Pour 1002,1006,1009,1018,1026,1032,1035 : Voir disk dur externe le 7/7/22 de mes données.

1000. a) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \geqslant 2$ simplement scindé sur $\mathbb{R}$.

Montrer que P' est simplement scindé.

b) $8X^8 + 7X^7 + 4X^4 + 3X^3 + 2019X^2 + 2018X + 666$ est-il simplement scindé sur $\mathbb{R}$?

Sol : a) On applique Rolle à P , $n-1$ fois.

b) Si c'était le cas, P' aussi P" etc...

Mais $P^{(5)}$, admet 0 comme racine double.

1001. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant tel que $P\left(X^2\right) = P(X)P(X-1)$.

a) Soit ω une racine de P. Montrer que ω^2 est aussi racine de P.

b) Montrer que les racines de P sont soit nulles, soit de module 1 .

c) Montrer que 0 n'est pas racine de P.

d) Déterminer les polynômes solutions.

Sol voir exo de première année.

1002. PYTHON . Soient $x_0, \ldots, x_{n-1}$ des réels distincts, (ordre croissant).

$L_0, \ldots, L_{n-1}$ les polynômes de Lagrange associés.

Soient $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, A_k = L_0 + \cdots + L_k, P_k = A_k - \displaystyle\sum_{i \neq k} \frac{A_k'\left(x_i\right)}{\Lambda_i'\left(x_i\right)} \Lambda_i$. où,

pour $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \Lambda_i = \left(X - x_i\right)\left(X - x_k\right) \displaystyle\prod_{j \neq i, j \neq k} \left(X - x_j\right)^2$.

a) Écrire une fonction Python Lambda $(i, \mathrm{k}, \mathrm{X})$ où $X = \left(x_0, \ldots, x_{n-1}\right)$ et qui renvoie Λ_i.

b) Vérifier que P est bien défini.

Calculer $P_k(x_j)$ pour tout $j \in [\![0, n-1]\!]$ et $P_k'(x_j)$ pour tout $j \in [\![0, n-1]\!]$ distinct de k.

Montrer que P_k est l'unique polynôme de degré $2n-2$ vérifiant ces conditions.

c) En étudiant les racines de P_k' et les variations de P_k, mq, pour $t \leqslant x_k$, on a $P_k(t) \geqslant 1$.

Sol : Ici, seul le module Polynomial a de l'importance, niveau info ...

a)

```
from numpy.polynomial import *
import matplotlib.pyplot as plt
def monome(a):# on declare X-a
    return Polynomial([-a,1])
def Lagrange(L,k): # L= [x0,x1,...,xn-1], les abcisses

    P = Polynomial([1])
    for i in range(0,len(L)):
        if i != k:# on enlève l'index concerné
            P *= monome(L[i]) / (L[k] - L[i])
    return P # attention aux indices...
def Lambd(i,k,L):#attention à i,k...
    P = Polynomial([1])
    if i!=k:
        for j in range(len(L)):
            P=P*monome(L[j])
        for j in range(len(L)):
            if j != k and j !=i:
                P=P*monome(L[j])
    else:
        for j in range(len(L)):
            P=P*monome(L[j])
        P=P*P


    return P
```

b) Pour $i \neq k$, x_i est racine simple de Λ_i donc pas racine de sa dérivée.

P_k est bien défini.

Pour $P_k\left(x_j\right)$, Λ_i s'annule pour toutes nos abcisses.

Donc $P_k\left(x_j\right)=1$ si $j \leqslant k$, et 0 sinon,

en utilisant nos connaissances sur les polynômes de Lagrange.

Pour $P_k'\left(x_j\right)$, il faut se méfier des confusions d'indices...

La plupart des $\Lambda_i'(x_j)$ sont nuls grâce aux racines doubles.

Pour $i=j$ on a un téléscopage, il reste $P_k'\left(x_j\right)=A_k'(x_j)-A_k'(x_j)=0$.

Rq $j \neq k$.

Maintenant on regarde avec soin les degrés.

Λ_i est de degré $2n-2$, donc P_k de degré au plus $2n-2$.

Donc la dérivée de degré au plus $2n-3$.

Soit Q_k un autre client, on regarde P_k-Q_k.

On a déjà récolté $n-1$ racines de cette dérivée juste avant,

mais en appliquant Rolle sur chaque $[x_j, x_{j+1}]$.

On en récolte $n-1$ autres, trop de racines, $(P_k-Q_k)'=0_{\mathbb{R}[X]}$.

Il est donc constant, bref nul car il a des racines. Unicité.

c) C'est long, je donne les idées, pour des raisons de degrés,

les racines de P_k' sont simples(*).

P_k' n'est pas nul car P_k non constant.

Donc (*) sont des extrémas locaux.

On fait un tableau de signe, avant x_k.

On va de 1 en 1, en étant toujours du même côté, (cf extrémas locaux).

Donc , il reste à savoir lequel, la réponse est en $-\infty$.

La limite y est $+\infty$.

Ça vient du fait que le coeff en X^{2n-2} est $-\sum_{i\neq k} \frac{A'_k(x_i)}{\Lambda'_i(x_i)} > 0$.

Pour le prouver il faut utiliser (comme plus haut aussi).

$\left(\prod_1^s P_i\right)' = \sum_{k=1}^s \left(\left(\prod_{i\neq k}^s P_i\right)(P_k)'\right)$. Stop.

1003. Soit F un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que toute matrice non nulle de F soit inversible.

a) On suppose $K = \mathbb{C}$.

Montrer que pour tout couple de matrices (A, B) avec A inversible, il existe un

scalaire α tel que $\alpha A - B$ ne soit pas inversible. En déduire que $\dim(F) \leqslant 1$.

b) On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Que peut-on dire de F si n est impair ?

Pour $n = 2$, donner un exemple avec F de dimension 2.

Montrer que, si n est pair, la dimension de F ne peut excéder n.

Sol : a) Sur $\mathbb{C}$ ...

$\det(\alpha A - B) = 0$ ssi $\det(\alpha I_n - A^{-1}B) = 0$. Donc α vp de $A^{-1}B$.

Elle existe par Alembert Gauss.

Donc par l'absurde si $\dim F$ est supérieure à 2, on prend A, B non nulles inversibles de F.

On applique ce qui précède et on a un elt non nulle de F non inversible. Absurde.

b) Sur $\mathbb{R}$...

Si n impair, un polynôme de degré impair possède une racine réelle.

On a donc une vp réelle on applique le a). Donc même conclusion.

Si $n = 2$, par exemple $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ est de dimension 2 et convient.

