_0^{\pi} \left(u^2 - v^2\right)$.

Sol :

Incomplet et des zones d'ombres...

Mines telecom Boquet.

DDL 42 très clair.

Exo 1 :

1) Convergence de $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$.

2) On pose $R_n = \displaystyle\sum_{k>n} \dfrac{(-1)^k}{k}$, déterminer un équivalent.

Indication ; considérer $R_n \pm R_{n+1}$.

Exo 2 :

Déterminer les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ symétriques non dz.

Même question avec le rang égal à 1.

Sol : exo 1 :

1) Cssa , c'est l'harmonique alternée.

2) La convergence précédente entraine l'existence du reste.

On peut réécrire ce reste comme (voir exo 36 avec 2 piques de la feuille sur séries).

$$R_N = \frac{(-1)^N}{2(N+1)} - \frac{1}{2}\sum_{N+1}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)(**).$$

La deuxième subit toutes les hypothèses du cssa,

donc dominée par le premier terme engagé en $\frac{1}{N^2}$.

Donc $R_N \sim \frac{(-1)^N}{2(N)}$, question non posée mais classique,

Convergence de la série des R_N ?

Elle converge mais l'équivalent ne SUFFIT pas !

C'est (**) qui le prouve, cssa pour le terme de gauche et abs cvte à droite.

Exo 2 :

Ici le danger vient des confusions entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

On prend $\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$, on calcule $\chi = X^2 - (a+b)X + ab - c^2$.

Si 2 racines distinctes c'est dz, si $c = 0$ aussi.

$\Delta = 4c^2 + (a-b)^2$, il vient $c = \pm(a-b)i/2$.

Cette condition est alors suffisante, $a \neq b$, car si dz on aurait une homothétie ...

Pour le cas $rg = 1$ on vire les cas simples, exemple $c = b = 0$...

Il reste dans le cas $ac \neq 0$, $\begin{pmatrix} a & c \\ c & c^2/a \end{pmatrix}$.

Même idée qu'avant, $\Delta = (a^2 + c^2)^2/a^2 = 0$, $c = \pm ia$.

On aboutit à $a\begin{pmatrix} 1 & \pm i \\ \pm i & -1 \end{pmatrix}$ jamais dz, car 0 racine double...

Centrale 1 Boquet :

Soit $\alpha > 0$, $(E) : y' + \alpha y - xy^2 = \alpha$.

1) Montrer qu'il existe une unique solution DSE sur $]-1,1[$ tq $y(0)=1$.

Montrer que $y(x) = \mathcal{O}_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}\right)$.

2) Soit $f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}),\ f(0)=f(1)=0$.

Montrer l'existence de $I = \displaystyle\int_0^1 t^\alpha [f'(t)+y(t)f(t)]^2 dt$.

Puis une inéquation différentielle, laquelle ?

Centrale 1 Vermel.

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$.

$\forall j \in \mathbb{N},\ m_j = \displaystyle\int_0^1 f(u)e^{ju}du$.

1) Etudier la convergence de $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} m_{kn} e^{-knt}$ sur $\mathbb{R}$.

2) Soit $\Phi_n(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} m_{kn} e^{-knt}$.

a) Montrer que $(\Phi_n(t))_{\mathbb{N}}$ est simplement convergente.

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Phi_n(t) = \displaystyle\int_0^1 f(u)e^{-e^{n(u-t)}}du$.

3) On fait l'hypothèse que $\forall j \in \mathbb{N},\ |m_j| \geqslant U$.

a) $\forall t \in]0,1]$, montrer que :

$\Phi_n(t) - m_0 = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} m_{kn} e^{-knt} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

b) Montrer que f est la fonction nulle.

Maths 1 Centrale. Loisel.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note,

$$K = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^n, \quad m_{i,j} \in [-1,1]\}$$

1) Montrer que K est convexe.

Montrer que K est borné et qu' il atteint som maximum et son minimum...

2) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer qu' il existe une unique matrice $M_0 \in K$ telle que pour toute matrice $M \in K$,

$$\|A - M_0| \leqslant \|A - M\|$$

(Avec $\|M\| = \sqrt{tr\,(M^\top M)}\Big)$.

Sol :

La convexité se démontre comme les matrices stochastiques du cours.

Coeff par coeff, ils sont tous barycentre à poids positifs de 2 nombres

dans $[-1, 1]$ qui est lui-même convexe.

K borné car $\forall M \in K, \|M\| = \sqrt{\sum_{i,j} m_{ij}^2} \leqslant n$.

J'interprète la question, la norme 0 est atteinte et le max aussi

avec une matrice qui n'a que des 1.

Rq perso : K est fermé car défini en dimension finie par des inégalités larges.

2) Il s'agit de la projection sur un convexe fermé vue en cours.

Pas facile... Page 12 cours de topo...

3) Un cas particulier concret ?

Maths 2 Mosson.

On cherche le plus petit d appelé D et le plus grand c (appelé C)

$$\frac{1}{n-c} \leqslant \underbrace{\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}}_{=R_n} \leqslant \frac{1}{n-d} (*).$$

1) Justifier l'existence de R_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

2) a) Ecrire une fonction Reste (n) calculant une valeur approchée du reste.

b) On suppose que C existe. Mq $C \geqslant 0$.

c) Ecrire une fonction Recherche $C(N)$ calculant une valeur approchée de C à 10^{-3}

près vérifiant (*) pour $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$.

d) On suppose que D existe et $D \leqslant 1$.

Ecrire de même Recherche $D(N)$.

e) Tracer Recherche C et Recherche D en fon ction de N pour $N \in \llbracket 1, 10 \rrbracket$.

3) Soit $\varphi(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)^2}$.

Montrer que φ est définie, strictement positive, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

(4) On définit $\forall x > 0, G(x) = \psi^2(x) + \psi'(x)$.

a) Déterminer la limite de G en $+\infty$.

b) On suppose que pour tout $x > 0, G(x+1) - G(x) < 0$.

Montrer que $G(x) > 0$ pour tout $x > 0$.

5) ? ? ?

Mines ponts (15mn prepa) Le Cozannet.

Exo 1 :

Pour $x \in]-1, 1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Montrer que $(x^n-1)^2 = \prod_1^n \left(x^2 - 2x\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)+1\right)$.

2) Calcul de $I = \int_0^{2\pi} \ln(x^2 - 2x\cos(t)+1)dt$.

3) Calcul de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(\theta))d\theta$.

Exo 2 :

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}$.

1) Montrer que $\sum_1^n \frac{e^{in\theta}}{n} = \int_0^1 \frac{e^{i\theta}(1-(te^{i\theta})^n)}{1-te^{i\theta}}dt$

2) Montrer que $\sum_1^n \frac{e^{in\theta}}{n}$ converge,

et $\sum_1^\infty \frac{e^{in\theta}}{n} = \int_0^1 \frac{e^{i\theta}}{1-te^{i\theta}}dt$.

3) ? ?

Mines Loisel :

Exo 1 :

Soit l'application $f : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M \longmapsto M^T \end{cases}$

1) Déterminer sans trop de calculs χ_f.

2) a) Pour $n \geqslant 2$, on suppose $\alpha f + \beta Id = 0$.

Montrer que $\alpha = \beta = 0$.

b) Déterminer $\{P \in \mathbb{R}[X], P(f) = 0\}$.

3) Soit $n \geqslant 2$, $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ respt les matrices symétriques et antisymétriques.

Soit $g \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$. Mq $g \circ f = f \circ g \Leftrightarrow \begin{cases} g(\mathcal{S}_n) \subset \mathcal{S}_n \\ g(\mathcal{A}_n) \subset \mathcal{A}_n \end{cases}$.

Exo 2 :

1) Soit f continue de $\mathbb{R}^+$ vers lui-même tq $I = \displaystyle\int_0^{\infty} f(t)dt$ cv.

Mq $J = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-t}f(t)dt$ cv.

