RMS Centrale
PSI *
Année 2022

Année 3.

1086. Soient $\omega \in \mathbb{C}$ et $P = X^3 + \omega X^2 - \bar{\omega} X - 1$.

a) Préciser le nombre de racines rélles de P en fonction de ω.

b) Montrer que P admet au moins une racine de module 1 .

c) Vérifier que, pour toute racine z de $P, |z| \leqslant 1 + |\omega|$.

Sol à la va vite : exo 8 ddl sup, je fais plus simple.

Si α racine, alors $1/\overline{\alpha}$ aussi(*).

Pour a) on traite ω réel, $X = 1$ sol, puis on simplifie,

on étudie le discriminant $\Delta = (r+1)^2 - 4$.

Si ω complexe, somme racines complexe donc au - un complexe,

mais le produit vaut 1 donc au moins 2 , on remplace attention à $\pm i$.

b) Relire ce qui précède, tout y est ! !

Car si ω vrai complexe, on applique (*) puis on regarde le produit.

c) Si cette racine z est de module inférieur à 1 c'est immédiat.

Sinon, $-z^3 = \omega z^2 - \bar{\omega} z - 1$, donne par IT, $|z|^3 \leqslant 1 + |\omega|(|z| + |z|^2)$.

On sépare suivant $|\omega|$, si supérieur à 1.

$|z|^3 \leqslant |\omega| \frac{|z|^3}{|z|-1}$ on utilise $|z| > 1$.

Il vient $(|z| - 1) \leqslant |\omega|$ voilà !

Puis l'autre cas...

1087. Soit $(L_0, \ldots, L_n)$ une famille de $\mathbb{R}_n[X]$ vérifiant : $\forall (i,k) \in \{0, \ldots, n\}, L_k(i) = \delta_{i,k}$.

a) Donner la forme factorisée des L_k et exprimer le coeff dominant avec des factorielles.

b) Montrer que $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

c) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifiant $\forall k \in \{0, \dots, n\}, P(k) = k^n$.

Exprimer P de deux manières différentes.

d) Donner une expression simplifiée de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) (-1)^{n-k} k^n$.

e) Donner la dimension de $\mathcal{L}\left(\mathbb{R}_n[X],\ \mathbb{R}\right)$.

Mq $\exists !$, $(n+1)$-uplet $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tq, $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\displaystyle\int_0^n P(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k P(k)$

Sol :

Pour rappel : Base de Lagrange $L_k[X] = \dfrac{\displaystyle\prod_{j \neq k}^{n} (X - j)}{\displaystyle\prod_{j \neq k}^{n} (k - j)}$, de degré n.

a) Au numérateur, c'est unitaire, le dénominateur est $k!(-1)^{n-k}(n-k)!$.

b) C'est du cours, mais là, il faut refaire, on écrit une CL, on applique sur chaque entier, coeffs nuls, libre, on peut utiliser la cardinalité, $P = \displaystyle\sum_{0}^{n} P(k) L_k$.

c) P est unique par interpolation, X^n est recevable...

Mais aussi, $P = \displaystyle\sum_{0}^{n} k^n L_k = X^n$.

d) On compare les termes dominants en utilisant a).

$1 = \displaystyle\sum_{0}^{n} \frac{k^n (-1)^{n-k}}{k!(n-k)!} = n! \sum_{0}^{n} (-1)^{n-k} k^n \binom{n}{k}$.

e) La dimension est $n+1$ voir cours sup, dim des applications linéaires de E vers F.

Il s'agit de l'égalité de deux formes linéaires, on évalue sur la base de Lagrange.

$\lambda_k = \displaystyle\int_0^n L_k$ qui est donc CNS.

1088. Soit $\Delta : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto P(X+1) - P(X)$.

On pose $Q_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*, Q_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(X-k)$

a) Montrer que $(Q_0, \ldots, Q_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Calculer $\Delta\left(Q_n\right)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

c) Préciser $\operatorname{Ker}\Delta$ et $\operatorname{Im}\Delta$.

d) Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ tel que $f \circ \Delta = \Delta \circ f$.

Mq il existe une suite $(u_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tq, pour tout $P \in \mathbb{R}[X], f(P) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \Delta^n(P)$.

Sol : Classique, je détaille si on me le demande.

1089. $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ les polynômes tq $P_0 = 1$ et $k \in [1, n]$, $P_k = X(X-1)\cdots(X-k+1)$

a) Montrer que $(P_0, \ldots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Soient $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{N}^*$ et $b_0 = 0$.

On pose $Q = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i X^{b_i}$. On suppose qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q = (1-X)^n P$.

b) Exprimer, pour $k \in [\![0, n]\!], \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i P_k\left(b_i\right)$ en fonction de P.

c) $i \in [\![0, n]\!], B_i = (1, b_i, \ldots, b_i^n)$. Exprimer $S = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i B_i$ en fonct de $\mu = (-1)^n n! P(1)$.

Sol : Classique, je détaille si on me le demande.

1090. a) Soit $u : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto P' \in \mathbb{R}_n[X]$.

Exhiber une base de $\mathbb{R}_n[X]$ dans laquelle la matrice de u n'a que des coeff 0 ou 1.

b) Soit $Q \in \mathbb{R}_n[X]$. Montrer qu'il existe un unique $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P - P' = Q$.

Montrer que, si Q est à valeurs positives, il en est de même pour P.

Sol : Classique, je détaille si on me le demande.

1091. Soient $a_0, \dots a_{N-1} \in \mathbb{C}, \theta \in \mathbb{R}$.

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{N-2} & a_{N-1} \\ a_{N-1} & a_0 & a_1 & & a_{N-2} \\ a_{N-2} & a_{N-1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & \cdots & a_{N-2} & a_{N-1} & a_0 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} e^{i\theta} \\ e^{2i\theta} \\ \vdots \\ \vdots \\ e^{Ni\theta} \end{pmatrix}.$$

a) Exprimer A comme polynôme en J.

b) Montrer que J est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que V soit un vecteur propre de J.

c) Montrer que A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

Exhiber $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP$ est diag. En déduire une expression de $\det(A)$.

Sol : Classique, je détaille si on me le demande.

1092.Bel exercice de référence... Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ linéaire telle que

$f(I_n) = I_p$ et $f(AB) = f(A)f(B)$ pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit $\Phi : M \to \mathrm{tr}(f(M))$.

a) Justifier que, pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \Phi(AB) = \Phi(BA)$.

b) En déduire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\Phi : M \mapsto \alpha\,\mathrm{tr}(M)$.

c) Montrer que n divise p.

d) Montrer que, si A est diagonalisable, alors $f(A)$ est diagonalisable.

e) Dans le cas $n = p = 2$, montrer que f est bijective.

Sol :

a) Facile car, $\Phi(AB) = \mathrm{tr}(f(AB)) = \mathrm{tr}(f(A)f(B)) = \mathrm{tr}(f(B)f(A)) = \Phi(BA)$.

b) Classique, $\forall i, j, k, l, \Phi(E_{ij}.E_{kl}) = \Phi(E_{kl}.E_{ij}) = \delta_j^k \Phi(E_{il}) = \delta_i^l \Phi(E_{kj})$.

Pour $i \neq l, j = k(qcq), \Phi(E_{il}) = 0$.

Pour $i = l, j = k(qcq), \Phi(E_{ii}) = \Phi(E_{kk}) = \alpha$.

c) - On applique 2) avec $M = I_n$, il vient $p = \alpha n$.

- Mais pourquoi α est-il entier ?

$\Phi(E_{kk}) = \alpha$, mais E_{kk} est un projecteur, donc $f(E_{kk})$ aussi.

$\Phi(E_{kk}) = \mathrm{tr}(f(E_{kk}))$, qui est donc la trace d'un projecteur, bref son rang qui est entier !

d) A est donc annulé par un polyn scindé simple (Q), et comme $f(A^s) = (f(A))^s$.