Pour la dernière question, par l'absurde, soit une éventuelle famille de $n+1$ matrices, libre et inversibles de F.

On écrit une combinaison linéaire (non triviale) de ces matrices de manière à annuler la première colonne, elle est donc non inversible et non nulle (liberté).

Ces premiers vecteurs colonnes sont en dimension n...

1004. Soit $S = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que S est diagonalisable et préciser ses valeurs propres.

b) Montrer que S est semblable à une matrice de diagonale nulle.

c) Pour $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on pose $\varphi(M) = \mathrm{diag}(1,2)M - M\,\mathrm{diag}(1,2)$.

Déterminer l'image de φ. Montrer qu'il existe C et D telles que $S = DC - CD$.

Sol : a) S est symétrique réelle donc dz, de trace nulle donc vp 2 à 2 opposées.

Det = -34, donc les vp sont, $\pm\sqrt{34}$.

b) Tout est déjà fait...

c) $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est de dim 4.

Le noyau de φ est le commutant de $\mathrm{diag}(1,2)$, qui est donc de dimension 2.

Voir dimension du commutant pour un diagonale à coeff 2 à 2 distincts.

L'image est donc de dim 2 par thm du rang.

On développe $\varphi(M)$ on trouve $\begin{pmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{pmatrix}$ qui est bien de dim 2.

c) Rq $S \notin Im(\varphi)$.

Mais $\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ oui, image de $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$.

Pour pouvoir superposer grâce à la distributivité, il faut en garder une,

mais pas la diag sinon on ne sort pas de $Im(\varphi)$.

On regarde donc ψ comme φ mais avec $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, à la place de la diag. Oui !

1005. a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Montrer l'équivalence entre les assertions suivantes :

(i) A est inversible et A^{-1} est à coefficients dans $\mathbb{Z}$; (ii) $\det(A) \in \{-1, 1\}$.

b) Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = I_2$.

Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, inversible, avec A^{-1} à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

Montrer que toute valeur propre de A est de module 1 .

c) Montrer que l'ensemble des polynômes caractéristiques des matrices

$A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ pour lesquelles il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = I_2$ est fini.

Sol : a) Un sens facile si c'est inversible à coeff entiers, $\det(A)\det(A^{-1}) = 1$,

donc $\det(A)$ inversible ds Z.

Pour la réciproque , hors programme $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}(Com(A))^T$...

En dimension 2, c'est au programme avec la formule de l'inverse.

b) A annulée par $X^p - 1$ scindé simple.

$A^{-1} = A^{p-1}$, les vp sont annulées par ce polynôme , donc toutes de modules 1.

c) Ces poly caractéristiques sont $X^2 - tr(A)X + \det(A)I_2$,

les det valent ± 1, les traces (entières) dans $[-2, 2]$.

La trace vient du fait que 2 valeurs propres de module 1.

1006. PYTHON. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On s'intéresse au problème $FL(n)$ suivant : étant donnés $a_0, \ldots, a_{n-1}, \lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{C}$, existe-t-il une matrice dont les coefficients diagonaux sont $a_0, \ldots, a_{n-1}$ et les valeurs propres sont $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1}$?

a) Écrire une fonction Python prenant en entrée des complexes

$a_0, \ldots, a_{n-1}, \mu_0, \ldots, \mu_{n-1}, \alpha$ et renvoyant la matrice $\begin{pmatrix} a_0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} & 1 \\ \mu_0 & \cdots & \cdots & \mu_{n-1} & \alpha \end{pmatrix}$.

b) Montrer que le problème $FL(2)$ admet une solution si et seulement si $a_0+a_1 = \lambda_0+\lambda_1$.

Préciser une solution sous cette condition.

c) $FL(3)$ admet-il une solution pour $a_0 = 1, a_1 = -1, a_2 = 0, \lambda_0 = 1, \lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = -3$?

d) Soient $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$. On pose , pour $k \in [\![0, n-1]\!], P_k = \prod_{i=0}^{k-1} (X - a_i)$.

i) Justifier que la famille $(P_0, \ldots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$

puis qu'il existe $\mu_0, \ldots, \mu_{n-1}$ tels que $\prod_{k=0}^{n-1} (X - \lambda_k) = P_n - \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k P_k$.

ii) Écrire une fonction Python prenant $a_0, \ldots, a_{n-1}$ et renvoyant la liste $[P_0, \ldots, P_n]$.

iii) Écrire une fonction Python prenant $a_0, \ldots, a_{n-1}, \lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1}$ et renvoyant les μ_k.

Conclure.

Sol : 30 mn MDR .

a) On crée une np de taille n remplie de zéros avec "eye",

mais attention il y a un piège à c...Voir 992 (2019).

Puis une boucle pour les 1 .

Puis deux autres pour ...

b) La condition est nécessaire pour des raisons de traces.

On cherche une solution avec la "bonne" diagonale,

le polynôme caractéristique $X^2 - (a_0 + a_1)X + a_0a_1 - \alpha\beta$.

Si il s'annule en λ_0 c'est suffisant car après trigonalisation,

la trace donnera l'autre annulation.

On remplace $\alpha\beta = \lambda_0^2 - (a_0 + a_1)\lambda_0 + a_0a_1$.

On peut imposer $\beta = 1$ pour commencer à respecter a).

c) On impose la "bonne" diagonale, on cherche une solution sur le modèle de a).

On écrit le poly caract ss développer, on force l'annulation en 1,

ça donne $\mu_0 = 0$, puis on force en 2, ça donne $\beta = 6$.

La troisième racine est obligatoire par la trace après trigonalisation(*).

d) i) Bon cardinal et échelonnée en degrés.

$P_n - \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(X - \lambda_k) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ donc de décomposition unique sur notre base.

Rq personelle qui va prendre de l'importance dans la conclusion :

Comme on va imposer $\displaystyle\sum_0^{n-1} a_i = \sum_0^{n-1} \lambda_i$.

On est dans $\mathbb{R}_{n-2}[X](***)$.

ii) Un p'tit coup de module polynomial, on remplit la liste qui sera retournée

au fur et à mesure et en multipliant par le dernier monôme.

On commence à faire attention à ne pas décaler les indices...

iii) Mal rédigé (selon moi), on cherche une solution de type a).

Il y bcp de travail...

Je pense que l'examinateur veut le plan .

Je vais essayer de suivre l'énoncé...

3 pbs se posent : Pourquoi les μ_k sont les bons ?

Comment est la solution qui va avec ?

Comment les récupérer par Python ?

Ok , c'est la dernière question, ...

Je guide, un p'tit calcul de déterminant pour commencer.

les décalages d'indices sont agaçants à gérer.