2) Pareil mais dans le cas où g est continue de $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}$.

Sol :

1) Ce polynôme est indépendant de la base utilisée.

On choisit une base adaptée à la somme directe $\mathcal{S}_n \bigoplus \mathcal{A}_n = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

La matrice de f est $diag(1, 1, ..., 1, -1, ..., -1)$.

Les nombres de $1, -1$ sont les dimensions.

$\chi_f = (X-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}(X+1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

2) a) On applique la relation sur I_n, il vient $\alpha + \beta = 0$.

Puis sur une matrice antisym non nulle , il vient $\alpha - \beta = 0$.

b) D'abord $X^2 - 1$ est annulateur, car f involutive.

Les multiples de $X^2 - 1$ fonctionnent donc.

Pour les autres on effectue un division euclidienne par $X^2 - 1$, pour le reste on utilise a).

Donc le résultat recherché est les multiples de $X^2 - 1$.

3) Un sens est du cours, quand ça commute chacun laisse stables les sep de l'autre.

La réciproque : la matrice de g diagonale par blocs ds une base adaptée.

Chacun de ses blocs commute avec les homothéties de rapport 1 et -1.

Exo 2 :

Mines Mosson(prépa 15 mn) .

Exo 1 :

Soit E l'ev des suites réelles et φ l'endomorphisme qui envoie $(u_n)_{\mathbb{N}^*}$ sur $(v_n)_{\mathbb{N}^*}$.

Tel que $v_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{1}^{n} u_k$.

1) Montrer que φ est un automorphisme.

2) Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de φ

Exo 2 :

Soit $x \in \mathbb{R}_*^+$, $(n,p) \in \mathbb{N}^2$.

On définit $J_{n,p}(x) = \displaystyle\int_{-x}^{x} t^p(x^2 - t^2)^n e^t dt$.

1) Mq $\forall n \in \mathbb{N}$, il existe deux polynômes $A_n(x)$ et $B_n(x)$ de degrés au plus n tq :

$$J_{n,0}(x) = A_n(x)e^x + B_n(x)e^{-x}$$

2) Une équa diff ? ? J'ai peut-être une idée.

Sol exo 1 :

1) On respecte nos objets, on envoie bien une suite sur une suite.

L'aspect linéaire vient de la distributivité de la somme.

Attention, on est en dimension infinie, pas de thm du rang.

On pourrait montrer que la connaissance de (v_n) entraine celle de (u_n) et son unicité.

On peut faire plus scolaire, le noyau :

Le fait que $v_1 = 0$ entraine $u_1 = 0$, puis $v_2 = 0$ entraine $u_2 = 0$ car $u_1 = 0$,

par récurrence, facile...

La nullité du p-ième sachant $\forall u_j = 0, j < p$ entraine $u_p = 0$.

Noyau réduit au nul, injectivité.

Pour la surjectivité, l'idée est un peu la même,

$v_1 = u_1$, $u_2 = 2v_2 - u_1$, $u_3 = 3v_3 - u_1 - u_2$ ... rec facile.

Cet antécédent proposé est recevable par la même rec que celle qui l'a créé.

2) 0 non vp par injectivité, attention dim infinie.

Une vp c'est avoir une suite non nulle vérifiant :

$$\forall n > 0, \lambda n u_n = \sum_1^n u_k$$

Pour $n = 1$ il vient $\lambda = 0$ ou $u_1 = 0$.

Pour $\lambda = 1$ un vp est alors colinéaire à la suite constante.

Pour $n = 2$, il vient (on cherche $\lambda \neq 1$ donc $u_1 = 0$) ,

$u_2 = 2\lambda u_2$ donc $\lambda = 1/2$ ou $u_2 = 0$.

On itère cette idée par récurrence, il vient que les seules vp envisageables seraient $1/k$.

Les vp associés (si ils existent auraient un début en $(0, 0, 0..., 1, ?, ?...)$.

Avec le premier 1 en k-ième position.