Il vient $Q(f(A)) = 0$, voilà.

e) - Si $P \in GL(n)$, alors $(f(P))^{-1} = f(P^{-1})(*)$.

- 2 matrices semblables ont la même image par f.

car $f(PMP^{-1}) = f(P)f(M)f(P^{-1}) = f(M)(**)$.

Par thm du rang, l'injectivité entrainerait la bijectivité.

Le noyau ; $f(A) = 0$ entraine A non inversible (*).

Donc A semblable à $\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$, mais par b) $\mathrm{tr}(A) = 0$.

Bref $\gamma = 0$, puis on utilise $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a $f\left(\begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 0$.

Qui est aussi de trace nulle par la même idée, donc $A = 0$.

1094. PYTHON. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On s'intéresse au problème FL (n) suivant :

étant donnés $a_0, \ldots, a_{n-1}, \lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{C}$,

existe-t-il une matrice dont les coeff diagonaux sont $a_0, \ldots, a_{n-1}$ et les vp sont $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1}$?

a) Écrire une fonction Python prenant en entrée des complexes $a_0, \ldots, a_{n-1}, \mu_0, \ldots, \mu_{n-1}, \alpha$

et renvoyant la matrice $\begin{pmatrix} \alpha_0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} & 1 \\ \mu_0 & \cdots & \cdots & \mu_{n-1} & \alpha \end{pmatrix}$.

b) Montrer que le problème FL(2) admet une solution si et seulement si $a_0+a_1=\lambda_0+\lambda_1$.

Préciser une solution sous cette condition.

c) $FL(3)$ admet-il une sol pour $a_0=1, a_1=-1, a_2=0, \lambda_0=1, \lambda_I=2$ et $\lambda_2=-3$?

d) Soient $a_0,\dots,a_{n-1}\in\mathbb{C}$. On pose, pour $k\in[\![0,n-1]\!]$, $P_k=\prod_{i=0}^{k-1}(X-a_i)$.

e) Justifier que la famille $(P_0,\dots,P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$,

puis qu'il existe $\mu_0,\dots,\mu_{n-1}$ tels que $\prod_{k=0}^{n-1}(X-\lambda_k)=P_n-\sum_{k=0}^{n-1}\mu_k P_k$

1093. Pour $M\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, on pose $M^*=\bar{M}^T$.

Soient $\mathcal{A}=\{M\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C}); M^*=-M, \mathrm{tr}(M)=0\}$ et $\mathcal{G}=\{M\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C}); M^*M=I_2, \det(M)=1\}$

a) Montrer que $\mathcal{A}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et préciser sa dimension.

b) L'ensemble $\mathcal{A}$ est-il un $\mathbb{C}$-espace vectoriel ?

c) Caractériser $\mathcal{A}\cap\mathcal{G}$.

d) Une matrice appartenant à $\mathcal{G}$ est-elle diagonalisable ?

Sol : Si vous trouvez une incohérence ou un oubli, me le dire...Exo curieux.

a) La stabilité additive est facile, seule la multiplication par un réel est à regarder,

or le conjugué d'un réel est lui même.

On prend une matrice 2×2 complexe quelconque, on traduit les contraintes,

il vient $\begin{pmatrix} i\alpha & \beta+i\gamma \\ -\beta+i\gamma & -i\alpha \end{pmatrix}$ comme CNS, bref dimension 3 sur $\mathbb{R}$.

b) Non, contre exemple : $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}$, mais pas iQ.

c) On prend un elt qcq de $\mathcal{A}$, on traduit qu'il est dans $\mathcal{G}$.

Il vient $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, rq perso (et alors quoi ?).

d) Parmi les contraintes il y a $M^2 + I_2 = 0_2$ poly annul scindé simple sur $\mathbb{C}$, DZ.

1094. PYTHON. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On s'intéresse au problème FL (n) suivant : étant donnés $a_0, \ldots, a_{n-1}, \lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{C}$, existe-t-il une matrice dont les coefficients diagonaux sont $a_0, \ldots, a_{n-1}$ et les valeurs propres sont $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1}$?

a) Écrite une fonction Python prenant en entrée des complexes $a_0, \ldots, a_{n-1}, \mu_0, \ldots, \mu_{n-1}, \alpha$ et renvoyant la matrice $\begin{pmatrix} \alpha_0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} & 1 \\ \mu_0 & \cdots & \cdots & \mu_{n-1} & \alpha \end{pmatrix}$.

b) Montrer que le problème FL(2) admet une solution si et seulement si $a_0 + a_1 = \lambda_0 + \lambda_1$. Préciser une solution sous cette condition.

c) Le probleme $FL(3)$ admet-il une solution pour $a_0 = 1, a_1 = -1, a_2 = 0, \lambda_0 = 1, \lambda_I = 2$ et $\lambda_2 = -3$?

d) Soient $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$. On pose, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, $P_k = \prod_{i=0}^{k-1} (X - a_i)$.

e) Justifier que la famille $(P_0, \ldots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, puis qu'il existe $\mu_0, \ldots, \mu_{n-1}$ tels que $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} (X - \lambda_k) = P_n - \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k P_k$

f) Écrire une fonction Python prenant en entree $a_0, \ldots, a_{n-1}$ et renvoyant $[P_0, \ldots, P_n]$.

g) Écrire une fonction Python prenant en entrée $a_0, \ldots, a_{n-1}, \lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1}$ et renvoyant les μ_k

1095. PYTHON. On munit $\mathbb{R}_3[X]$ du produit scalaire $(P, Q) \mapsto \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t$.

a) Soit P_{X^3} le projeté orthogonal de X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$.

Montrer avec Python que le polynôme $X^3 - P_{X^3}$ est scindé sur $\mathbb{R}$.

b) Écrire une fonction Python qui prend $(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3, (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ et

$Q \in \mathbb{R}_3[X]$ et renvoie $\lambda_1 Q(y_1) + \lambda_2 Q(y_2) + \lambda_3 Q(y_3)$.

c) Déterminer les $(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ tels qu'il existe un unique $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ vérifiant,

pour tout $Q \in \mathbb{R}_3[X]$, $\displaystyle\int_0^1 Q(t)\mathrm{d}t = \lambda_1 Q(y_1) + \lambda_2 Q(y_2) + \lambda_3 Q(y_3)$

d) Calculer dans ce cas les coefficients λ_1, λ_2 et λ_3 avec Python.

Sol : Un élève sera désigné.

1096. Soit E l'ensemble des suites réelles $(u_n)_n$ telles que la série $\sum u_n^2$ converge.

Pour $u = (u_n)_n$ et $v = (v_n)_n$ dans E, on pose $\langle u, v\rangle = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$.

a) Montrer que $\langle , \rangle$ définit un ps sur E.

b) Montrer que si $u \in E$ jamais nulle, alors $1/u$ n'est pas dans E.

c) Trouver une condition nécessaire et suffisante sur α pour que $\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right) \in E$.

d) On note F l'ensemble des suites réelles nulles à partir d'un certain rang.

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E de dimension infinie.

e) Que dire de $F + F^\perp$ et de $\left(F^\perp\right)^\perp$?

Sol : "vue" en td.

a) E est un $\mathbb{R}$ ev et la somme cv par la fameuse inégalité $2|ab| \leqslant (a^2 + b^2)$.

Le reste est presque évident, comb lin de séries cvtes, positivité, nullité...

b) La cv de la série entraine que la suite tend vers 0, son inverse réagi mal...

c) Riemann, $\alpha > (1/2)$.

d) F est stable par comb lin car tout s'arrête après le plus loin des 2.

On a une famille libre (base canon en réalité) avec $(0,0,0,.....,0,1,0,.........)$, dim infinie.

e) Dimension infinie = danger .

