Maths
PSI *
Année 2021-2022

Révisions oraux PSI*

Cette feuille est évolutive, pour y chercher un exo CTRL F...

Si les explications vous paraissent confuses , ne pas hésiter à revenir vers moi.

Me demander ce que j'ai oublié.

632. a) Montrer que $\dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = n(n+1)/2$.

b) Est-ce que l'ensemble des matrices nilpotentes est un espace vectoriel ?

c) Soit $\mathcal{N}$ un sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ composé de matrices nilpotentes.

Montrer que $\dim \mathcal{N} \leqslant n(n-1)/2$.

d) Peut-on avoir $\dim \mathcal{N} = n(n-1)/2$?

Sol : classique.

---

636. Soient E et F deux espaces vectoriels et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

On dit que $v \in \mathcal{L}(F, E)$ vérifie $(*)$ si $u \circ v \circ u = u$ et $v \circ u \circ v = v$.

a) Montrer que si $v \in \mathcal{L}(F, E)$ vérifie $(*)$, alors $E = \mathrm{Im} v \oplus \mathrm{Ker}\, u$ et $F = \mathrm{Im}\, u \oplus \mathrm{Ker}\, v$.

b) Soient E_1 un supplémentaire de $\mathrm{Ker}\, u$ dans E et F_1 un supplémentaire de $\mathrm{Im}\, u$ dans F.

Montrer qu'il existe un unique $v \in \mathcal{L}(F, E)$ vérifiant à la fois $(*)$ et $E_1 = \mathrm{Im}\, v, F_1 = \mathrm{Ker}\, v$.

Sol :

a) Classique, mais attention aux ...,

on n'est pas en dim finie, pas de thm du rang, ni de base...

Par analyse synthèse, il vient $\forall x \in E, x = v \circ u(x) + (x - v \circ u(x))$.

Décomposition qui est du type : $E = \mathrm{Im} v \oplus \mathrm{Ker}\, u$.

L'analyse a prouvé l'unicité !!!

L'autre somme directe est la même car les hypothèses sont symétriques.

b) Là , il faut secouer le c....

Mais pour clarifier, ce qui vient : u est injective sur E_1, car $\ker u_{/E_1} = E_1 \cap \ker u = \{\overrightarrow{0}\}$.

On va analyser, le problème ce qui déclenchera l'éventuelle unicité,

puis conclure par une vérification.

Il faut définir v sur F, mais comme on exige $v_{/F_1} = 0_{\mathcal{L}(F)}$, il ne reste qu'à définir v sur $Im(u)$.

Et on imposera , v nulle sur F_1.

Mais, un vecteur de $Im(u)$ a des antécédents dans E, grâce à la somme directe sur E,

on peut exiger un antécédent dans E_1, et il est alors unique, car u est injective sur E_1.

Bref $\forall z \in Im(u), z = u(e_1)$ avec unicité de ce e_1.

Si v existe avec toutes les hypothèses désirées, $v(u(e_1)) = w + a_1$ avec $w \in \ker(u), a_1 \in E_1$.

Mais on exige aussi que v aille vers E_1 donc w serait nul.

Par (*), il vient $u(v(u(e_1))) = u(a_1) = u(e_1)$ donc $a_1 = e_1$ par injectivité de u sur...

Il n'y aurait plus qu'un seul choix,

v enverrait les vecteurs de $Im(u)$ sur leur seul antécédent dans E_1.

Fin de l'analyse de la situation, soit v ainsi construit.

On le valide :

- Il est bien nul sur F_1 et (attention à l'autre inclusion),

pour $z \in \ker(v)$, $z = u(e_1) + f_1$, $v(z) = v(u(e_1)) = e_1 = \overrightarrow{0}$,

donc $z = f_1$! ainsi $\ker(v) \subset F_1$...Double inclusion.

- Par construction ,v envoie les vecteurs dans E_1, attention aussi, (pareil)

pour $z \in E_1$, $u(z) \in Im(u)$, $v(u(z)) = z \Rightarrow z \in Im(v)$, double inclusion...

- Soit $x \in E$, $x = w + e_1$, $u(x) = u(e_1)$, $v(u(x)) = v(u(e_1)) = e_1$, $u(v(u(x))) = u(e_1) = u(x)$.

- Soit $y \in F$, $y = u(b_1) + f_1$, $v(y) = v(u(b_1)) = b_1$, $v(u(v(y))) = v(u(b_1)) = b_1 = v(y)$.

La dernière est plus subtile : elle vient du fait que $u(v(y)) = u(b_1)$.

Car $v(y) = v(u(b_1)), u(v(y)) = u \circ v \circ u(b_1)$,

on applique u, puis on utilise $uvu = u$ déjà validé...

---

640. a) Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Pour tout $n \in$ N, on pose $E_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{M^k}{k!}$·.

Montrer que la suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

b) Montrer que pour tout $A \in GL_2(\mathbb{C})$, il existe $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $\sum_{k=0}^{n} \frac{B^k}{k!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} A$.

Sol : Incomplet...

Je me permets de changer l'énoncé pour le valoriser.

1) Regardons l'exponentielle complexe : $\sum_{0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$. Converge par d'Alembert.

C'est une surjection vers $\mathbb{C}^*$, $e^{a+ib} = e^a(\cos(b) + i\sin(b)) = Z = \rho e^{i\theta}(*)$,

équivaut à $a = \ln(\rho)$ et $b = \theta[2\pi]$.