Celui de : $\begin{pmatrix} X-a_0 & -1 & ... & 0 \\ 0 & X-a_1 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & -1 \\ -\mu_0 & ... & -\mu_{n-2} & X-a_{n-1} \end{pmatrix}$.

On développe suivant la dernière ligne, méthode crayons...

Le miracle a lieu : $\prod_0^{n-1}(X-a_i) - \left(\sum_0^{n-2} \mu_i P_i\right)$. Well done .

On constate avec un certain plaisir, que 2 choses sont éclaircies .

En ouvrant bien les yeux, la matrice $\begin{pmatrix} X-a_0 & -1 & ... & 0 \\ 0 & X-a_1 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & -1 \\ -\mu_0 & ... & -\mu_{n-2} & X-a_{n-1} \end{pmatrix}$.

fera l'affaire (CN) .

Car d'abord comme on cherche une solution de type (a), et on exige $\sum_0^{n-1} a_i = \sum_0^{n-1} \lambda_i$.

Donc $\chi_M = P_n - \sum_0^{n-2} \mu_i P_i = \prod_0^{n-1}(X-\lambda_k) + \sum_0^{n-2} \mu_k P_k - \sum_0^{n-2} \mu_i P_i$.
Attention au piège, on a utilisé $\mu_{n-1} = 0(***)$.

Il vient que le polynôme caractéristique est nul en tous les λ_i

Donc d)i) nous garanti que les $(\lambda_i)_0^{n-1}$ sont toutes solutions.

La matrice que nous cherchions est celle dont on a calculé le χ.

Les μ_k se récupèrent , à la remontada.

Par une double boucle, on évalue d)i) en a_0, on en sort μ_0.

Puis on évalue en a_1, on attrape μ_1.

Etc ...

1007. a) Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $\operatorname{tr}(A) = 0$ et $\operatorname{tr}(A^2) \neq 0$.

Montrer que A est diagonalisable.

b) Soient $n \geqslant 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\operatorname{tr}\left(A^k\right) = 0$

pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$ et $\operatorname{tr}(A^n) \neq 0$.

Montrer que A admet une valeur propre non nulle. Montrer que que A est diagonalisable.

Ind. Noter $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ les valeurs propres non nulles distinctes, de multiplicités $n_1, \ldots, n_k$, et considérer une matrice de Vandermonde.

Sol : Voir exo 76 feuille 4.

b) On peut trigonaliser en conservant les traces de A^k.

Si les vp sont toutes nulles, la dernière équation est incohérente.

On écrit le système qui découle des traces, on vire les nulles.

Il en reste car , une est non nulle au moins.

Si (par absurde) $k < n$, on obtient un VDM non nulle sur les k premières équations,

il aurait 2 sol distinctes, les n_j et que des 0, absurde.

Donc les vp sont 2 à 2 distinctes, c'est DZ.

1008. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable telle que la suite $\left(A^k\right)$ converge vers une matrice L.

Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ les valeurs propres distinctes de A.

a) Que peut-on dire des λ_i ?

b) Montrer que A admet un polynôme annulateur de degré p.

c) Mq les valeurs propres de A sont racines de tous les polynômes annulateurs de A.

En déduire que $(I_n, A, \ldots, A^{p-1})$ est libre.

d) Montrer que, pour $k \in \mathbb{N}$, il existe $P_k \in \mathbb{R}_{p-1}[X]$ tel que $A^k = P_k(A)$.

En déduire qu'il existe $P \in \mathbb{R}_{p-1}[X]$ tel que $L = P(A)$.

Sol : hyper scolaire.

a) Il vient $|\lambda_i| < 1$ ou $\lambda_i = 1$,.

b) Pourquoi pas $\prod(X - \lambda_i)$?

c) Relire le cours.

1009. PYTHON . On munit $\mathbb{R}^4$ de sa structure euclidienne canonique.

Soit σ la réflexion de $\mathbb{R}^4$ par rapport à l'hyperplan d'équation $x + y + 3z + t = 0$.

a) Soit $x \in \mathbb{R}^4$. Montrer que $\sigma(x) = x - 2\langle x, u\rangle u$ où

$u = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}(1, 1, 3, 1)^T$.

En déduire la matrice P_σ de σ dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

b) Soit $A = \begin{pmatrix} 13 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 6 & 4 \\ 0 & 6 & 9 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 9 \end{pmatrix}$.

Montrer que P_σ est une matrice de passage vers une base de diagonalisation de A.

En déduire les valeurs propres de A.

1010. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, u_k

la forme linéaire sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ définie par $u_k : \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} a_j X^j \mapsto a_k$.

a) Montrer que $(u_0, \ldots, u_{n-1})$ est une base de $\mathcal{L}(\mathbb{R}_{n-1}[X], \mathbb{R})$.

b) Soient $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{R}$ distincts et, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$,

v_k la forme linéaire sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ définie par $v_k : P \mapsto P(\alpha_k)$.

Déduire de la question précédente que $(v_0, \ldots, v_{n-1})$ est une base de $\mathcal{L}(\mathbb{R}_{n-1}[X], \mathbb{R})$.

c) Montrer qu'il existe une unique famille $(P_n)_{n\geqslant 0}$ de polynômes telle que :

i) pour tout $n \in \mathbb{N}, P_n$ est de degré n ;

ii) pour tout $n \in \mathbb{N}$, le coefficient dominant de P_n est positif ;

iii) pour tous $m, n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{P_n(t)P_m(t)}{\sqrt{t(1-t)}}\mathrm{d}t = \delta_{m,n}$.

Sol :

a) Bon cardinal, comb lin nulle qu'on applique sur la base canon.

b) Bon cardinal, comblin nulle appliquée sur base canon, vdm ?

Rq lagrange aussi.

c) Produit scalaire, gram Sc, et la fameuse feinte de la droite vect...

1011. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f_n : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(\int_0^1 P(s)s^k \,\mathrm{d}s\right) X^k \in \mathbb{R}_n[X]$.

a) Justifier que f_n est un automorphisme diagonalisable de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Soit M_n la matrice de f_n dans la base canonique.

Soit Y un vecteur colonne. Montrer que $Y^T M_n Y = \displaystyle\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} y_k s^k\right)^2 \,\mathrm{d}s$.

En déduire que les valeurs propres de f_n sont strictement positives.

c) Soit $\lambda_{1,n}$ la plus petite valeur propre de f_n. Montrer que $\lambda_{1,n} \to 0$.

1012. a) Mq les valeurs propres d'une matrice symétrique réelle sont toutes réelle.