Ici le nerf de la chose, c'est $F^{\perp} = \{0\}$, cf orthogonalité avec la base canon.

Bref ds l'ordre, F et E.

1097. Soient $n \geqslant 2, a, b \in \mathbb{R}$ et $M \in M_n(\mathbb{R})$ avec des a sur la diagonale et des b en dehors.

a) Donner les conditions sur (a, b) pour que M soit inversible.

b) On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique. Soit $(u_1, \ldots, u_{n+1})$ une famille de vecteurs unitaires telle, que pour tous $i \neq j, \langle u_i, u_j \rangle = \alpha$. Soit enfin $G \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ de coefficients $\langle u_i, u_j \rangle$

c) Montrer que le rang de G est au plus n.

d) Déterminer la valeur de α telle que G soit exactement de rang n.

Sol : a) Classique, bcp de méthodes.

Par exemple celle du TD exo 75 avec la belle astuce sur les matrices de rang 1.

Ou encore on met des x partout (tjs exo 75).

Mais ici on n'est pas obligé de calculer le det.

On peut changer de base, $(e_1 - e_2, e_1 - e_3, ..., e_1 - e_n, e_1 + e_2 + e_3 + ... + e_n)$, libre bon card.

Dans cette base l'ancienne est semblable à $\begin{pmatrix} a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a-b & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a+(n-1)b \end{pmatrix}$

Bref en dim n , la cns est $a \neq b$ et $a + (n-1)b \neq 0$.

b) Rien...

c) C'est une matrice de Gram, le rang est le même que celui des vecteurs, or dim n.

Exo 58 feuille 10, mais il fallait à mon avis refaire au tableau.

d) Le déterminant est donc nul, $1+na=0$, et le rang est bien n car si on ne prend que les n premiers la même méthode donne un det non nul.

1098. On pose $\Phi : (A,B) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})^2 \mapsto \operatorname{Tr}\left(A^T B\right)$.

a) Montrer que Φ est un produit scalaire.

Montrer que $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux.

Donner l'expression de $S(M)$ symétrie orthogonale de M par rapport à $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$.

b) Soit A une matrice de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.

Soit S_A sa projection orth sur $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ et $\operatorname{Sp}(S_A)$ son spectre. Mq $1 \in \operatorname{Sp}(S_A) \subset [-1,1]$.

1099. PYTHON, a) Écrire une fonction Python qui prend un entier n et renvoie une matrice de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ à coefficients aléatoires dans $[0,1[$.

Calculer les valeurs propres et des vecteurs propres de quelques-unes de ses matrices.

Que peut-on conjecturer sur la valeur propre maximale ? Sur un vecteur propre associé ?

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique.

Soient $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}^+), \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ses valeurs propres et α leur maximum.

Soit $\Phi : X \mapsto \langle X, MX\rangle$.

a) Justifier l'existence de α. Mq, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \Phi(X) \leqslant \alpha\|X\|^2$ et qu'il y a égalité ssi X appartient au sous-espace propre de M associé à α.

b) Soit $C = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}); \|X\| = 1 \text{ et } \forall i \in [\![1,n]\!], X_i \geqslant 0\}$.

Montrer que Φ est bornée sur C et admet un maximum $\mu \leqslant \alpha$.

c) Soient X un vecteur propre unitaire de M associé à α et $W \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

dont les composantes sont les valeurs absolues des composantes de X.

Montrer que $W \in C$ et en déduire que $\mu \geqslant |\alpha|$.

d) Conclure que $\alpha \geqslant 0$ puis que M admet un vecteur propre positif et unitaire associé à α.

e) Montrer que, pour tout $i \in [\![1, n]\!], |\lambda_i| \leqslant \alpha$.

1100. Soient $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $S = (s_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

a) Montrer que, pour tous $i, j \in [\![1, n]\!], |a_{i,j}| \leqslant 1$.

b) Montrer que, si S est positive, alors, pour tout $i \in [\![1, n]\!], s_{i,i} \geqslant 0$.

c) Montrer que, si S est positive, alors $\mathrm{tr}(SA) \leqslant \mathrm{tr}(S)$. Étudier la réciproque.

Sol :

a) Clair car la somme des carrés par colonnes vaut 1.

b) S est dz à vp positives (cours à partir de cette année) .

Donc $S = P^T D^2 P$ par thm spectral. Donc $S = GG^T$, ainsi $s_{ii} = \sum_1^n g_{ij}^2 \geqslant 0$.

c) $tr(SA) = tr(P^T D^2 PA) = tr(D^2 PAP^T)$, celle de droite est orthogonale.

Donc la somme vaut $\sum \lambda_i v_{ii} \leqslant \sum \lambda_i = tr(A)$ par a) et vps positives.

La réciproque est vraie car , on dz A, le seul pb est donc le signe des vps.

Je choisis $V = diag(\pm, \pm, ..., \pm)$, les signes sont ceux des λ_i .

$U = P^T V P \in \mathcal{O}_n$, $tr(SU) = tr(DV) = \sum |\lambda_i| \leqslant tr(S) = \sum \lambda_i$, voilà !

Analyse

1101. Soit E l'ensemble des $f \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R})$ telles que $f(0) = f'(0) = 0$.

On pose, pour $f \in E, N(f) = \|f + 2f' + f''\|_\infty$.

a) Soit $h : t \mapsto f(t)e^t$. Montrer que, pour tout $t \in [0, 1], h(t) = \int_0^t (t - u)h''(u)\mathrm{d}u$.

b) Montrer que N est une norme sur E.

c) Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que, pour tout $f \in E, \|f\|_\infty \leqslant aN(f)$.

Déterminer le plus petit a satisfaisant cette condition.

Sol Ens Cachan 2019, voir mines 19 p185.

1102. a) Soient $P \in \mathbb{C}[X], A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Montrer que, si A est semblable à B, alors $P(A)$ est semblable à $P(B)$.

b) Soit $(B_k)_{k \geqslant 0}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui converge vers $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On suppose que, pour tout $k \in \mathbb{N}, B_k$ est semblable à une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dz.

Montrer que A est semblable à B.

c) Est-ce encore vrai si A n'est pas diagonalisable ?

1103. PYTHON. Soit (u_n) definie par $u_0 \in [0, \pi]$ et, pour $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin\left(\frac{u_k}{n+1}\right)$.

a) Ecrire un programme Python qui prend un entier n et qui renvoie les n premières valeurs : de cette suite. Discuter sa complexité en temps et en mémoire.

b) Montrer que, pour $x \in [0, \pi], x - \dfrac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x$.

c) On considère $v_n = \dfrac{1}{n+1} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

i) Montrer que $u_n \in [0, \pi]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

ii) Montrer que $v_n - \dfrac{\pi^3}{6(n+1)^2} \leqslant u_{n+1} \leqslant v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

En déduire que $-\dfrac{\pi^3}{6(n+1)^3} \leqslant v_{n+1} - v_n \leqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

iii) En déduire la convergence de (u_n).

Sol : a) Un élève sera désigné.

b) A droite concavité du sinus, à gauche étude de courbe.

c) i) Récurrence forte mais aisée.

ii) Facile par utilisation a) , mais attention aux signes et inverses...

Je calcule $v_{n+1} - v_n = -\dfrac{v_n}{n+2} + \dfrac{v_n}{n+2}$, on majore par ce qui précéde, à droite ok.

On minore par ce qui précède, ça marche, mais les signes et les inverses, $n+2 \geqslant n+1$.

iii) La série de terme général $v_{n+1} - v_n$ est donc cvte, lien suite séries.

La suite (v_n) cv, on appelle la maréchaussée .

Je pense que la limite dépend des CI , facile à vérifier avec a), non calculable.