Regardons $e^z.e^u = \sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!}.\sum_{n\geqslant 0} \frac{u^n}{n!} = \sum_{n\geqslant 0}\sum_{p+q=n} \frac{z^p}{p!}\frac{u^q}{q!}$. Produit de Cauchy !

Par ailleurs, grâce au binôme :

$$\sum_{p+q=n} \frac{z^p}{p!}\frac{u^q}{q!} = \sum_{p=0}^{n} \frac{z^p}{p!}\frac{u^{n-p}}{(n-p)!} = \frac{1}{n!}\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p} z^p u^{n-p} = \frac{1}{n!}(z+u)^n.$$

Il vient $(**) e^z.e^u = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(z+u)^n}{n!} = e^{z+u}$. C'est d'ailleurs comme ça que l'on prouve (*).

a) La matrice A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Soit $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ tel que $A = P \begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \mu \end{pmatrix} P^{-1}$ avec $a \in \mathbb{C}$.

On a $\begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \mu \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & \delta_k \\ 0 & \mu^k \end{pmatrix}$, où $\delta_k = a \sum_{j=0}^{k-1} \lambda^j \mu^{k-1-j}$ (récurrence facile).

On a $|\delta_k| \leqslant k|a|\rho^{k-1}$, où $\rho = \max(|\lambda|, |\mu|)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!} = PT_kP^{-1}$,

avec $T_k = \begin{pmatrix} s_n(\lambda) & \sigma_n \\ 0 & s_n(\mu) \end{pmatrix}$, où $\sigma_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\delta_k}{k!}$.

La série $\sum \dfrac{\delta_k}{k!}$ converge (Alembert). Notons σ sa somme.

Alors la suite (T_k) converge vers $T^* = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^\lambda & \sigma \\ 0 & \mathrm{e}^\mu \end{pmatrix}$.

Il en résulte que $\sum \dfrac{A^k}{k!}$ converge vers PT^*P^{-1}.

On déduit que Sp $\big(\exp(A)\big) = \big\{\mathrm{e}^\lambda, \mathrm{e}^\mu\big\}$

où λ, μ sont les valeurs propres de A (éventuellement confondues).

Ainsi $\mathrm{Sp}(\exp(A)) = \exp(\mathrm{Sp}(A))$.

On note aussi que $\det(\exp(A)) = e^{\lambda+\mu} = e^{\mathrm{tr}(A)}$.

Ceci prouve l'inversibilité mais : on peut aussi remarquer que la même preuve par produit

de Cauchy prouverait que si 2 matrices communtent alors $exp(A)exp(B) = exp(A+B)$...

On en déduit que $(exp(A))^{-1} = exp(-A)$ ...

c) L'application $\varphi : A \mapsto \exp(A)$ n'est pas injective.

Par exemple, avect $A = \begin{pmatrix} 0 & -2\pi \\ 2\pi & 0 \end{pmatrix}$, on $a \exp(A) = I_2 = \exp(0)$.

Elle n'est pas surjective. En effet :

$\forall A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}), \det(\exp(A)) = \mathrm{e}^{\mathrm{tr}(A)} \neq 0.$

donc $\mathrm{Im}(\varphi) \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$.

Mais elle est surjective vers $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$.

On sépare les cas possibles :

- Si la matrice de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ est Dz : On se place dans la base de Dz.

Puis , on cherche un antécédent à $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$

Par surjectivité de l'exponentielle complexe λ et μ ont des antécédents : λ', μ'

On applique le calcul du a) à $\begin{pmatrix} \lambda' & 0 \\ 0 & \mu' \end{pmatrix}$.

Son exponentielle converge vers $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$.

- Sinon , on est dans le cas de deux vp égales et on peut trigonaliser ,

on se place dans la base qui réalise ça.

On cherche donc un éventuel antécédent à $\begin{pmatrix} \lambda & \gamma \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Calcul préalable utile !

$exp\left(\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, car en cas de nilpotence la somme est finie...

Soit α un antécédent de λ par exponentielle complexe et $\beta = \dfrac{\gamma}{e^{\alpha}}$.

Alors un antécédent recevable est $\alpha I_2 + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Qui commutent !

d) Non demandé mais...

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $A = R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

On a $A^k = R_{k\theta}$.

Ainsi $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!} = \begin{pmatrix} C_n(\theta) & -S_n(\theta) \\ S_n(\theta) & C_n(\theta) \end{pmatrix}$ où $\displaystyle C_n(\theta) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos k\theta}{k!}, S_n(\theta) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin k\theta}{k!}$.

D'autre part, on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{ik\theta}}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left(e^{i\theta}\right)^k}{k!} = \exp\left(e^{i\theta}\right) = \exp(\cos\theta)(\cos(\sin\theta) + i\sin(\sin\theta))$$

$$\text{Ainsi } \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} C_n(\theta) = \exp(\cos\theta)\cos(\sin\theta) \\ \lim\limits_{n\to+\infty} S_n(\theta) = \exp(\cos\theta)\sin(\sin\theta) \end{array} \right. \quad \text{et}$$

$$\exp\left(R_\theta\right) = \exp(\cos\theta) \begin{pmatrix} \cos(\sin\theta) & -\sin(\sin\theta) \\ \sin(\sin\theta) & \cos(\sin\theta) \end{pmatrix} = \exp(\cos\theta) R_{\sin\theta}$$

---

644. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et φ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ défini par $M \mapsto M + \operatorname{tr}(AM)A$.

a) Étudier la diagonalisabilité de φ.

b) Calculer $\operatorname{tr}(\varphi)$ et $\det(\varphi)$.