Que dire des valeurs propres réelles des matrices antisymétriques réelles ?

b) Soit S l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M^2 + M^T = I_n$.

Montrer que les matrices de S sont diagonalisables et symétriques.

Sol : a) cours ! ! Spectral et 0.

$SX = \lambda X$, on conjugue, on transpose, on multiplie par X à droite.

Pour les antisym, $(AX, X) = -(AX, X)$ car antisym en bon équivlent matrice aussi cf demo symétriques.

Il vient $\lambda \|X\|^2 = -\lambda \|X\|^2$.

b) On secoue, $P(X) = X^4 - 2X^2 + X = X(X-1)(X^2 + X - 1)$

Attention, $(M^T)^2 = (I - M^2)^2 = (M^2)^T = I - M$.

est annulateur scindé simple donc dz.

On a aussi les éventuelles vp. Rq pas (-1).

On a aussi 2 homothéties solutions.

Puis ? ?

Voir 1141.

Rq : 1 vp ssi 0 aussi, $M^T = (I_n - M)(I_n + M)$, on passe au det, le deuxième est non nul.

Rq bis mais voir ce qui suit : M et M^T ont les mêmes vp ?

Donc $\det(M) \neq 0$ ssi $\det(I_n - M) \neq 0$.

Par l'absurde si 0 vp de M, $M = S + A$ car somme directe bien connue.

$MX = 0$ entraine $SX + AX = 0$ et $M^T X = X$, ainsi $SX - AX = X$.

Par différence, $2AX = -X$ absurde par a).

Donc 0 et 1 ne sont pas vp de M.

M est DZ, mais seules les racines de $X^2 + X - 1$ sont recevables ,

après dz ce poly devient annulateur.

On remplace au début, par différence $M = M^T$.

Les solutions sont donc les matrices orthogonalement semblables à $\begin{pmatrix} \alpha I_s & 0 \\ 0 & \beta I_q \end{pmatrix}$.

Analyse

1013. a) La matrice $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Est-elle limite d'une suite de matrices diagonalisables ?

b) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

Mq P est scindé sur $\mathbb{R}$ ssi il existe $c > 0$ tel que, pour tout $z \in \mathbb{C}, |P(z)| \geqslant c|\operatorname{Im}(z)|^n$.

c) Soit (A_k) une suite de matrices diagonalisables sur $\mathbb{R}$ convergeant vers $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$.

Sol :

1. Soit $P = \prod_{i=1}^{n} (X - a_i)$ scindé sur $\mathbb{R}$.

Soit $z = u + iv \in \mathbb{C}$ avec $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

Alors $|P(z)|^2 = \prod_{i=1}^{n} \left((u - a_i)^2 + v^2\right) \geqslant v^{2n}$.

Ainsi $|P(z)| \geqslant |v|^n = |\operatorname{Im} z|^{\deg P}$.

Réciproquement, on suppose :

$$\forall z \in \mathbb{C}, |P(z)| \geqslant |\operatorname{Im} z|^n$$

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $P(z_0) = 0$.

On a donc $\operatorname{Im} z_0 = 0$ c'est-à-dire $z_0 \in \mathbb{R}$.

Ainsi les racines de P dans $\mathbb{C}$ sont réelles, donc P est scindé sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui sont diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $\mathcal{T}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui sont trigonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On va montrer que $\overline{\mathcal{D}} = \mathcal{T}$.

- Soit $A \in \overline{\mathcal{D}}$ et soit $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{D}$ qui converge vers A.

Soit $k \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}$. En particulier χ_{A_k} est unitaire, de degré n, et scindé dans $\mathbb{R}[X]$.

D'après la question 1 , on a :

$$\left|\chi_{A_k}(z)\right| = \left|\det\left(zI_n - A_k\right)\right| \geqslant |\operatorname{Im}(z)|^n$$

Par continuité de l'application déterminant :

$$\lim_{k\to+\infty}\left|\det\left(zI_n - A_k\right)\right| = \left|\det\left(zI_n - A\right)\right|$$

Ainsi : $\forall z \in \mathbb{C}, \left|\chi_A(z)\right| \geqslant |\operatorname{Im} z|^n$.

Donc χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$.

Ainsi $A \in \mathcal{T}$: on a montré $\overline{\mathcal{D}} \subset \mathcal{T}$.

Remarque : de ce qui précède, on déduit aussi que $\mathcal{T}$ est fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Réciproquement, soit M dans $\mathcal{T}$.

Il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, et $T = (t_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure,

telles que $M = PTP^{-1}$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$A_k = T + \operatorname{diag}\left(\frac{1}{k}, \ldots, \frac{n}{k}\right)$$

qui est triangulaire supérieure.

Il n'y a qu'un nombre fini d'entiers k pour lesquels A_k peut avoir au moins

deux coefficients diagonaux identiques.

Il existe donc k_0 tel que A_k, donc $M_k = PA_kP^{-1}$, soit diagonalisable pour $k \geqslant k_0$.

Par construction, $\lim_{k\to+\infty} A_k = T$, donc $\lim_{k\to+\infty} M_k = PTP^{-1} = M$.

Ainsi M est limite d'une suite de matrices dz, donc est dans l'adhérence de $\mathcal{D}$.

Finalement, on a montré l'égalité $\bar{D} = \mathcal{T}$.

1014. PYTHON. Soient $a, b > 0, u_0, u_1 > 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \dfrac{u_{n+1} + a}{u_n + b}$.

a) Représenter, pour différentes valeurs de u_0, u_1, a, b, les valeurs successives de (u_n).

b) Exprimer u_{n+3} en fonction de u_n et u_{n+1}.

c) Montrer qu'il existe une constante M ne dépendant que de a et b telle que,

pour tout $n \geqslant 3, u_n \leqslant M$.

Montrer que la suite (u_n) est minorée.

Posons, pour tout $n, \alpha_n = \sup \{u_k, k \geqslant n\}$ et $\beta_n = \inf \{u_k, k \geqslant n\}$.

d) Justifier que les suites (α_n) et (β_n) sont bien définies et qu'elles convergent.

e) Soient α_∞ et β_∞ les limites des suites (α_n) et (β_n).

Montrer que $\alpha_\infty \leqslant \dfrac{\alpha_\infty + a}{\beta_\infty + b}$ et $\beta_\infty \geqslant \dfrac{\beta_\infty + a}{\alpha_\infty + b}$.

En déduire $\alpha_\infty = \beta_\infty$.