1104. $a \in \mathbb{R}^{+*}$. Soit (u_n) la suite $u_0 = a$ et, pour $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$.

a) Étudier la convergence de la suite (u_n).

b) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière de terme général $u_n x^n$.

c) Démontrer le théorème de Cesàro (énoncé rappelé).

d) À l'aide la suite auxiliaire $\left(\dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}\right)$, étudier la convergence de $\sum u_n x^n$ en $\pm R$.

Sol : a) Enorme classique de sup, suite récurrente, $\mathbb{R}_*^+$ stable par f

qui y est croissante donc u_n monotone.

Or $u_1 \leqslant u_0$ donc suite décroissante minorée par 0 thm limite monotone, cv.

Mais comme f cie , la limite est un point fixe, le seul est 0.

b) Le rayon vaut 1 par Alembert (avec la variable),

on a utilisé un équivalent de $\ln(1 + x)$ en 0.

c) Voir cours et feuille td pour cette démo de ref.

d) Je la nomme w_n, par dl élémentaire elle tend vers $1/2$.

On applique Césaro, téléscopage ds la somme, $\frac{1}{n}\left[\frac{1}{u_n}-\frac{1}{u_0}\right] \longrightarrow \frac{1}{2}$.

Il vient avec quelques précautions $u_n \sim \frac{2}{n}(*)$.

Donc la série entière diverge en $+R$.

Mais en $-R$ énorme piège, interdit de prendre un équivalent pour une série alternée.

Je donne le plan (tordu) DL de w_n, $\frac{1}{2}+\frac{c}{n}+o(\%)$, on a aussi utilisé(*), $c \neq 0$.

On améliore Césaro, $\frac{1}{n}\left[\frac{1}{u_n}-\frac{1}{u_0}\right]=\frac{1}{2}+c.\frac{\ln(n)}{n}+o(\%)$.

Il vient avec quelques ""précautions"", $u_n=\frac{2}{n}-K\frac{\ln(n)}{n^2}+o(\%)$.

Bref cv en $-R$.

Oups, je viens de me relire, u_n tend vers 0 en décroissant, cf a), donc CSSA !

1105. PYTHON. Soient $a>0$ et $b \geqslant 0$.

Soit $(u_n)_{n \geqslant 0}$ la suite définie par $u_0>0$, $u_1>0$ et, pour $n \in \mathbb{N}, u_{n+2}=\frac{u_{n+1}+a}{u_n+b}$.

a) Avec Python, tracer les premiers termes de(u_n) pour différentes valeurs de u_0, u_1, a et b.

b) On suppose dorénavant $b>0$. Exprimer u_{n+3} en fonction de a, b, u_{n+1} et u_r.

Montrer que la suite $(u_n)_{n \geqslant 3}$ est bornée.

c) On pose, pour $n \in \mathbb{N}, \alpha_n=\sup \{u_k, k \geqslant n\}$ et $\beta_n=\inf \{u_k, k \geqslant n\}$.

Justifier que les suites (α_n) et (β_n) sont bien définies puis qu'elles sont convergentes.

On note α_{∞} et β_{∞} leurs limites.

d) Montrer que $\alpha_{\infty} \leqslant \frac{\alpha_{\infty}+a}{\beta_{\infty}+b}$ et $\beta_{\infty} \geqslant \frac{\beta_{\infty}+a}{\alpha_{\infty}+b}$ puis que $\alpha_{\infty}=\beta_{\infty}$.

e) Conclure.

Sol : préalable, rec immédiate $u_n>0$.

a) Là , c'est bidon , info pour faire "genre"(cauchois) ...

On ne va pas e....... un élève pour ça.

b) $u_{n+3} = \dfrac{a + u_{n+1} + a(u_n + b)}{(b + u_n)(b + u_{n+1}}$.

Par inégalité triangulaire bien organisée, (attention aux signes...)

$|u_{n+3}| \leqslant \dfrac{1}{b} + \dfrac{a}{b} + \dfrac{a}{b^2}$.

c) Elles existent comme ensemble de réels non vide bornés.

De par sa déf α_n décroit, l'autre croit.

La première est minorée par 0 , la deuxième majorée par b)

Bref elles cv par thm limite monotone.

Rq pour la suite $\alpha_n \leqslant \beta_n$ par leurs déf.

Donc limites ds le même ordre , compatibilité.

d) $\forall n, u_{n+3} \leqslant \dfrac{a + \alpha_{n+2}}{b + \beta_{n+1}}$ par def des objets α, β.

Là, on fait attention, je nomme w_{n+3} l'objet de droite qui tend vers L_1 (ds énoncé).

Comme $w_n \to L_1$, $sup(w_n) \to L_1$, simple traduction par quantificateurs.

Là, j'utilise l'exo début de cours EVN, $\alpha_n \leqslant w_n$, il vient $\alpha_\infty \leqslant L_1$. Voilà.

L'autre est la même.

Par contre , je ne sais pas conclure, j'ai sans doute raté une évidence...

Si tu sais faire ...

e) $\beta_n \leqslant u_n \leqslant \alpha_n$ par construction, maréchaussée.

1106. a) Montrer que $f : y \mapsto y^5 + y$ réalise une bijection de $\mathbb{R}^{+*}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Soient v la réciproque de f et $u : x \mapsto (v(x))^5$.

b) Montrer que $u(x) = x + o(x)$ quand $x \to +\infty$.

c) Mq il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tq $u(x) = x + \alpha x^{\frac{1}{5}} + \beta x^{-\frac{3}{5}} + o\left(x^{-\frac{3}{5}}\right)$ quand $x \to +\infty$.

En déduire un développement asymptotique de v en $+\infty$.

Sol a) Thm bijection monotone, cie, strict croissance et intervalles.

b) La bij réciproque est elle aussi une bij strict croissante de $\mathbb{R}_*^+$ vers lui même.

Donc en $+\infty$, $v^5 + v \sim v^5$ donc x/u tend vers 1, $u(x) \sim x$, ainsi $u(x) = x + o(x)$.

c) La petite astuce classique est $w = x^{-1/5}v - 1$ qui tend vers 0 par b).

Donc $v = (w+1)x^{1/5}$ on remplace au début, on en sort :

$(5w + ...)x + (w+1)x^{1/5} = 0$, on range, $w = -(1/5)x^{-4/5} + o(\%)$.

Donc en rangeant, $v = x^{1/5} - (1/5)x^{-3/5} + o(\%)$.

Bref $v^5 = x - x^{-1/5} + o(\%)$.

Puis $Z = 1 + 5wx^{4/5}$ qui tend vers 0 etc.

1107. Soient $s \in C$ et $N \in \mathbb{N}$. On pose $S_N(s) = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s}$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $\{t\} = t - \lfloor t \rfloor$.

a) Montrer que, pour $N \geqslant 1, S_N(s) = 1 + \displaystyle\int_1^N \frac{1}{t^s}\,\mathrm{d}t - s\int_1^N \frac{\{t\}}{t^s}\,\mathrm{d}t$.

b) Soit $y \in \mathbb{R}^*$. Montrer qu'il existe $z_0(y)$ tel que $S_N(1+iy) + \frac{1}{iyN^{iv}} \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} z_0(y)$.

c) Supposons qu'il existe u_N tel que $S_{u_N}(1+iy) \to \ell$. Montrer que $|z_0(y) - \ell| = \frac{1}{|y|}$.

1108. Soient $u, v \in \mathcal{C}^0\left([0,1], \mathbb{R}^{+*}\right)$ et, pour $n \in \mathbb{N}, I_n = \displaystyle\int_0^1 u(t)^n v(t)\mathrm{d}t$.

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}, I_{n+1}^2 \leqslant I_n I_{n+2}$.

b) En déduire que la suite $\left(\dfrac{I_{n+1}}{I_n}\right)$ converge et que sa limite ℓ vérifie $0 < \ell \leqslant \|u\|_\infty$.

c) Soit (x_n) une suite de limite γ. Montrer que $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} x_k \to \gamma$. En déduire que $I_n^{\frac{1}{n}} \to \ell$.

d) Minorer (I_n) puis montrer que $I_n^{\frac{1}{n}} \to \|u\|_\infty$.