Sol : cahier rouge (2 ème version).

On remarque que $\varphi(A) = \left(1 + \operatorname{tr}\left(A^2\right)\right) A$.

Ainsi A est vecteur propre de φ pour la valeur propre $\mu = 1 + \operatorname{tr}\left(A^2\right)$.

Soit M un vecteur propre (non colinéaire à A) pour la valeur propre λ.

On a $(1-\lambda)M + \operatorname{tr}(AM)A = 0$ donc $\lambda = 1$ et $\operatorname{tr}(AM) = 0$.

Réciproquement si $\operatorname{tr}(AM) = 0$ alors $\varphi(M) = M$.

Ainsi $E_1(\varphi) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \operatorname{tr}(AM) = 0\}$.

Mais $M \mapsto \operatorname{tr}(AM)$ est une forme linéaire non nulle.

Ainsi $E_1(\varphi)$ est un hyperplan (H) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On trouve donc $\operatorname{Sp}(\varphi) = \{1, \mu = 1 + \operatorname{tr}\left(A^2\right)\}$.

De plus $E_1(\varphi) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \operatorname{tr}(AM) = 0\}$.

Et si $\operatorname{tr}\left(A^2\right) \neq 0, E_\mu = \operatorname{Vect}(A)$.

On observe que φ est diagonalisable si et seulement si $\operatorname{tr}\left(A^2\right) \neq 0$.

Éléments propres de φ (méthode 2)

On détermine un polynôme annulateur de φ.

Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a :

$$\varphi^2(M) = \varphi(M) + \operatorname{tr}(A\varphi(M))A$$

Par ailleurs, on a l'égalité :

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(A\varphi(M))A &= \left(1 + \operatorname{tr}\left(A^2\right)\right)\operatorname{tr}(AM)A \\ &= \left(1 + \operatorname{tr}\left(A^2\right)\right)(\varphi(M) - M)\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\varphi^2(M) = \left(2 + \operatorname{tr}\left(A^2\right)\right)\varphi(M) - \left(1 + \operatorname{tr}\left(A^2\right)\right)M$$

Soit le polynôme :

$$P = X^2 - \left(2 + \operatorname{tr}\left(A^2\right)X + \left(1 + \operatorname{tr}\left(A^2\right)\right)\right.$$

II annule φ. Ses racines sont 1 et $1 + \operatorname{tr}(A^2)$.

Ainsi $\operatorname{Sp}(\varphi) \subset \{1, \mu = 1 + \operatorname{tr}(A^2)\}$ et on termine comme précédemment.

b) Trace et déterminant de φ.

Je sépare les deux cas pour clarifier :

Si $\operatorname{tr} A^2 \neq 0$. On diagonalise, base naturelle $H \bigoplus < A >$.

$$\left\{\begin{array}{l}\operatorname{tr}(\varphi) = (n^2 - 1) + (1 + \operatorname{tr}(A^2)) = n^2 + \operatorname{tr}(A^2) \\ \det(\varphi) = 1 + \operatorname{tr}(A^2)\end{array}\right.$$

Sinon :

$E = H \bigoplus < Z >$ avec $Z \notin H$.

$\varphi(Z) = Z + \operatorname{tr}(AZ)A$, qui a la composante 1 sur Z et le reste sur H.

Matrice triangulaire supérieure, mêmes résultats qu'avant

(en remplaçant par la bonne valeur de $\operatorname{tr}(A^2)$...

---

690. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $x_n > 0$ tel que $x_n^n + x_n = 3$

puis déterminer la limite de la suite (x_n) ainsi définie.

Sol :

Posons $f_n(x) = x^n + x - 3\,;$

f_n est continue strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

Elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $[-3, +\infty[$.

On a $f_n(1) = -1$ et $f_n(2) = 2^n - 1 > 0$.

Il existe donc un unique $x_n \in]\,1, 2\,[$ tel que $f_n\left(x_n\right) = 0$.

L'égalité $f_n\left(x_n\right) = 0$ donne $(\star)$: $n \ln x_n = \ln\left(3 - x_n\right)$.

Ainsi $\ln x_n = \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n}\right)$ donc $\lim\limits_{+\infty} x_n = 1$.

Posons $x_n = 1 + y_n$ (donc $\lim\limits_{+\infty} y_n = 0$).

On obtient $n \ln\left(1 + y_n\right) = \ln\left(2 - y_n\right)$.

Ainsi $n y_n \sim \ln 2$, et on reporte dans $(\star)$:

$$\begin{aligned}\ln x_n &= \frac{\ln 2}{n} + \frac{1}{n}\ln\left(1 - \frac{y_n}{2}\right)\\ &= \frac{\ln 2}{n} - \frac{\ln 2}{2n^2} + \circ\left(\frac{1}{n^2}\right)\end{aligned}$$

Il en résulte :

$$\begin{aligned}x_n &= \exp\left(\frac{\ln 2}{n} - \frac{\ln 2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\ &= 1 + \frac{\ln 2}{n} + \frac{\ln 2(\ln 2 - 1)}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\end{aligned}$$

---

694. Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \cos\left(n^2\pi \ln\left(\dfrac{n-1}{n}\right)\right)$.

Sol : un DL précis de $\ln(1+u)$ s'impose...