1015. Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*, P_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(X - k)$.

a) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n$.

b) Montrer que P_n' admet une unique racine dans $]0, 1[$. On la note λ_n.

c) Simplifier $\dfrac{P_n'}{P_n}$.

d) En déduire un DL asymptotique de λ_n quand $n \to +\infty$.

Sol : a) Classique comparaison série-intégrale.

b) P est scindé simple sur $\mathbb{R}$, donc on applique Rolle, mais aïe entre 1 et 2...

c) Classique P scindé simple sur $\mathbb{R}$, $\dfrac{P_n'}{P_n} = \displaystyle\sum_1^n \frac{1}{X-k}$.

d) $\displaystyle\sum_1^n \frac{1}{\lambda_n - k} = 0$.

On encadre $\lambda_n - k$, pour k de 3 à n.

On obtient $\dfrac{1}{\lambda_n - 1} + \dfrac{1}{\lambda_n - 2} \underset{\infty}{\sim} \ln(n)$.

Donc attention aux signes ! ! $\dfrac{1}{\lambda_n - 1}$ tend vers $+\infty$, λ_n tend vers 1.

DL de $\lambda_n = 1 + \dfrac{1}{\ln(n)} + o(\dfrac{1}{\ln(n)})$.

1016. a) Montrer que deux matrices semblables ont même trace.

Que dire de la réciproque ?

Même question en remplaçant trace par déterminant puis par polynôme caractéristique.

b) Soit $G = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}),\ \det A = 1\}$.

Déterminer une condition suffisante sur les traces pour que deux matrices

$A, B \in G$ soient semblables.

c) Soit $\varphi : \mathbb{R} \to G$ de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifiant $\varphi(0) = I_2$ et $\varphi'(0) = A$.

Montrer que $\operatorname{tr} A = 0$.

1017. a) Justifier la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^2}\, \mathrm{d}x$.

b) Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telle qu'existe un réel $C > 0$ tel que,

pour tout $t \in \mathbb{R}, |f(t)| \leqslant \dfrac{C}{1+t^2}$.

Justifier l'existence, pour tout $h > 0$, de $S(h) = h\sum_{n=0}^{+\infty} f(nh)$.

c) On fixe $h > 0$ et l'on considère $\varphi_h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}; t \mapsto f\left(\left\lfloor \frac{t}{h} \right\rfloor h\right)$.

Montrer que $S(h) = \int_0^{+\infty} \varphi_h(t)\mathrm{d}t$.

d) Montrer que $S(h)$ tend vers $\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ quand h tend vers 0 .

1018. PYTHON. Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*, f_n : x \mapsto \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.

a) Tracer $f_{10}, f_{100}, f_{1000}$ et exp ; que peut-on conjecturer ?

Établir cette conjecture. La prouver.

c) Montrer que, pour $x \in \mathbb{R}^+$ et $n \in \mathbb{N}^*, x \geqslant \ln(1+x) \geqslant x - \frac{x^2}{2}$ et $e^x \geqslant \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.

a) Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}^+$.

Montrer que la suite (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers exp et, plus précisément,

que $\|f_n - \exp\|_{\infty,[a,b]} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$.

1019. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $u_n(x) = \frac{(-1)^n n}{n^2 + x}$.

a) Établir la convergence simple de la série de terme général $u_n(x)$ sur $\mathbb{R}^+$ et,

pour $a > 0$, sa convergence uniforme sur $[0, a]$.

b) Soit (a_n) une suite croissante de réels positifs ou nuls.

i) Montrer que $0 \leqslant (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k \leqslant a_n$.

ii) Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

1020. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soient $u_n(x) = (-1)^n \frac{x^n}{1 - x^n}$ et $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1, 1[$.

b) Montrer que f est la somme d'une série entière sur $]-1,1[$.

1021. a) Rappeler le développement en série entière de $\ln(1+x)$. Montrer : $\ln 2=\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k 2^k}$.

Pour $x \in]0,1[$ et $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $E_k(x)=\lfloor 2^k x\rfloor-2\lfloor 2^{k-1} x\rfloor$.

b) Justifier que, pour $x \in]0,1[$ et $k \in \mathbb{N}^*, E_k(x) \in\{0,1\}$.

c) Montrer que, pour $x \in]0,1[, x=\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{E_k(x)}{2^k}$..

1022. a) Soit $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(0)=0$ et $\varphi(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$ pour $x \neq 0$.

Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $\mathbb{R}$ et calculer toutes ses dérivées en 0 .

Existe-t-il un voisinage de 0 sur lequel la fonction φ coinncide avec sa série de Taylor ?

b) Soit E l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ qui coincident sur un voisinagé de 0 avec leur série de Taylor en 0 . Montrer que E est un espace vectoriel et que E est stable par produit.

1023. a) Montrer la convergence de Ia suite de terme général $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}-\ln n$.

b) On pose $a_1=-1$ et, pour $n \geqslant 2, a_n=-\frac{1}{n}-\ln \left(1-\frac{1}{n}\right)$.

Déterminer les rayons de convergence des séries entières

$f: x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \ln (n) x^n$ et $g: x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$.

c) Que peut-on dire de $g(1)$? En déduire un équivalent simple de f en 1.

1024. PYTHON. Soient $n \in \mathbb{N}^*, A_0, \ldots, A_{n-1}$ les points du plan complexe d'affixe les racines n-ièmes de l'unité, M_n le nombre d'ensembles de segments disjoints ayant pour extrémités ces points (par exemple, avec $n=4,\left\{\left[A_0, A_2\right],\left[A_1, A_3\right]\right\}$ est un tel ensemble). On vérifie que $M_3=4$ avec les ensembles de segments : $\emptyset,\left\{\left[A_0, A_1\right]\right\},\left\{\left[A_1, A_2\right]\right\}$ et $\left\{\left[A_0, A_2\right]\right\}$. Par convention, on pose $M_0=M_1=1$.

a) Déterminer M_4 et M_5.

b) Justifier que, pour $n \in \mathbb{N}^*, M_{n+1} = M_n + \sum_{i=0}^{n-1} M_i M_{n-1-i}$.

c) Écrire un programme Python renvoyant la liste des $M_0, \ldots, M_n$.

Vérifier que $M_n \leqslant 3^n$ pour $n \leqslant 20$.

On note, pour tout $z \in \mathbb{C}, M(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} M_n z^n$.

d) Soit z de module strictement inférieur à $\frac{1}{3}$.

Montrer que cette somme est bien définie puis que $M(z) = 1 + zM(z) + z^2 M(z)^2$.

e) Calculer $M(z)$.