Sol : a) Inégalité, produit, intégrale on pense à C-S.

On pose $f = \sqrt{v}u^{n/2}$ et $g = \sqrt{v}u^{1+n/2}$, ça roule.

b) Soit w_n le quotient, tout est strict positif, par a) w_n est croissante et majorée par $\|u\|_\infty$.

Cette majoration découle de $I_{n+1} \leqslant \|u\|_\infty I_n$ car tout est strict positif(*).

Thm limite monotone, b) fini.

c) Césaro classique, puis le fameux Césaro multiplicatif :

On passe au ln(*), $\ln(I_{n+1} - \ln(I_n) \longrightarrow \ln(\ell)$.

On applique Césaro, $\dfrac{1}{n}(\ln(I_n) - \ln(I_0) \to \ln(\ell)$.

Donc $\ln(I_n^{1/n}) \to \ln(\ell)$, ln est cie, donc c) ok.

d) Classique fait en cours, (*)...

$(I_n)^{1/n} \geqslant (\min(v))^{1/n}.\left(\displaystyle\int_0^1 u^n\right)^{1/n}$. Celui de gauche tend vers 1.

Celui de droite vers $\|u\|_\infty$, voir cours si besoin on me demande.

Puis on majore par $\|u\|_\infty.\|v\|_\infty^{1/n}$, maréchaussée.

1109. PYTHON. Soit $f : x \to \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}$.

a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}^{+*}\backslash\{1\}$.

b) Avec Python, tracer la courbe représentative de f sur $\{0, 3]$.

Si f admet une limite finie en 1 , la comparer avec $\ln 2$.

c) Mq $x \ln 2 \leqslant f(x) \leqslant x^2 \ln 2$ pour $x \in]1, 2]$. On pourra écrire $\dfrac{1}{\ln(t)} = t\dfrac{1}{t\ln(t)}$.

d) En déduire que f admet une limite à droite en 1 . Que dire pour la limite à gauche ?

e) Soit $\tilde{f}$ le prolongement continue de f sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Avec le tracé précédemment obtenu, $\tilde{f}$ semble-t-elle dérivable en 1 ?

f) Tracer cette tangente avec Python.

Sol : Hyper classique de sup.

1110. PYTHON. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto \dfrac{(-1)^n}{n!(n+x)}$. Soit $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

a) Montrer que la séric $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^{+*}$.

b) Écrire une fonction somme (n, x) qui renvoie la n-ième somme partielle de cette série.

c) Calculer a 10^{-7} près la valeur de $S(1)$. Comparer cette valeur à la valeur exacte.

d) Établir une conjecture concernant la fonction $x \mapsto xS(x) - S(x+1)$.

e) Vérifier cette conjecture puis montrer que $S(n+1) = o(n!)$.

f) Etudier la continuité de la fonction S.

Sol : exo 21 feuille 5, pour les maths.

La question info est bidon, c) contrôle du reste CSSA.

Pour le reste l'exo du td est plus précis.

1111. PYTHON. Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(n-x)^2} = \frac{1}{x^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{(n-x)^2} + \frac{1}{(n+x)^2} \right)$.

a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ et 1-périodique.

b) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$.

c) Représenter approximativement f sur $[10,1; 10,9]$.

d) Soit $g : x \mapsto f(x) - \dfrac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)}$.

i) Montrer que g est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$.

ii) Représenter $x \mapsto \dfrac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)}$ sur $[10,1;10,9]$. Que peut-on conjecturer ?

1112. PYTHON. Une permutation σ de $\{0,\ldots,n-1\}$ est dite alternée lorsque,

pour tout dans $\{0,\ldots,n-2\}, (-1)^i(\sigma(i+1)-\sigma(i))>0$.

$a_0=a_1=1$, et $n \geqslant 2$ on note a_n le nbre de permut alternées d $\{0,\ldots,n-1\}$.

On pose $u_n=a_n/n!$.

a) Calculer a_2, a_3, a_4.

b) La fonction rd.permutation (n) renvoie une permutation aléatoire de $\{0,\ldots,n-1\}$.

i) Écrire une fonction déterminant si une permutation est alternée ou non.

ii) Ecrire une fonction retournant une valeur approchee de u_n.

iii) Représenter les u_n pour $0 \leqslant n \leqslant 20$.

c) Montrer que le rayon de convergence de $\sum u_n x^n$ est au moins égal a 1 .

On définit, pour tout $t \in]-1,1[$, $f(t)=\sum_{n=0}^{+\infty} u_{2n+1} t^{2n-1}$. et $g(t)=\sum_{n=0}^{+\infty} u_{2n} t^{2n}$.

Allure des graphes de $t \mapsto f(t)+g(t)$ et $t \mapsto \tan(t)+\dfrac{1}{\cos(t)}$ sur $]-1,1$ Conjecture ?

d) On admet $\forall n \geqslant 1, (n+1)u_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} u_{2k+1}u_{n-(2k+1)}$.

Montrer, $\forall t \in]-1,1[$, que $f'(t)=1+(f(t))^2$ et $g'(t)=g(t)f(t)$.

Prouver la conjecture de c).

e) Prouver le résultat admis en d).

1113. PYTHON. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On s'intéresse aux ss-ens de segments $[A_iA_j]$ avec $i<j$, où $A_0,\ldots,A_{n-1}$ sont les points d'affixes les racines n-ièmes de l'unité, et où les extrémités sont toutes distinctes.

Soit M_n le cardinal de ces ss-ensembles. Par exemple, $M_3 = 4$ et les quatre sous-ensembles sont $\varnothing, \{[A_0, A_1]\}, \{[A_0, A_2]\}$, et $\{[A_1, A_2]\}$. Par convention, $M_0 = 1$.

a) Calculer M_4 et M_5.

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, M_{n+1} = M_n + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} M_k M_{n-1-k}$.

c) Calculer avec Python la liste des n premiers termes de la suite (M_k).

Vérifier expérimentalement que $M_n \leqslant 3^n$.

d) Montrer que $M : z \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} M_n z^n$ a un rayon de convergence $R \geqslant 1/3$.

e) Montrer que $M(z) = 1 + zM(z) + z^2 M(z)^2$, et en déduire une expression de $M(z)$.

Vérifier avec Python.

Sol : a) Enoncé incohérent ? Mes résultats sont incompatibles avec b)...

Si tu comprends, tu me le dis !

c) Question info, facile en admettant b)

Les n premiers termes ? ? Expérimentalement ? ?

Enoncé retourné par un élève "maladroit", on en parle.

d) Montrer (en admettant la fin de c) ? ? ?

e) Ça oui, il suffit d'écrire un produit de Cauchy et de faire attention aux termes nuls.

Expression de $M(z)$? ? ? Résultat trop ridicules pour être ceux désirés.

Commentaires : exo pourri.

Rq : j'ai retrouvé un énoncé correct, 1024 année 2021.

1114. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur$] - A, A[$ tq , pour tout $n \in \mathbb{N}, f^{(n)} \geqslant 0$.

a) Montrer que f est développable en série entière.

b) Montrer que $exp \circ f$ est développable en série entière.

Voir DDL DSE 53,54,55.

1115. Soit $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n \, \mathrm{d}t$.

a) Montrer l'existence de I_n pour tout $n \geqslant 2$.

b) Étudier la convergence de la suite $(I_n)_{n\geqslant 2}$.

c) Montrer que $I_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \int_0^{\pi} \left(\frac{\sin u}{u+k\pi}\right)^n$ du. En déduire que $I_n > 0$.