On cherche un trouver un vp pour chaque $1/k$,

ça marche, avec une droite vect pour chaque cas.

Exemple $1/2$, $(0, 1, 2, 3...)$ les entiers successifs décalés de un cran.

Pour $1/3$, $(0, 0, 1, 3, 6, 10...)$ la somme des entiers successifs décalées de 2 crans, démo rec.

Pour $1/4$, $(0, 0, 0, 1, 4, 10, 20...)$ c'est la somme des entiers du vp précédent ! !

Etc par rec, pas hyper dure mais agaçante à rédiger...

Centrale 1 Mosson :

On pose pour $n \geqslant 2$, $P_0 = 2$, $P_1 = X$, $P_n = XP_{n-1} - P_{n-2}$.

1) Etudier degré et parité de P_n.

2) Montrer que $\forall n \geqslant 2, \forall z \in \mathbb{C}^*$, $P_n\left(z + \dfrac{1}{z}\right) = z^n + \dfrac{1}{z^n}$.

3) Mq $\forall n \in \mathbb{N}$, P_n admet n racines réelles 2 à 2 distinctes.

Sol :

Le degré de P_n est n , la parité existe, c'est celle de n.

La démonstration est facile par récurrence forte.

2) Pareil , récurrence forte en utilisant le déf de P_n.

3) On résout d'abord $z^n + \dfrac{1}{z^n} = 0 \Leftrightarrow z^{2n} = e^{i\pi}$(CNs...).

$z_k = e^{\frac{i\pi}{n}} e^{\frac{ik\pi}{n}}, k : 0 \to 2n-1$, attention bcp trop de sol...

On arrive alors à $z_k + \dfrac{1}{z_k} = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{2n} + \dfrac{k\pi}{n}\right)$.

Ouf, elles se repètent, on garde $k : 0 \to n-1$, on a utilisé la trigo : $\cos(\pi - x) = \cos(\pi + x)$.

L'idée se devine très bien sur un cercle trigo.

Celles qui restent sont au nombre de n par injectivité de cos sur $[0, \pi]$.

CCINP De Bouet :

Exo 2 :

$$A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \quad \alpha + \beta = \gamma; (\alpha, \beta, \gamma) \in (\mathbb{R}^*)^3$$
$$B = \begin{pmatrix} \alpha A & \beta A \\ \gamma A & 0_3 \end{pmatrix}$$

1) χ_B en fonction de χ_A ?

2) Valeurs propres de B en fonction de celles de A ?

3) Montrer que si $X \in \mathrm{Ker}(A)$, $\begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(B)$.

4) En déduire $\dim(\mathrm{Ker}\, B) \geqslant 2\dim(\mathrm{Ker}\, A)$.

5) Je m'en souviens plus...

Je propose 5) Démontrer que 4) est une égalité.

6) Retrouver que B inversible ssi A aussi.

Exo 1 :

Pour $p \in \mathbb{N}$, on pose

$$a_p = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^p}{2^n}$$

1) Montrer que a_p existe.

2) Exprimer a_p en fonction de $a_0, \dots, a_{p-1}$.

Kdo : Développer $(n+1)^p$ par binôme.

b) En déduire que $a_p \in \mathbb{N}$.

Sol :

a) a_p existe en vertu de la règle de d'Alembert.

$$a_p = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)^p}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\left(a_p + \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix} a_{p-1} + \dots + \begin{pmatrix} p \\ p \end{pmatrix} a_0\right)$$

donc

$$a_p = \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix} a_{p-1} + \dots + \begin{pmatrix} p \\ p \end{pmatrix} a_0$$

b) Par un récurrence aisée $a_p \in \mathbb{N}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Exo 2 :

Ceci est une variante raisonnable de l'exo de la page 28 de votre cours de réduction.

1) χ_B est de degré 6, par hyp les 3 paramètres tous non nuls.

$$\chi_B = \left|\begin{array}{c|c} XI_3 - \alpha A & -\beta A \\ \hline -(\alpha+\beta)A & XI_3 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} XI_3 + \beta A & -\beta A - XI_3 \\ \hline -(\alpha+\beta)A & XI_3 \end{array}\right|,$$

avec $L_1 \leftarrow L_1 - L_4$ puis L_2, L_3.