$n^2\pi \ln\left(\dfrac{n-1}{n}\right) = n^2\pi\left(-\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} - \dfrac{1}{3n^3} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^4}\right)\right) = -n\pi - \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{3n} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right).$

Il vient $u_n = (-1)^n \cos\left(-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = (-1)^{n+1} \sin\left(\frac{\pi}{3n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$.

Attention ! ! ! Trigo...

Et après un DL impeccable cf $\sin(u) = u + \mathcal{O}(u^2)$,

$(-1)^{n+1} \sin\left(\frac{\pi}{3n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = (-1)^{n+1}.\frac{\pi}{3n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Attention à la composée des DL...

Série convergente.Clair ? CSSA pour la première et absolue convergence pour la deuxième.

---

706. Soit $f : x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\, \mathrm{d}t$.

a) Montrer que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

b) Établir que $g : t \mapsto \frac{\sin t - t}{t^2}$ est bornée sur $\mathbb{R}^{+*}$.

En déduire que $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\ln x$.

d) Montrer que f est intégrable sur R^{+*} et que $\int_0^{+\infty} f = \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\, \mathrm{d}u$.

Sol :

a) La fonction $f : t \mapsto \frac{\sin t}{t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Sur $[x, +\infty[$(avec $x > 0$), elle est dominée par $t \mapsto \frac{1}{t^2}$.

La fonction f donc est intégrable sur $[x, +\infty[$.

Ainsi la fonction F est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Pour tout $x > 0$, on a $F(x) = F(1) - \int_1^x f(t)\mathrm{d}t$.

Sur $\mathbb{R}^{+*}, f$ est continue donc F est $\mathcal{C}^1$ avec :

$$\forall x > 0, F'(x) = -f(x) = -\frac{\sin x}{x^2}$$

b) La fonction g est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

On a $g(t) \overset{t\to 0}{\sim} -\dfrac{t}{6}$ donc $\lim\limits_{t\to 0} g(t) = 0$.

D'autre part $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = 0$ donc g est bornée sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Posons $M = \sup\limits_{x>0} |g(x)|$. Pour $x > 0$, on a :

$$\begin{aligned} F(x) &= F(1) - \int_1^x g(t)\mathrm{d}t + \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} \\ &= F(1) - \int_1^x g(t)\mathrm{d}t + \ln x \end{aligned}$$

Pour $0 < x < 1$ on a $\left|\displaystyle\int_1^x g(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant M(1-x) \leqslant M$.

Ainsi $F(x) \overset{0^+}{=} -\ln x + O(1)$, donc $F(x) \overset{0^+}{\sim} -\ln x$.

c) La fonction F est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Elle est donc intégrable sur tout segment de $\mathbb{R}^{+*}$.

On a $F(x) \overset{0^+}{\sim} -\ln x$, donc F est intégrable sur $]0,1]$.

Pour $x > 0$, en intégrant par parties :

$$\begin{aligned} F(x) &= \left[\frac{-\cos t}{t^2}\right]_x^{+\infty} + 2\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t^3}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\cos x}{x^2} + 2\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t^3}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Mais $\left|\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t^3}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^3} = \frac{1}{2x^2}$.

Il en résulte $F(x) \overset{+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

Ainsi F est intégrable sur $[1,+\infty[$, donc sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Pour calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} F(x)\mathrm{d}x$, on procède par IPP.

On sait que $\lim\limits_{+\infty} xF(x) = 0 \lim\limits_{0} xF(x) = 0$, et on en déduit :

$$\int_0^{+\infty} F(x)\mathrm{d}x = [xF(x)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} xF'(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\ \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}(\text{ classique }).$$

---

742. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires discrètes a valeurs dans $]0,+\infty[$,

indépendantes et de même loi. On pose $Y_1 = \dfrac{X_1}{X_1+X_2}$ et $Y_2 = \dfrac{X_2}{X_1+X_2}$

a) Démontrer que Y_1 admet une espérance finie et calculer $\mathbf{E}(Y_1)$.

b) Démontrer que Y_1 admet une variance finie, puis montrer que $\operatorname{cov}(Y_1,Y_2) = -V(Y_1)$.

Sol : Les variables positives Y_1, Y_2 sont majorées par 1 .

Elles ont donc une espérance.

Par symétrie du problème (X_1, X_2 étant indépendantes), on a $\mathrm{E}(Y_1) = \mathrm{E}(Y_2)$.

Je détaille la partie subtile, il faut voir que Y_1 et Y_2 sont obtenues à partir

de la même fonction pour le couple (X_1, X_2) et pour (X_2, X_1) .

Par indépendance et même loi ces 2 couples ont même loi (*) donc la fonction garde

la même loi, et donc la même espérance.

(*) $\mathcal{P}(X_1 = a, X_2 = b) \underset{ind}{=} \mathcal{P}(X_1 = a)\mathcal{P}(X_2 = b) \underset{loi}{=} \mathcal{P}(X_2 = a)\mathcal{P}(, X_1 = b) \underset{ind}{=}$.

Mais $Y_1 + Y_2 = 1$, donc $\mathrm{E}(Y_1) = \mathrm{E}(Y_2) = \dfrac{1}{2}$.

On a $0 \leqslant Y_1^2 \leqslant 1$, donc Y_1^2 admet une espérance donc est de variance finie. Ensuite :

$$\begin{aligned} V(Y_1+Y_2) &= V(Y_1) + V(Y_2) + 2\operatorname{cov}(Y_1,Y_2) \\ &= 2V(Y_1) + 2\operatorname{cov}(Y_1,Y_2) \end{aligned}$$

Mais $V(Y_1+Y_2) = V(1) = 0$.