1025. Soit $a_n = \int_0^{+\infty} e^{-t} (\sin t)^{2n} \, \mathrm{d}t$.

a) Montrer que la suite (a_n) est bien définie et déterminer sa limite.

b) Trouver une relation entre a_n et a_{n-1}.

c) Soit $b_n = \sqrt{n} a_n$. Établir la convergence de la série de terme général $\ln \left(\frac{b_n}{b_{n-1}} \right)$.

Sol :

a) La convergence est classique, cie , dominée par e^{-t}.

On applique le thm de cv dominée, domination par e^{-t},

cv simple vers une fct cpm d'intégrale nulle.

b) Attention aux erreurs de calculs.

- $a_n = a_{n-1} - \int_0^{\infty} e^{-t} \cos^2(t) (\sin(t))^{2n-2} dt (*)$.
- 2 IPP crochets cv et nuls : $(2n+1) a_n = 2n(2n-1)(a_{n-1} - a_n)$, par (*).

Ipp à la Wallis pour la seconde.

c) On range, on transforme en b_n, il vient :

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}} . \frac{4n^2-2n}{4n^2+1} = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1-\frac{1}{2n}\right) \left(1-\frac{1}{4n^2}\right)^{-1}.$$

On a fait un DL d'ordre 2 ss JAMAIS calculer les termes en n^{-2}.

$\ln\left(\frac{b_n}{b_{n-1}}\right) = \ln(...) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

1026. PYTHON. Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t+1}\ \mathrm{d}t$.

a) Tracer la courbe représentative de F à l'aide de Python.

Que peut-on conjecturer sur le domaine de définition, les variations et limites de F ?

b) Démontrer ces conjectures.

c) Montrer que F est solution d'une équa diff d'ordre 1 à coefficients constants.

En déduire que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son domaine de définition.

1027. Soient f une fonction continue sur $[0, 1]$, à valeurs positives ou nulles et,

pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\mathrm{d}t$.

a) Justifier la convergence de $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n u_n$ et montrer que $S = \displaystyle\int_0^1 \frac{f(t)}{1+t}\ \mathrm{d}t$.

b) Montrer : $S = \displaystyle\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 \left(\frac{1-t}{2}\right)^n f(t)\mathrm{d}t$ et $\ln(2) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{p+1}(p+1)}$.

c) Soit $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}$.

i) Trouvez un encadrement de $\ln(2) - S_n$.

ii) Trouvez un équivalent de $\ln(2) - S_n$.

iiii) Comment obtenir un développement asymptotique de $\ln(2) - S_n$?

Sol voir centrale version approx retours élèves...

b) Harmonique alternée, dse de $\ln(1-x)$ en $1/2$.

c i) application du controle ds cssa!!

c)ii) Pareil en mieux voir td (cssa)demi somme des restes consécutifs...

et demi diff des restes voir boquet rms mines2021

On a pour équivalent $\pm\dfrac{(-1)^n}{2n}$.

iiii) acc de cv voir td et cssa +++

1028. Soit $A : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$.

a) Supposons, dans cette question, qu'il existe $S : \mathbb{R} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$

telle que $S^{-1}(t)A(t)S(t) = A(0)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Montrer qu'il existe $B : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ cie tq, $\forall t \in \mathbb{R}, A'(t) = B(t)A(t) - A(t)B(t)$.

b) Supposons, dáns cette question, qu'il existe $B : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ continue telle que,

pour tout $t \in \mathbb{R}, A'(t) = B(t)A(t) - A(t)B(t)$.

Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}, A(t)$ est semblable à $A(0)$.

Sol : très dur , me demander si affinité.

1029. a) Déterminer le nombre de solutions de $xe^{-x} = \lambda$ en fonction de $\lambda \in \mathbb{R}$.

b) Trouver les extrema de $f : (x, y) \mapsto xye^{-x-y}$ sur $\mathbb{R}^2$.

c) Déterminer les λ tels que l'ensemble $\left\{(x, y) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^2, f(x, y) = \lambda\right\}$ est non vide.

1030. Soients $g \in \mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right)$ et $S(g) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = g(x, y)\}$.

a) Montrer que $S(g)$ n'a que des points réguliers.

b) On cherche les fonctions g telles que ∇g soit constamment orthogonal à $(2, 1)$ ou,

ce qui revient au même, telles que $(E) 2\dfrac{\partial g}{\partial x} + \dfrac{\partial g}{\partial y} = 0$.

i) Montrer que l'endomorphisme $u : (x, y) \mapsto (x - 2y, y)$ de $\mathbb{R}^2$ est inversible.

ii) Pour h de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, on pose $f = h \circ u^{-1}$.

Calculer les dérivées partielles de f. En déduire les solutions de (E).

1031. Soient $n \in \mathbb{Z}$ et (E_n) l'équation différentielle $tu'' + tu' - n^2 u = 0$.

a) Déterminer les $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $u_\alpha : t \mapsto t^\alpha$ soit solution de (E_n) sur $\mathbb{R}^{+*}$.

b) Résoudre (E_n) sur $\mathbb{R}^{+*}$.

c) Soient f, g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial g}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{\partial g}{\partial x}$.

On pose $\tilde{f} : (r, \theta) \mapsto f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ et $\tilde{g} : (r, \theta) \mapsto g(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

Relier $\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial r}$ à $\dfrac{\partial \tilde{g}}{\partial \theta}$ puis $\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}$ à $\dfrac{\partial \tilde{g}}{\partial r}$.

d) Montrer qu'il existe $a_n \in \mathbb{C}$ tel que, pour tout $r > 0$, $\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(r, \theta) e^{in\theta} \mathrm{d}\theta = a_n r^{|n|}$.

1032. PYTHON. Soient $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (2x^2 + 3y^2)\, e^{-\left(x^2+y^2\right)}$ et,

pour $R > 0$, $D_R = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leqslant R\right\}$.

a) Tracer la surface représentative de la fonction f sur $[-2, 2]^2$.

b) Montrer que f admet un minimum sur $\mathbb{R}^2$;

déterminer sa valeur et le point en lequel il est atteint.

c) Soit $a > 0$. Montrer qu'il existe $R_a > 0$ tel que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \backslash D_{R_a}$, $f(x, y) \leqslant a$.

d) Montrer que f admet un maximum M sur $\mathbb{R}^2$. Calculer M.

e) Pour $c \in [0, M]$, soit $\Gamma_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = c\}$.

Tracer Γ_c pour $c \in \{0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.75, 0.8, 0.9\}$.