$\chi_B = \left|\begin{array}{c|c} XI_3 + \beta A & 0_3 \\ \hline -(\alpha+\beta)A & XI_3 - \gamma A \end{array}\right|$ même idée sur les colonnes de 4 à 6.

C'est triangulaire par blocs, on utilise la 3 linéarité pour les scalaires $-1, \gamma, \beta$.

$\chi_B = -\beta^3\gamma^3\chi_A(X/\gamma).\chi_A(-X/\beta)$.

2) Les vp sont les racines des poly caract, donc les vp de B sont celles

de A multipliées par γ et $-\beta$.

Cohérent avec l'exo du cours mais qu'il n'était pas necéssaire de reconnaitre.

3) Calcul par blocs assez simple :

$B\begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha AX \\ \gamma AX \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, car $X \in \ker(A)$.

4) Pareil avec $\begin{pmatrix} 0 \\ X \end{pmatrix}$.

On regarde le noyau de B, en format $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$.

Pour rappels paramètres non nuls.

Il vient (CNS!!) ($X \in \ker(A)$ et $Y \in \ker(A)$), pas dur mais ouvrir les yeux.

On arrive à $\ker(A) \times \ker(A)$ isomorphe à $\ker(B)$.

Ceci donne 4) et 5).

J'ai utilisé : $\begin{cases} E \times E \longrightarrow \mathcal{M}_{6,1} \\ (X,Y) \to \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \end{cases}$, dimension de E égale à 3.

C'est un isomorphisme d'ev qui conserve les dimensions.

6) Il n'y a qu'à relire la conclusion de 5).

7) On peut aller plus loin B semblable à $\left(\begin{array}{c|c} \gamma A & 0_3 \\ \hline 0_3 & -\beta A \end{array}\right)$.

Le début de la preuve est p28 de votre cours ...

Vers la fin de cet exo , on arrive à un niveau mines-centrale 1-X.

Centrale 1 Le Cozannet :

Rq : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(t)dt = \frac{\pi}{2}\frac{(2n)!}{(n!)^2}\frac{1}{4^n}$. On pose $\varphi(x) = \displaystyle\sum_0^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}$.

1) Montrer que φ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

- Montrer que φ est croissante $]-1,\infty[$.

- Montrer que $\forall p > 0, \varphi^p(x) \geqslant 0$.

2) Montrer que $\varphi(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cosh(2\sqrt{x}\sin(t))dt, x \geqslant 0$.

Et $\varphi(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cosh(2\sqrt{-x}\sin(t))dt, x \leqslant 0$.

3) Montrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\infty} \varphi(xt)e^{-t}dt$.

4) ? ? Equa diff ? ? Limite ?

Centrale 2 Le Cozannet :

On s'intéresse aux polynômes de Hilbert : $k \in [\![0,n]\!]$.

1) Ecrire un programme renvoyant les ℓ premiers polynômes de Hilbert.

Comparer deux polynômes écrits, l'un en base canonique et l'autre en base de Hilbert.

Bref un programme qui teste l'éventuelle égalité $P = Q$.

2) Soit $T_n \in \mathcal{L}(\mathbb{C}_n[X])$ défini par $(T_n(P))(X) = P(X+1)$. $M = \mathcal{M}_C(T_n)$.

a) Soit $L \in \mathbb{C}_n[X]$, montrer qu'il existe (α_j) tq :

$$L = \sum_0^n \alpha_j H_j$$

b) Mq $U = M^T.V$ avec ,

$V = (\alpha_0, ..., \alpha_n)^T$ et $U = (L(0), ..., L(n))^T$.

c) Donner l'expression des coordonnées de V en fonction de celles de U.

d) Soit $L \in \mathbb{C}_n[X]$ tq $L(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.

Mq $\forall j, \alpha_j \in \mathbb{Z}$.