Ainsi $\operatorname{cov}(Y_1,Y_2) = -V(Y_1)$.

---

680. Considérons l'application u définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $u(P) = X^n P\left(\dfrac{1}{X}\right)$.

a) Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Montrer que u est diagonalisable et exhiber une base de vecteurs propres.

(Oral Ccp)...On aura tout vu.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $\Phi : P(X) \mapsto X^n P(1/X)$.

Montrer que Φ est un endomorphisme diagonalisable de $\mathbb{R}_n[X]$.

Sol :

- On trouve $\Phi\left(X^k\right) = X^{n-k}$.

La matrice dans $1, X, \ldots, X^n$ est « antidiagonale » de coefficients antidiagonaux 1.

On a $\Phi^2 = \mathrm{Id}$, donc Φ est une symétrie vectorielle donc diagonalisable.

- Les polynômes invariants sont les $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ qui sont tels que $a_{n-k} = a_k$.

- Les polynômes changés en leur opposé sont les $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ tels que $a_{n-k} = -a_k$.

- Une base de E_1 est les $U_k = X^k + X^{n-k}$ où $k \leqslant n-k$, donc $0 \leqslant k \leqslant \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

Une base de E_{-1} est les $V_k = X^k - X^{n-k}$ où $k < n-k$, donc $0 \leqslant k \leqslant \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$.

1000. a) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \geqslant 2$ simplement scindé sur $\mathbb{R}$.

Montrer que P' est simplement scindé.

b) $8X^8 + 7X^7 + 4X^4 + 3X^3 + 2019X^2 + 2018X + 666$ est-il simplement scindé sur $\mathbb{R}$?

Sol : a) On applique Rolle à P , $n-1$ fois.

b) Si c'était le cas, P' aussi P" etc...

Mais $P^{(5)}$, admet 0 comme racine double.

1001. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant tel que $P\left(X^2\right) = P(X)P(X-1)$.

a) Soit ω une racine de P. Montrer que ω^2 est aussi racine de P.

b) Montrer que les racines de P sont soit nulles, soit de module 1 .

c) Montrer que 0 n'est pas racine de P.

d) Déterminer les polynômes solutions.

Sol voir exo de première année.

1015. Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*, P_n = \prod_{k=1}^{n}(X-k)$.

a) Montrer que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n$.

b) Montrer que P_n' admet une unique racine dans $]0,1[$. On la note λ_n.

c) Simplifier $\frac{P_n'}{P_n}$.

d) En déduire un DL asymptotique de λ_n quand $n \to +\infty$.

Sol : a) Classique comparaison série-intégrale.

b) P est scindé simple sur $\mathbb{R}$, donc on applique Rolle, mais aïe entre 1 et 2...

c) Classique P scindé simple sur $\mathbb{R}$, $\frac{P_n'}{P_n} = \sum_{1}^{n} \frac{1}{X-k}$.

d) $\sum_{1}^{n} \frac{1}{\lambda_n - k} = 0$.

On encadre $\lambda_n - k$, pour k de 3 à n.

On obtient $\frac{1}{\lambda_n - 1} + \frac{1}{\lambda_n - 2} \underset{\infty}{\sim} \ln(n)$.

Donc attention aux signes!! $\frac{1}{\lambda_n - 1}$ tend vers $+\infty$, λ_n tend vers 1.

DL de $\lambda_n = 1 + \frac{1}{\ln(n)} + o\left(\frac{1}{\ln(n)}\right)$.

1154. CCINP. Soient $a \in \mathbb{R}$ et, pour $P \in \mathbb{R}[X], N_a(P) = |P(a)| + \int_0^1 |P'(t)|\, \mathrm{d}t$.

a) Montrer que N_a est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.

b) Montrer que, si E est un espace vectoriel réel muni d'une norme N,

si $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ converge vers $x \in E$, alors $N(x_n) \to N(x)$.

c) Pour quelles valeurs de a la suite des $P_n = \left(\frac{X}{2}\right)^n$ est-elle convergente pour N_a ?

Sol : a) Dois-je rédiger ?

Inégalités triangulaires, nullité de l'intégrale d'une fonction positive, cie...

b) Le nerf de l'histoire, la notion de norme est $1 - Lip$, donc cie.

Rq : par inégalité triangulaire normale puis inversée :

$|\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x - y\|$.

c) Par b) il **faut** la cv de $N_a(P_n)$.

$N_a(P_n) = \dfrac{1}{2^n}[1 + |a|^n]$, $|a| \leqslant 2$ est CN.

Alors par b) si $|a| < 2$, la limite de $N_a(P_n)$ étant 0,

la seule limite éventuellement recevable serait le poly nul.

La réciproque est claire.

Mais $a = 2$, $N_a(L) = 1$ est CN,

on remplace pour la réciproque, il vient $L(2) = 1$ et ...$L' = 0$.

On teste $L = 1$, attention L est un polynôme.

Ca marche facilement.

Pour $a = -2$, c'est pas la même tambouille...

Il nous faudrait $L(-2) = (-1)^n$, ben non, pas de cv.

Plus en classe si besoin.

1151. CCINP. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telles que $M = \frac{1}{3}(A+2B) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

a) Calculer $AB^T + BA^T$. Ind. Calculer MM^T.

b) Montrer que $A = B$.