1033. PYTHON. Soit $f : (x, y) \mapsto \frac{1}{2}(\mathrm{ch}(2y) - \cos(2x))$.

$r \in \mathbb{R}^+$, $\mathcal{B}_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leqslant r^2\}$, $\Omega_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 < r^2\}$

et $\mathcal{C}_r = \mathcal{B}_r \backslash \Omega_r$.

a) Soit $r > 0$. Avec Python, conjecturer les variations de

$g_r : \theta \mapsto f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, la parité de g_r, les points où g_r atteint son maximum.

b) Préciser la nature topologique des parties $\mathcal{B}_r, \Omega_r$ et $\mathcal{C}_r$.

c) Justifier que f admet un minimum sur $\mathbb{R}^2$ atteint en $(0,0)$.

d) Montrer que f admet un maximum, noté $M(r)$, sur $\mathcal{B}_r$.

e) Écrire une fonction Python renvoyant $M(r)$.

Tracer sur un même graphique la courbe de $r \mapsto M(r)$ et celle de $r \mapsto \mathrm{sh}^2(r)$ sur $[1,4]$.

Conjecturer un résultat puis le démontrer.

Probabilités

1034. Soient X et Y deux va indépendantes suivant la loi uniforme sur $[\![1,6]\!]$.

a) Déterminer la loi de $X+Y$.

b) Déterminer la décomposition en facteurs irr de $1+T+T^2+T^3+T^4+T^5$ dans $\mathbb{R}[T]$.

c) Soient X' et Y' deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $[\![1,6]\!]$.

Montrer que si $X'+Y'$ et $X+Y$ suivent la même loi alors X' et Y' suivent la loi uniforme.

1035. PYTHON. On dispose de n urnes $U_1, \ldots, U_n$ et n boules numérotées de 1 à n, que l'on place indépendamment dans les urnes, chaque boule ayant la probabilité $\frac{1}{n}$ d'être placée dans l'urne U_i pour chaque $i \in [\![1,n]\!]$. On note X_n le nombre d'urnes vides après le placement des n boules.

a) Écrire une fonction Python different qui prend une liste l et qui renvoie le nombre d'éléments distincts de l. Par exemple, different $([1,2,3,1,2])$ renvoie 3 .

b) Écrire une fonction Python simulX qui prend un entier n et renvoie une simulation de X_n.

c) Pour tout $i \in [1,n]\!]$, on note Y_i la variable aléatoire valant 1 si l'urne U_i est vide, 0 sinon. Déterminer la loi de Y_i, son espérance et sa variance.

d) Montrer que $X_n = Y_1 + \cdots + Y_n$. Est-ce que la loi de X_n est binomiale ?

e) Calculer l'espérance de X_n.

f) Écrire une fonction Python esperance X qui prend en entrée un entier n et renvoie une valeur approchée de $\mathbf{E}(X_n)$.

g) Calculer la covariance de Y_i et Y_j pour $i \neq j$. En déduire la variance de X_n.

1036. Soient X et Y deux va indépendantes de loi géométrique de paramètre p.

Soit $M = \begin{pmatrix} X & Y \\ Y & X \end{pmatrix}$. Soient I, S avec $I \leqslant S$ les valeurs propres de M.

a) Déterminer les expressions de I et S en fonction de X et Y.

b) Quelle est la probabilité que la matrice M soit inversible ?

c) Calculer la covariance de I et S. Ces variables sont-elles indépendantes ?

d) Montrer que, pour tout $k \geqslant 2, \mathbf{P}(S = k) = (k-1)p^2(1-p)^{k-2}$.

1037. Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires indépendantes

suivant la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$.

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*, S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

a) Pour $t \in \mathbb{R}$, justifier que $\exp(tX_n)$ admet une espérance et la calculer.

Montrer que $\mathbf{E}(\exp(tX_n)) \leqslant e^{t^2/2}$ pour tout $(n, t) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}$.

b) Justifier que $\exp(tS_n)$ admet une espérance et la calculer.

Déterminer la limite de $\mathbf{E}(\exp(tS_n/\sqrt{n}))$ quand n tend vers $+\infty$.

1038. Soit (X_n) une suite i.i.d. de variables aléatoires de Rademacher

c'est-à-dire telle que $\mathbf{P}(X_n = 1) = \mathbf{P}(X_n = -1) = \dfrac{1}{2}$.

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ et $N = \sum_{n=1}^{+\infty} 1_{S_n=0}$.

a) Donner la signification des événements $(S_n = 0), (N < +\infty), (N = +\infty)$.

Exprimer $(N < +\infty)$ et $(N = +\infty)$ à partir des événements $(S_k = 0)$.

b) Montrer que $\mathbf{P}(N < +\infty) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(S_n = 0)\, \mathbf{P}(\forall k \in \mathbb{N}^*, S_k \neq 0)$.

c) On admet que la série $\sum \mathbf{P}(S_n = 0)$ diverge. En déduire $\mathbf{P}(N = +\infty)$.

d) Montrer que la série $\sum \mathbf{P}(S_n = 0)$ diverge.

Ind. Se ramener à des variables de Bernoulli.