3)a) Comparer 2 polynômes explicites, l'un en base canonique et l'autre en H_k

avec le but de constater que $R(X) = T(X+1) - T(X)$.

b) Soit $R \in \mathbb{C}_n[X]$, montrer qu'il existe $T \in \mathbb{C}_n[X]$ tq

$T(0) = 0$ et $R(X) = T(X+1) - T(X)$.

Déterminer T.

Indication : regarder l'application de $\mathbb{C}_n[X]$ vers $\mathbb{R} \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$,

qui envoie T sur $T(X+1) - T(X)$.

Centrale 1 Sefrioui.

L'étude est dans $[0,1]^2$.

$$K(x,y) = \begin{cases} x(1-y) & si \quad x \leqslant y \\ y(1-x) & si \quad x > y \end{cases}.$$

1) Montrer que K est continue et à valeurs $\left[0, \frac{1}{4}\right]$.

2) Trouver l'équation du plan tangent à la surface $z = K(x,y)$, pour $x < y$.

En déduire un vecteur normal.

3) Soit $k \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$, trouver la longueur de la courbe $K(x,y) = k$.

Montrer que $L_k \geqslant$.

Mines telecom Chantran (Ensam, Centrale, CCINP)...

Exo 1 : $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $\det(A) = 10$, $Tr(A) = -6$, $A - I_3 \notin Gl_3(\mathbb{R})$.

Déterminer A^{-1}.

Sol :

Exo 2 : Voir jmf.

1 est valeur propre, et c'est bien sûr trigonalisable($\mathbb{C}$).

Cherchons les deux autres vp.

Produit 10, somme -7, équation second degré : $Sp(A) = \{1, -5, -2\}$

On peut donc diagonaliser, mais ça ne donne pas encore A^{-1}.

On a facilement le polynôme caractéristique $\chi_A(X) = (X-1)(X+5)(X+2)$.

Par Cayley-Hamilton $A^3 + 6A^2 + 3A - 10I_3 = 0_3$.

On en tire A^{-1}...

CCINP : Chantran.

Exo 1 : $E = \mathcal{M} - n, 1(\mathbb{R})$.

Posons $\forall (X, Y) \in E^2$, $(X|Y) = X^T Y$.

1) Montrer que ... est un produit scalaire.

2) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, mq que $(Im(A))^T = \ker(A^T)$.

3) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $Y \in E$ fixés.

$$f : \begin{cases} E \longrightarrow \mathbb{R} \\ X \mapsto \|AX - Y\| \end{cases} .$$

Mq $f(X) = \inf\{f(z), z \in E\} \Leftrightarrow A^T(AX - Y) = 0$.

Exo 2 :

Soit $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}dt$.

1) Donner la définition d'un rayon de convergence d'une série entière.

2)a) Donner le rayon de convergence de $\sum u_n x^n$.

b) Soit $x \in]-R, R[$, $t \in]0,1[$.

Montrer qu' il existe (a, b, c) réels tq ;

$$\frac{1}{1+t^2} \cdot \frac{1}{1-xt} = \frac{at+b}{1+t^2} + \frac{c}{1-xt}.$$

c) Calculer S.

d) Montrer alors que S est continue en -1 et calculer $S(-1)$.

Centrale 2 Chantran.

Une urne avec une boule rouge et une noire.

On réalise des tirages avec remises et à chaque tirage on ajoute une boule de la

même couleurque celle tirée.

On appelle X_n et Y_n les variables aléatoires représentant le nombre de boules

rouges et noires après n tirages.

De plus posons $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2$, $P_n(u, v) = \displaystyle\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^*} P(X_n = i, Y_n = j)u^i v^j$.

1)a) Réaliser un programme " simulation" qui prend en argument n et qui renvoie X_n.

b) Réaliser un programme " moyenne " qui prend en argument n et un nouvel entier N et qui renvoie une liste L représentant la répartition du nombres de boules rouges X_n dans N simulations.

Fichier évolutif de jours en jours.