Sol : Rq , ça marche avec des réels positifs de somme 1 qcq.

a) On développe MM^T, il vient (par les diff orthogonalités) $AB^T + BA^T = 2I_n(*)$.

b) Donc $\forall X$, $\|(AB^T + BA^T)X\| = 2\|X\| \leqslant \|AB^T X\| + \|BA^T X\| = 2\|X\|$.

C'est donc un cas d'égalité de l'inégalité triangulaire.

Les vecteurs sont donc positivement liés.

Mais les matrices orthogonales conservent les normes.

Le coeff positif est donc 1.

Il vient $AB^T X = BA^T X$, ainsi $AB^T = BA^T = I_n(*) = AA^T$,

les matrices sont inversibles , $A = B$.

1153. CCINP. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M \neq I_n, M^3 = I_n$ et $M^T M = MM^T$.

a) Montrer que $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

b) Déterminer les matrices vérifiant ces hypothèses dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Sol : a) $(M.M^T)^3 = I_n$, en développant , puis rangement.

Or MM^T est symétrique réelle donc dz, $D^3 = I_n$, $D = I_n$.

b) Par déterminant égal à 1, c'est une rotation.

Les angles recevables sont $\pm\dfrac{2\pi}{3}$.

1173. CCINP. On souhaite montrer l'égalité $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t^2)\ln(1-t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n(2n-1)^2}$.

a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t^2)\ln(1-t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

b) Donner le développement en série entière de $\ln(1-t)$ et transformer le problème en un problème d'interversion intégrale/somme.

c) Calculer l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^1 \ln\left(t^2\right) t^{2n-2}\, \mathrm{d}t$.

d) En déduire l'égalité demandée.

Sol a) Pas obligatoire ! On va utiliser Fubini, mais à CCINP oui.

Equivalent en 0^+ à $-2\ln(t)$, en 1 négligeable devant $\ln(1-t)$.

b) On développe la dse, on applique Fubini (2 hyp) une fondamentale

$\displaystyle\sum \int |f_n|$ cv , oui on est en $\dfrac{K}{n^3}$.

La cv simple vient de l'existence du dse.

c)$\dfrac{2}{n(2n-1)^2}$, par IPP à bien justifier...

d) On a tout fait sauf calculer la somme, elts simples, sommes partielles,

$H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$.

Puis on sépare la somme des inverses des carrés en pairs et impairs.

Dois-je rédiger plus ?

(Oral X-Cachan Psi) Soient n dans $\mathbb{N}$, A, B dans $\mathbb{C}[X]$, avec $A \neq 0$, avec $\deg(B) = n+1$.

Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$ qui à un polynôme P associe le reste de la division euclidienne de AP par B.

1. Montrer que si A et B sont sans racine commune, alors φ est un isomorphisme.

2. On suppose que les racines de B sont simples. Que dire des valeurs propres de φ ?

Cet endomorphisme est-il diagonalisable ?

1. Tout d'abord, on vérifie que φ est bien un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$.

Puisque $\deg(B) = n + 1$, il est clair que $\varphi(\mathbb{C}_n[X]) \subset \mathbb{C}_n[X]$.

Ensuite, soit P_1, P_2 dans $\mathbb{C}_n[X]$. Posons :

$$\left\{ \begin{array}{l} AP_1 = Q_1 B + R_1 \\ AP_2 = Q_2 B + R_2 \end{array} \right. \text{ avec } \left\{ \begin{array}{l} \deg(R_1) \leqslant n \\ \deg(R_2) \leqslant n \end{array} \right.$$

Avec ces notations : $\left\{ \begin{array}{l} R_1 = \varphi(P_1) \\ R_2 = \varphi(P_2) \end{array} \right.$

Pour tous α, β dans $\mathbb{C}$ on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} A(\alpha P_1 + \beta P_2) = (\alpha Q_1 + \beta Q_2) B + \alpha R_1 + \beta R_2 \\ \deg(\alpha R_1 + \beta R_2) \leqslant n \end{array} \right.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha P_1 + \beta P_2) &= \alpha R_1 + \beta R_2 \\ &= \alpha \varphi(P_1) + \beta \varphi(P_2) \end{aligned}$$

Ainsi φ est un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$.

On suppose que A et B n'ont pas de racine commune.

Soit P dans $\operatorname{Ker}(\varphi)$ (donc tel que B divise AP).

Tout racine de B dans $\mathbb{C}$ est ainsi racine de AP, donc de P, avec une multiplicité au moins égale.

Le polynôme P admet alors au moins $n + 1$ racines

(chacune comptée autant de fois que sa multiplicité)

alors que $\deg(P) \leqslant n$.

La seule possibilité est $P = 0$.

Ainsi φ est un isomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$.

2. On suppose que les racines de B sont $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$, distinctes deux à deux.

Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$ un vecteur propre de φ, pour une valeur propre λ.

Il existe donc $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que :

$$AP = QB + \lambda P \text{ donc } (A-\lambda)P = QB$$

On en tire :

$$\forall k \in [\![0,n]\!], (A(\alpha_k) - \lambda) P(\alpha_k) = 0$$

Nécessairement, il existe $j \in [[0,n]]$ tel que $\lambda = A(\alpha_j)$,

sans quoi P (qui est de degré n) possèderait les $n+1$ racines distinctes α_k, ce qui est exclu.

Pour $k \in [[0,n]] \backslash \{j\}$, on a donc $P(\alpha_k) = 0$.

Ainsi : $\exists \mu \in \mathbb{C}, P = \mu \prod_{k \neq j} (X - \alpha_k)$.