Sol prête .

a) Cie en 0^+, dominée en valeurs absolues par $1/t^2$ en l'infini.

b) Classique $\left|\dfrac{\sin(t)}{t}\right| < 1$ à t fixé de $\mathbb{R}_*^+$.

donc cv simple vers la foncion nulle sur $\mathbb{R}_*^+$.

On peut donc appliquer la cv dominée, car $1/t^2$ domine sur $[1, +\infty[$ intégrable,

entre 0 et 1 on prend 1 comme domination.

I_n tend vers 0.

c) On applique Chasles, on découpe sur les $[k\pi, (1+k)\pi]$.

Chgt de variable affine pour revenir à $[0, \pi]$, l'objet est devenu une série vérifiant le CSSA.

Il est donc du signe du premier terme engagé.

1116. Python. On pose, pour $n \geqslant 2, I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)\cdots(x+n)} \mathrm{d}x$.

a) Calculer à l'aide de Python les valeurs I_n et $I_n n! \ln(n)$ pour $n \in [\![2, 30]\!]$. Conjecture ?

b) Montrer que la suite (I_n) converge et préciser sa limite.

c) Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{(x+1)\cdots(x+n)}$

d) On admet l'existence de $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que $f : x \mapsto \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{x+k}$.

Montrer que $a_k = (-1)^{k-1} \frac{1}{(k-1)!} \begin{pmatrix} n-1 \\ k-1 \end{pmatrix}$ pour $k \in [\![1, n]\!]$

e) Calculer $a_1 + \cdots + a_n$.

f) Exprimer I_n comme somme.

g) Montrer que, pour $x \notin [-n, -1]$, $\frac{f_n'(x)}{f_n(x)} = -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x+k}$.

En déduire que $\frac{-1}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}} \int_0^1 f_n'(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t \leqslant \frac{-1}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}} \int_0^1 f_n'(t)\mathrm{d}t$.

Sol prête sur cahier jaune, à taper.

a) Très facile avec si.quad des feuilles de ref,il vient que I_n tend vers 0,

et $n! \ln(n) I_n$ tend vers 1.

b) Là des maths, cvd car à x fixé , l'objet intérieur est dominé par $1/n!$.

Bref cv simple vers la fonction nulle, dominante intégrable $1/(1+x)^2$.

c)d) Elts simples, par produit puis évaluation.

Bref on multiplie par $(x+k)$ on évalue en $-k$.

Si on ne voit pas de suite on écrit, $a_k = \frac{1}{(1-k)(2-k)...(-1)(1)(2)...(n-k)}$.

e) $\sum_1^n a_k = 0$, binome de Newton classique de sup, $(1-1)^{n-1} = 0$.

f) $I_n = \int_0^{+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{x+k} dx$, on ne peut pas inverser, divergences...

On coupe l'intégrale en X, il vient $\sum_1^n a_k \ln(X+k) - \sum_1^n a_k \ln(k)$.

$$\sum_1^n a_k(\ln(X+k) - \ln(X) + \ln(X)) - \sum_1^n a_k \ln(k) = \sum_1^n a_k(\ln(1+X/k)) + 0 - \sum_1^n a_k \ln(k).$$

On travaille à n fixé, on fait tendre X vers $+\infty$.

$I_n = -\sum_1^n a_k \ln(k)$.

g) On dérive $\ln(|f|)$, aucun pb , pas de valeurs interdites ds notre intervalle.

Sur $[0, 1]$ aucune abcisse à pbs.

On va manipuler des inégalités, fort heureusement tout est strict positif.

On a $\int_0^1 f_n' = \int_0^1 f_n.S_n(x)$.

$S_n(x) = \sum_1^n \frac{1}{x+k} \in \left[\sum_1^n 1/k, \sum_1^n 1/(1+k)\right]$.

Pour finir cette question, on regarde bien les signes et les passages aux inverses.

h) Non demandé mais ss-entendu cf (a) :

On connait l'équivalent de l'harmonique $\ln(n)$.

$\int_0^1 f_n' = f_n(1) - f_n(0) = \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} \sim -\frac{1}{n!}$.

Il vient $\int_0^1 f_n \sim \frac{1}{n! \ln(n)}$, çà sent bon.

Mais il reste $\int_1^\infty \frac{dx}{(1+x)(2+x)...(n+x)} = o\left(\frac{1}{n! \ln(n)}\right)$.

C'est ben vrai !

Car cette intégrale est majorée (positive) par $\frac{1}{n!}.\int_1^\infty \frac{dx}{(1+x)^n}$.

On la calcule, voilà !

1117. PYTHON. Soit E les fcts $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cies et bornées avec la norme $\|\|_\infty$.

Pour $f \in E$, on pose $\Phi(f) : x \mapsto \int_0^{+\infty} \arctan(xt)\frac{f(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que Φ est un endomorphisme de E.

b) Soit g l'image par Φ de la fonction constante égale à 1.

Avec Python, tracer g sur le segment $[0,5]$ et émettre une conjecture sur la limite de g.

c) Calculer la limite de g en $+\infty$.

d) Étudier la dénivabilité de g et calculer sa dérivée.

e) Calculer $g(x)+g(1/x)$. On pourra utiliser Python pour intuiter le résultat.

Sol : Alerte rouge, exo tombé tous les ans (entre autre Dorian M).

Deux élèves seront désignés et je relirai avec grand soin !

1118. Python. Soit $q:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ continue.

On s'intéresse à l'équation différentielle $(E_{a,b})_s$ $y''+(1+q)y=0, y(0)=a$, et $y'(0)=b$.

a) Tracer avec Python les solutions pour $(a,b)\in\{(1,0),(0,1)\}$ et pour les fonctions q :

$t\mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+t}}, q:t\mapsto \sin(t)\sin\left(\dfrac{1}{t}\right), q:t\mapsto \dfrac{1}{1+t^2}.$ et $q:t\mapsto \dfrac{-t^2}{2\,(1+t^2)}$.

On tracera ces solutions sur 1'intervalle $[0,50]$.

Pour quelles fonctions q la solution semble-t-elle bornée ?

b) On suppose dans cette question que q est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

c) Soit $z:x\mapsto \displaystyle\int_0^x \sin(x-t)f(t)dt$ avec f continue, intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Calculer $z''+z$.

d) Soit y une solution de $(E_{a,b})$.

Mq, $t\in\mathbb{R}^+, 0\leqslant |y(t)|\leqslant |a|+|b|+\displaystyle\int_0^x |q(t)||y(t)|\mathrm{d}t$. En déduire que y est bornée.

e) La condition q intégrable est-elle suffisante/nécessaire pour que les solutions de $(E_{a,b})$ soient bornées ?

Hors sujet cette année ?

1119. PYTHON. Soient $\alpha>0$ et (S) le système différentiel $(x''=-\alpha x', y''=-\alpha y'-1)$

a) À l'aide de Python, tracer pour différentes valeurs de α les trajectoires associées avec les conditions initiales $x(0) = y(0) = 0$ et $x'(0) = y'(0) = \nu$ avec $\nu > 0$.

Donner l'allure de ette trajectoire quand α est grand puis quand α est petit.

b) Montrer que la trajectoire de la solution avec ces conditions initiales est

la courbe rerésentative de la fonction $x \mapsto \left(1 + \dfrac{1}{\alpha\nu}\right) x + \dfrac{1}{\alpha^2} \ln\left(1 - \dfrac{\alpha x}{\nu}\right)$.

Préciser le domaine de définition de cette fonction.

c) Montrer que l'application $g : x \mapsto x + \ln(1 - x)$ réalise une bijection de $[0, 1[$ sur $\mathbb{R}^-$.

En déduire que α donné, il existe une unique valeur de μ, ν_α, telle que la trajectoire passe

par le point $(1, 0)$.