Voir aussi centrale info camille.

```
import matplotlib . pyplot as plt
import numpy as np
from mpl_toolkits. mplot3d import Axes3D
from scipy. integrate import odeint
from math import *
from random import *
import numpy. random as rd
from numpy. polynomial import Polynomial
import numpy. linalg as alg
import scipy. integrate as integr
def pour_X (n):
    r=rd. random (n)
    for i in range (n):
        s=0
        for j in range (i +1):
            s=s+r[j]
        r[i]=s
    return (r)
U = Polynomial ([1])

def Lambda (i,k,X):
    Pi=U
    for j in range (n):
        F= Polynomial ([-X[j], 1])
        if j!= i and j!=k:
```

```
            Pi =Pi*F*F
        else:
            Pi =Pi*F
    return (Pi)
#comparer avec le mien, attention aux "n"
n=5
Mu = np.random .randint (10, size=(n))
Ad= np. random . randint (10, size=(n))
alpha =randint (1 ,10)

def Def (Mu ,Ad ,alpha ,n):
    N=np. zeros ((n+1,n+1))
    for i in range (n):
        N[i,i]= Ad[i]
        N[n,i]= Mu[i]
        N[i,i +1]=1
    N[n-1,n]=1
    N[n,n]= alpha
    return (N)
#comparer au mien
def favilleP (Ad ,n):
    pi =Polynomial ([1])
    l=[ pi]
    for i in range (n):
        pi=pi* Polynomial ([-Ad[i] ,1])
        l. append (pi)
    return (l)
def prod_l (Lambda ,n):
    pi =Polynomial ([1])
    for i in range (n):
        pi=pi* Polynomial ([- Lambda [i] ,1])
    return (pi)
def passage (Ad ,n):
    P=np.zeros ((n+1,n +1))
    fP =familleP (Ad ,n)
    j=0
    while (j<n+1):
        for x in fP:
            for i in range (j):
                P[i,j]=(x. coef)[i]
                j+=1
    return (P)
#comparer...
```

```
a =1/2/3**(1/2)
u=np. array ([[ a],[a] ,[3*a],[a]])
print (" ____________________________ ")
print (u)
print (" ____________________________ ")
def ps(x,y):
    s=0
    for i in range (4):
        s+=x[i ,0]*y[i,0]
    return (s)
def sigma (x):
    return (x -2* ps(x,u)*u)
def base_c ():
    b=[ np.array ([[1] ,[0] ,[0] ,[0]])]
    b.append (np. array ([[0] ,[1] ,[0] ,[0]]))
    b.append (np. array ([[0] ,[0] ,[1] ,[0]]))
    b.append (np. array ([[0] ,[0] ,[0] ,[1]]))
    #b=[]
    #I=np.eye (4)
    #for i in range (4):
    # b.append (I[0:3 , i :i])
    return (b)
def m_sigma ():
    b=base_c ()
    M=sigma (b [0])
    for i in range (3):
        M=np. concatenate((M,sigma (b[i+1])) , axis =1)
    return (M)
def simp(M):
    for i in range (4):
        for j in range (4):
            if abs (M[i,j ]) <0.001:
                M[i,j]=0
    return (M)
def f(n):
    def g(x):
        return ((1+x/n)** n)
    return (g)

tabcouleur=['green','blue','magenta','yellow']
def Dessin (a,b,N,f,col ):
    X=np. linspace (a,b,N)
    Y=[f(X[i]) for i in range (N)]
```

```
    plt .plot(X,Y,color =col )
Dessin (-1,4,20, exp , tabcouleur [0])
for i in range (3):
    Dessin (-1,4,20, f (10**( i+1)) , tabcouleur[i+1])
plt .show()
#plt . close ()
def F(x):
    def g(t):
        return (exp (-x*t)/( t +1))
    return ( integr . quad(g, 0, np.inf )[0])

def Dessin (a,b,N,f,col ):
    X=np. linspace (a,b,N)
    Y=[f(X[i]) for i in range (N)]
    plt .plot(X,Y,color =col )

Dessin (0.1 ,5 ,100 , F, tabcouleur [0])

ax = Axes3D (plt . figure ())
def f(x,y):
    return ((2*x **2+3* y**2)* np.exp(-x**2- y **2))

def Dessin2 (a,b,c,d,pas ,f):
    X = np. arange (a,b, pas )
    Y = np. arange (c, d, pas )
    X, Y = np. meshgrid (X, Y)
    Z = f(X, Y)
    ax. plot_surface(X, Y, Z)

Dessin2 (-2,2,-2,2,0.02 , f)

plt .show()

#plt . close ()

def Niveau (a,b,c,d,pas ,f, liste ):
    X = np. arange (a,b, pas )
    Y = np. arange (c, d, pas )
    X, Y = np. meshgrid (X, Y)
    Z = f(X, Y)
    #plt. axis(' equal ')
    plt .contour (X, Y, Z, liste)
#Dessin2 (-2,2,-2,2,0.02, f)
```

```
liste =[0.3 ,0.4 ,0.5 ,0.6 ,0.7 ,0.75 ,0.8 ,0.9]
a=2
Niveau (-a,a,-a,a ,0.02 , f, liste )
plt .show()

n=20

l= rd.randint (50, size=(n))

def different (l):
    n=len (l)
    m=max (l)
    t=[0 for i in range(m +1)]
    compteur =0
    for i in range (n):
        if t[l[i ]]==0:
            compteur +=1
            t[l[i]]=1
    return ( compteur )
def simul (n):
    tab_des_urnes =[[] for i in range (n)]
    for i in range (n):
        tirage =rd. randint (1,n)
        tab_des_urnes[ tirage ]. append (i)
    x=0
    for i in range (n):
        if tab_des_urnes[i]==[]:
            x+=1
    print ( tab_des_urnes)
    return (x)
def esperanceX (N,n):
    S=0
    for k in range (N):
        S+= simul (n)
    return (S/N)

def esperanceT (n):
    return ((n*(1 -1/ n )**(n)))

#for i in range (4):
    #n =10**( i+1)
    #for j in range (6):
```

```
        #print ([i,esperanceX (10**( j+1), n), esperanceT (n)])

n=3
I=np.eye(n)
A = np. random . randint (10, size=(n,n))
A=A+np. transpose (A)

def car (M):
    return (np .dot (M,M))
def U(p):
    S=I
    for q in range (1,p +1):
        S =1/2*( S+np.dot(A,alg .inv (S)))
    return (S)
def U_rec (p):
    if p==0:
        return (I)
    else:
        return (1/2*( U(p -1)+ np.dot (A,alg.inv(U(p -1)))))

print (A)
for p in range (5):
    print (car (U(2* p)))
    print ('_____________________')

n=20
l= rd.randint (50, size=(n))

def Bern_pm ():
    return (2* rd. binomial (1, 0.5) -1)

def Mat_al (n):
    M=np. zeros ((n,n))
    for i in range (n):
        for j in range (n):
            M[i,j]= Bern_pm ()
    return (M)

def D(n):
    return (alg .det (Mat_al (n)))

def esp (n,N):
    E=0
```

```
    V=0
    for k in range (N):
        E+=D(n)
        V+=D(n )**2
    return ([E/N,V/N-(E/N )**2])

def essai ():
    for n in [2 ,3 ,5 ,7]:
        print (esp(n ,10000))
essai ()

p=0.25
n=100

def Ph(a):
    if a==1:
        def g(t):
           return (1/4/t/t)
        return (g)
    else:
        def g(t):
            return (2* exp (-2* t*t))
        return (g)

def u(n,p):
    def g(t):
        S=rd. binomial (n, p, 100)
        pi =0
        for x in S:
            if abs (x-p)>t*sqrt(n):
                pi +=1
        return (pi /100)
    return (g)
def Dessin (a,b,N,f,col ):
    X=np. linspace (a,b,N)
    Y=[f(X[i]) for i in range (N)]
    plt .plot(X,Y,color =col )

plt .xlim (0 ,3)
plt .ylim (0 ,50)

Dessin (0,3,100, Ph (1), tabcouleur [0])
Dessin (0,3,100, Ph (2), tabcouleur [1])
```

```
Dessin (0,3,100, u(n,p), tabcouleur [2])

plt .show()
#plt . close ()
```