Réciproquement, pour tout $j \in [[0,n]]$, posons $P_j = \prod_{k \neq j} (X - \alpha_k)$.

Par construction, le polynôme $(A - A(\alpha_j)) P_j$ s'annule tous les α_k, avec $k \in [[0,n]]$.

Il existe donc Q dans $\mathbb{C}[X]$ tel que $(A - A(\alpha_j)) P_j = QB$.

Autrement dit : $AP_j = QB + A(\alpha_j) P_j$.

Puisque $\deg(A(\alpha_j) P_j) < \deg(B)$,

il en résulte $\varphi(P_j) = A(\alpha_j) P_j$.

En résumé, les valeurs propres de φ sont les $\lambda_j = A(\alpha_j)$ pour $j \in [[0,n]]$.

NB : rien n'indique que les λ_j soient distinctes.

Remarquons que la famille $(P_j)_{0 \leqslant j \leqslant n}$ est libre (donc constitue une base de $\mathbb{C}_n[X]$).

En effet si $\sum_{j=0}^{n} \delta_j P_j(X) = 0$, remplacer X par α_k donne $\delta_k = 0$.

L'application φ, qui possède une base de vecteurs propres, est diagonalisable.

1157. IMT. a) Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x^k = 1$

admet une unique solution dans $[0,1]$. On la note a_n.

b) Montrer que la suite (a_n) est décroissante et minorée par $1/2$.

c) Montrer que la suite (a_n) converge et déterminer sa limite.

Sol : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose sur $\mathbb{R}^+$, $f_n(x) = x^n + x^{n-1} + ... + x^2 + x - 1$.

La fonction f_n est **strictement croissante** et **continue** sur l'**intervalle** $\mathbb{R}^+$,

elle induit donc une bijection de $\mathbb{R}^+$ vers $\left[f_n(0), \lim\limits_{+\infty} f_n \right[= [-1, +\infty[$.

Donc il existe un unique u_n positif tel que $f_n(u_n) = 0$.

On remarque que $\forall x \in \mathbb{R}_*^+$, $f_{n+1}(x) > f_n(x)$, ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$

$f_{n+1}(u_n) = u_n^{n+1} > 0 = f_{n+1}(u_{n+1})$ et donc $u_{n+1} < u_n$,

la suite (u_n) est donc strictement décroissante.

Cette suite décroissante est minorée par 0 , donc cvte (thm limite monotone) .

$u_2 < u_1 = 1 \Rightarrow 0 < u_n^{n+1} < u_2^{n+1} \underset{\infty}{\to} 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n^{n+1} = 0$.

Sur $[0,1[$, $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k - 2 = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} - 2 = \frac{2x - x^{n+1} - 1}{1-x}$

Or $f_n(u_n) = 0$ donc $2u_n - 1 = u_n^{n+1}$, il en sort :

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{1}{2}}$$

1185. CCINP. On considère deux variables aléatoires X_1 et X_2 indépendantes

et suivant toutes deux la loi binomiale de paramètres n et $1/2$.

Pour tout $\omega \in \Omega$ on pose $M(\omega) = \begin{pmatrix} X_1(\omega) & 1 \\ 0 & X_2(\omega) \end{pmatrix}$.

Il s'agit de déterminer la probabilité que $M(\omega)$ soit diagonalisable.

a) En développant de deux manières le polynôme $(1+X)^{2n}$,

montrer l'égalité $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right)^2=\left(\begin{array}{c} 2n \\ n \end{array}\right)$.

b) Conclure.

Sol : $\mathcal{P}(X_1=k)=\dfrac{\binom{n}{k}}{2^n}$.

On passe par l'extérieur, $\mathcal{P}(X_1\neq X_2)=1-\displaystyle\sum_{0}^{n}\left(\dfrac{\binom{n}{k}}{2^n}\right)^2=1-\dfrac{\binom{2n}{n}}{4^n}$.

Stirling tend vers 1 , logique ?

---

707. Soit $\alpha\in[0,1[$ et $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+^*$ continue par morceaux

telle que $f(x+1)/f(x)\to\alpha$ lorsque $x\to+\infty$.

Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Sol :

Il suffit de montrer que $x\mapsto\displaystyle\int_A^x f(x)\mathrm{d}x$ est majorée.

Soit $\mu\in]\alpha,1[$. Il existe $A>0$ tel que :

$$\forall x\geqslant A, 0\leqslant\frac{f(x+1)}{f(x)}\leqslant\mu$$

Par une récurrence facile :

$$\forall x\geqslant A, f(x+k)\leqslant\mu^k f(x)$$

et on en déduit :

$$\begin{aligned}\int_A^{A+n} f(x)\mathrm{d}x &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{A+k}^{A+k+1} f(x)\mathrm{d}x \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_A^{A+1} f(x+k)\mathrm{d}x \\ &\leqslant \left(\sum_{k=0}^{n-1} \mu^k\right) \int_A^{A+1} f(x)\mathrm{d}x \\ &\leqslant \frac{1}{1-\mu} \int_A^{A+1} f(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Ainsi la suite $n \mapsto \displaystyle\int_A^{A+n} f(x)\mathrm{d}x$ est majorée.

La fonction croissante $x \mapsto \displaystyle\int_A^{x} f(x)\mathrm{d}x$ est donc elle aussi majorée.

Il en résulte que la fonction f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

---

743. Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

Démontrer que $\mathcal{P}(X \geqslant \lambda + 1) \leqslant \lambda$ et que $\mathcal{P}\left(X \geqslant \dfrac{\lambda}{3}\right) \leqslant \dfrac{9}{4\lambda}$.