Pour $\alpha > 0$, soit $f_\alpha : x \mapsto \left(1 + \dfrac{1}{\alpha\nu_\alpha}\right) x + \dfrac{1}{\alpha^2} \ln\left(1 - \dfrac{\alpha x}{\nu_\alpha}\right)$.

d) Étudier la convergence de la suite de fonctions $(f_n)_{n \geqslant 1}$.

e) Étudier la convergence de la suite de fonctions $\left(f_{\frac{1}{n}}\right)_{n \geqslant 1}$.

Hors sujet cette année ?

1120. Considérons une fonction $F : t \mapsto (x(t), y(t))$ de classe $\mathcal{C}^1$, 2π-périodique,

telle que sa restriction à $[0, 2\pi\ [$ est injective et telle que F' ne s'annule pas.

Notons C le support de F.

a) Montrer que $\mathcal{C}$ est inclus dans un disque centré sur l'origine et de rayon $R > 0$.

b) Montrer qu'il existe $P, Q \in C$ tels que $\|PQ\| = \sup\{\|AB\|; A, B \in C\}$.

Montrer que les tangentes à C en P et Q sont orthogonales à la droite (PQ).

Sol je ferai un beau matin ?

1121. Soit $D = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0, x + y + z = \frac{\pi}{2}\right\}$.

On définit $f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto \sin(x)\sin(y)\sin(z)$ et on note g la restriction de f à D.

b) En paramétrant D grâce à ses deux premières variables,

déterminer l'ensemble A des triplets de D en lesquels g atteint son maximum.

c) Soient $(a, b, c) \in A$ et $M = g(a, b, c)$. On pose $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = M\}$.

Montrer que D est inclus dans le plan tangent à V en (a, b, c).

1122. Soient $\varphi : (x, y) \mapsto (xy, x + y)$ et $V = \left\{(x, y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2, y > x > 0\right\}$.

a) Montrer que $\varphi(V) = \left\{(p, s) \in (\mathbb{R}^{+*})^2, s^2 > 4p\right\}$ et que V est un ouvert.

Justifier que φ est de classe $\mathcal{C}^1$.

On admet que φ réalise une bijection de V sur $\varphi(V)$ et que sa réciproque est de classe $\mathcal{C}^1$.

b) Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant l'équation (E) $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) - y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2 - y^2$.

Montrer que $g = f \circ \varphi^{-1}$ vérifie $\dfrac{\partial g}{\partial s}(p, s) = s$.

c) Mq une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ est solution de (E) ssi il existe une fonction

$K : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f : (x, y) \mapsto \dfrac{1}{2}(x + y)^2 + K(xy)$.

Sol Fait en révisions DDl...

1123. PYTHON. On pourra utiliser les commandes suivantes :

import numpy as np import matplotlib.pyplot as plt

from mpltoolkits.mplot3D import Axes3D

On considère la fonction $f : (x, y) \mapsto (2x^2 + 3y^2)\, e^{-\left(x^2+y^2\right)}$ définie sur $\mathbb{R}^2$.

Pour tout $R > 0$, on pose $D_R = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant R\right\}$.

a) Représenter la surface d'équation $z = f(x, y)$ sur $[-2, 2]^2$.

b) Montrer que f admet un minimum sur $\mathbb{R}^2$ et préciser sa valeur.

c) Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$. Mq il existe $R_a > 0$ tq, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \backslash D_{R_a}$, $f(x, y) \leqslant a$.

d) Montrer que f admet un maximum sur $\mathbb{R}^2$ et en donner la valeur.

La fonction f admet-elle d'autres extrema locaux ?

e) Pour tout $c \in \mathbb{R}$, notons $\Gamma_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = c\}$.

f) Tracer les courbes Γ_c pour $c \in \{0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.75, 0.8, 0.9\}$.

g) Déterminer les valeurs de c pour lesquelles la courbe Γ_c

admet une tangente horizontale en un point en dehors de l'axe des ordonnées.

Sol exo fondamental, on en fera qu'un de cette nature.

Sol a)

```
import matplotlib . pyplot as plt
import numpy as np
from mpl_toolkits. mplot3d import Axes3D
from scipy. integrate import odeint
from math import *
from random import *
import numpy. random as rd
from numpy. polynomial import Polynomial
import numpy. linalg as alg
import scipy. integrate as integr
ax = Axes3D (plt . figure ())

def f(x,y):
    return ((2*x **2+3* y**2)* np.exp(-x**2- y **2))

def Dessin2 (a,b,c,d,pas ,f):
    X = np. arange (a,b, pas )
    Y = np. arange (c, d, pas )
    X, Y = np. meshgrid (X, Y)
    Z = f(X, Y)
    ax. plot_surface(X, Y, Z)

Dessin2 (-2,2,-2,2,0.02 , f)
```

```
plt .show()

plt . close ()

def Niveau (a,b,c,d,pas ,f, liste ):
    X = np. arange (a,b, pas )
    Y = np. arange (c, d, pas )
    X, Y = np. meshgrid (X, Y)
    Z = f(X, Y)
    #plt. axis(' equal ')
    plt .contour (X, Y, Z, liste)
#Dessin2 (-2,2,-2,2,0.02, f)

liste =[0.3 ,0.4 ,0.5 ,0.6 ,0.7 ,0.75 ,0.8 ,0.9]
a=2
Niveau (-a,a,-a,a ,0.02 , f, liste )
plt .show()
```

b) La fonction f, positive, admet en $(0,0)$ un minimum nul sur $\mathbb{R}^2$.

c) Soit $a>0$. En passant en coordonnées polaires on a

$$|f(x,y)| = \rho^2 \left(2\cos^2\theta + 3\sin^2\theta\right) e^{-\rho^2} \leqslant 5\rho^2 e^{-\rho^2}$$

qui tend vers 0 quand ρ tend vers l'infini, autrement dit, il existe $R_a>0$ tel que,

pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash D_{R_a}, f(x,y) \leqslant a$.

d) On recherche les points critiques, en tenant compte de la double parité sur les variables qui permet de se ramener au cas où toutes les variables sont positives.

Les dérivées partielles sont

$$\left[-2xe^{-x^2-y^2}\left(-2+2x^2+3y^2\right), -2ye^{-x^2-y^2}\left(-3+2x^2+3y^2\right)\right]$$

et elles s'annulent en $(0,0),(0,1),(1,0)$, pour des valeurs de f : $0, \dfrac{3}{e}, \dfrac{2}{e}$.

On applique la question précédente avec $a = \dfrac{3}{2e}$.

Dans la boule fermée de centre 0 et de rayon R_a, la fonction f continue admet des extrema qu'elle atteint, elle contient également $(0,1)$. Le maximum pour cette boule ne peut pas être pris au bord, car l'image de ce point est supérieure à $f(0,1)$ et à l'exterieur de la boule sont les points dont les valeurs valent la moitié de $f(0,1)$, et si ce point était sur le bords on l'atteindrait par une suite de points dont les images valent la moitié de ce qui doit être obtenu par limite, et c'est absurde.

Donc le maximum est un point critique, qui ne peut être que $(0,1)$.

Comme à l'extérieur de la boule et au bord, les valeurs images sont plus petite, ce maximum sur la boule est aussi un maximum absolu sur tout le plan.

e) Pour $c \in [0, M]$, soit $\Gamma_c = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = c\}$.

Il s'agit des lignes de niveau de la surface à z constant.

Probabilités

1124. PYTHON. Deux amis se sont donné rendez-vous a 18 heures.

Ils arrivent en retard de X et Y minutes respectivement.

On suppose que X et Y sont des var aléa ind suivant la loi uniforme sur $\{0, \ldots, 59\}$.

a) À quoi correspond la variable $T = |X - Y|$?

b) Donner la loi de T.

c) Écrire une fonction rdv (n) qui renvoie les résultats de n simulations de T.

d) i) Calculer la valeur exacte de l'espérance de T.

ii) Donner une approximation de l'espérance avec Python, commenter l'écart.

e) On pose $n = 10^5$. Donner une fonction qui renvoie approximativement

la loi de T à l'aide de la fonction rdv. Commenter les écarts.

f) On découpe une heure en N divisions de temps.

Donner un équivalent de la proba que les amis arrivent en même temps lorsque $N \to +\infty$.

Sol :

a) Au temps d'attente du premier arrivé.

b) On cherche $P(|X-Y|=k)$.

- $k=0$, $\dfrac{1}{60}$.

- $k>0$, attention à la valeurs absolues, SCE ttes les valeurs de $X=j$...

$P(X-Y=k)=\displaystyle\sum_{j=k}^{5} 9P(X=j).P(Y=j-k)$ par indépendance.

$=\frac{1}{3600}(60-k)$, petite vérif perso non demandée : somme globale 1.

c) Juste pour vérifier si le candidat connait la bibli rd... Et la conjecture !

d)i) $E(T)=\displaystyle\sum_{1}^{59} kP(T=k)=\frac{1}{1800}\sum_{1}^{59} k(60-k)$, etc.

ii) Les erreurs ne viennent pas de Python mais de l'aspect alèatoire.

e) Tjs pareil, curieux... On pourrait utiliser BT pour contrôler.

f) C'est $1/N$, curieux , énoncé mal rendu ?

1125. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes

suivant toutes la loi uniforme sur $\{1,\ldots,N\}$. On pose $S_n=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}(X_k)$ et $T_n=\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n}(X_k)$.

a) Les variables S_n et T_n sont-elles indépendantes ?

b) Exprimer $\mathbf{E}(T_n)$ a l'aide d'une somme que l'on ne calculera pas.

c) En déduire sa limite quand $n\to+\infty$.

Sol :

a) Non, contre exemple, $P(S_n=1)=\left(\frac{1}{N}\right)^n$.

Et $P((S_n=1)\cap(T_n=1))=P(S_n=1)$ par inclusion.

b) Penser à ramener les égalités à une différence avec des inégalités, si besoin, passer par les complémentaires.

c) A mon avis , la limite est 1, penser à contrôler les aux termes par majoration brutale.

1126. a) Soit U une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ admettant une espérance.

Montrer que $\mathbf{E}(U) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(U \geqslant n)$.

b) Soit $(X_k)_{k\geqslant 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$.

On pose, pour $k \in \mathbb{N}$;

$F_k = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \mathbf{P}\left(X_1 = i\right)$, et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $M_n = \max\left(X_1, \ldots, X_n\right)$.

Exprimer $\mathbf{P}\left(M_n \leqslant k\right)$ en fonction de F_k et de n.

c) On lance trois dés équilibrés à 6 faces.

Quelle est la probabilité que le plus grand résultat soit égal à 4 ?

d) Trois joueurs jouent à pile ou face jusqu'à obtenir pile.

Soit X le nombre de lancers du dernier joueur à obtenir pile.

Calculer $\mathbf{P}(X = n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Sol :

a) Antiréparttion ! Voir Cours.

b) i.i.d veut dire indépendantes de mêmes lois.

$\mathbf{P}\left(M_n \leqslant k\right) = \mathbf{P}\left(\displaystyle\bigcap_{1}^{k} (X_i \leqslant k)\right) = \left(\mathbf{P}(X_1 \leqslant k)\right)^n = (F_k)^n$.

Car on peut ajouter, sigma additivité.

c) d) Avec les inégalités on retrouve les égalités.

Penser à passer par les complémentaires.

1127. a) Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \boldsymbol{P})$ un espace probabilisé, A, B deux événements.

Rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz, simplifier la covariance de I_A et $\mathbf{I}_B$.

En deduire que $|\mathbf{P}(A \cap B) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)| \leqslant \dfrac{1}{4}$.

b) Munissons l'ensemble $\mathcal{S}_n$ des permutations de $[\![1, n]\!]$ de la probabilité uniforme.

Notons pour $i \in [\![1, n], E_i$ l'événement «le point i est fixe .

c) Calculer $\mathrm{P}\left(E_i\right)$ pour $i \in [\![1, n]\!]$ et $\mathrm{P}\left(E_i \cap E_j\right)$ pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$.

d) Exprimer la variable aléatoire F égale au nombre de points fixes à l'aide des E_i.

En déduire l'espérance et la variance de F.

1128. PYTHON. Considérons une urne comportant initialement une boule rouge et une boule bleue. Chaque boule tirée est remise dans l'urne avec une boule supplémentaire de la même couleur. Soient X_n et Y_n les variables aléatoires égales aux nombres de boules rouges et bleues après le n-ième tirage.

On pose, pour $u, v \in \mathbb{R}, P_n(u, v) = \displaystyle\sum_{i,j \in \mathbb{N}^*} \mathbf{P}\left(X_n = i, Y_n = j\right) u^i v^j$.

a) Écrire une fonction Python Simulation qui prend une argument entier n, qui simule n tirages et renvoie le nombre de boules rouges à l'issue du n-ième tirage.

b) Écrire une fonction Python Moyenne qui prend en argument deux entiers n et N, qui simule N fois une expérience de n tirages et renvoie une liste où le terme d'indice i est le nombre d'expériences se terminant avec i boules rouges. Que remarque-ton ?

c) Soient $n \in \mathbb{N}, i$ et $j \in \mathbb{N}^*$. Exprimer $\mathrm{P}\left(X_{n+1} = i, Y_{n+1} = j\right)$

en fonction des probabilités $\mathbf{P}\left(X_n = i-1, Y_{nl} = j\right)$ et $\mathbf{P}\left(X_n = i, Y_n = j-1\right)$.

d) Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}, P_{n+1}(u, v) = \dfrac{1}{n+2}\left(u^2 \dfrac{\partial P_n}{\partial u}(u, v) + v^2 \dfrac{\partial P_n}{\partial v}(u, v)\right)$.

e) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}, P_{n+1}(u, v) = \dfrac{1}{n+I} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u^{k+1} v^{n+1-k}$.

Est-ce en adéquation avec la première question ?

f) Modifier la fonction Simulation afin qu'elle renvoie I si la dernière boule tirée est rouge.

Modifier la fonction Moyenne afin qu'elle renvoie le nombre moyen de tirages se terminant par une boule rouge. Commenter.

1129. PYTHON. On lance un dé equilibré à 6 faces et on note, pour $n \in \mathbb{N}^*, S_n$

la somme des valeurs obtenues lors des n premiers lancers.

a) Montrer que, pour $n \geqslant 2$ et $k \in [\![n, 6n]\!], \mathbf{P}\left(S_n = k\right) = \dfrac{1}{6}\displaystyle\sum_{j=1}^{6} \mathbf{P}\left(S_{n-1} = k - j\right)$.

b) Écrire une fonction Python qui prend un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et renvoie un tableau T de taille $n \times (6n+1)$ dont les coefficients sont les $T[i, j] = \mathbf{P}\left(S_i = j\right)$.

c) Soit $Z_n = \dfrac{S_n}{E\left(S_n\right)}$. Calculer l'espérance et la variance de Z_n.

d) Soit $F_n : t \mapsto \mathrm{P}\left(Z_n \leqslant t\right)$. Montrer que la suite de fonctions (F_n) converge simplement.

1130. a) Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aleatoires i.i.d. suivant la loi de Bernoulli de paramètre p, et pour $k \in [\![1, n]\!], S_k = X_1 + \cdots + X_k$.

Calculer les coefficients de la matrice $M = \left(\operatorname{Cov}\left(S_i, S_j\right)\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

b) Soit $A = (\min(i, j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Trouver T triangulaire supérieure telle que $A = T^T T$.

c) Montrer que $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^+$. La matrice A est-elle diagonalisable ? Calculer le rang de A.