Sol : On a : $(X \geqslant \lambda + 1) \subset |X - \lambda| \geqslant 1$.

Ainsi : $\mathcal{P}(X \geqslant \lambda + 1) \leqslant \mathcal{P}(|X - \lambda| \geqslant 1)$.

Par Bienaymé-Tchebychev :

$$\mathcal{P}(|X - \lambda| \geqslant 1) \leqslant \frac{V(X)}{1^2} = \lambda$$

Il en découle : $\mathcal{P}(X \geqslant \lambda + 1) \leqslant \lambda$.

Rq : Markov marche bien aussi !

On a l'inclusion :

$$\left(X \leqslant \frac{\lambda}{3}\right) \subset \left(|X - \lambda| \geqslant \frac{2\lambda}{3}\right)$$

Toujours par Bienaymé-Tchebychev :

$$\mathcal{P}\left(|X-\lambda| \geqslant \frac{2\lambda}{3}\right) \leqslant \frac{V(X)}{(2\lambda/3)^2} = \frac{9}{4\lambda}$$

Ainsi $\mathcal{P}\left(X \leqslant \frac{\lambda}{3}\right) \leqslant \frac{9}{4\lambda}$.

Erreur énoncé !

---

661. On considère $E = M_n(\mathbb{C}), A, B \in E$ et les endomorphismes de

$E, u : M \mapsto AM$ et $v : M \mapsto MB$.

a) Montrer que u est un automorphisme si, et seulement si, A est inversible. Que dire pour v?

b) Montrer que u est diagonalisable si, et seulement si, A est diagonalisable.

Que dire pour v?.

c) On suppose A et B diagonalisables.

Montrer que l'application $\varphi : M \mapsto AMB$ est diagonalisable.

Que dire de la réciproque ?

Jmf , DDl ? ?255.256.
1212 ccp

Sol : Je fais évoluer l'énoncé.

D'abord cet exerrcice existe sous plusieurs formes, matricielles, ou version $f \mapsto g \circ f \circ h$
.

Ou encore $M \mapsto AM$ ou MB ou $f \circ h$ etc...

La première idée pour moi, est d'abord de repérer la linéarité ($\dim n^2$).

La remarque de la transposition qui permet de changer le côté...

Puis , trés important , les cas de nullités.

1. Montrer que $\varphi = 0$ si et seulement si $A = 0$ ou $B = 0$.

Sol :

1. Bien sûr, si $A = 0$ ou $B = 0$, on a $\varphi = 0$.

On suppose donc $A \neq 0$ et $B \neq 0$, et il faut montrer $\varphi \neq 0$.

Première méthode : soient a, u, b dans $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ canoniquement associés à A, M, B.

Par hypothèse, il existe x, y non nuls tels que $x' = b(x) \neq 0$ et $y' = a(y) \neq 0$.

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ tel que $u(x') = y$.

Alors $(aub)(x) = (au)(x') = a(y) = y' \neq 0$.

Ainsi l'endomorphisme $v = aub$ est non nul, sa matrice AMB aussi, donc $\varphi \neq 0$.

Deuxième méthode : on raisonne avec les matrices $E_{i,j}$ de la base canonique.

Pour tous indices i, j, r, n, on a :

$$\begin{aligned}[\varphi(E_{i,j})]_{r,s} &= \sum_{k,\ell=1}^{n} [A]_{r,k} [E_{i,j}]_{k,\ell} [B]_{\ell,s} \\ &= [A]_{r,i}[B]_{j,s}\end{aligned}$$

Si $A \neq 0, B \neq 0$, il existe r, i, j, s tels que $[A]_{r,i} \neq 0$ et $[B]_{j,s} \neq 0$.

Avec ces notations : $[\varphi(E_{i,j})]_{r,s} \neq 0$, donc $\varphi(E_{i,j}) \neq 0$, donc $\varphi \neq 0$.

2. Montrer que φ est nilpotente si et seulement si A ou B est nilpotente.

Sol :

Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a $\varphi^2(M) = A\varphi(M)B = A^2MB^2$.

Par récurrence évidente : $\forall r \in \mathbb{N}, \varphi^r(M) = A^rMB^r$.

Il est donc clair que si A ou B est nilpotente, alors φ est nilpotente.

Réciproquement, on suppose que $\varphi^r = 0$, pour un certain r dans $\mathbb{N}^*$.

Ainsi $M \mapsto A^rMB^r$ est l'application nulle, donc $A^r = 0$ ou $B^r = 0$ (question 1) et c'est fini.

3. On suppose A et B diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On va montrer que φ est diagonalisable dans $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$.

- Soit u, v dans $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$ définis par :

$u(M) = AM$ et $v(M) = MB$. Montrer que u et v sont diagonalisables dans $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$.

- Montrer plus précisément qu'il existe une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

formée de vecteurs propres à la fois pour u et v.

- En déduire que φ est diagonalisable.

Sol :

3. Notations uv ...Soit $u, v \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$ définis par : $u(M) = AM$ et $v(M) = MB$.

Ainsi $\varphi = u \circ v = v \circ u$,

et $\begin{cases} u^k(M) = A^k M \\ v^k(M) = MB^k \end{cases}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

On en déduit, par linéarité :

$$\forall P \in \mathbb{C}[X], \begin{cases} P(u)(M) = P(A)M \\ P(v)(M) = MP(B) \end{cases}$$

On suppose que les matrices A et B diagonalisables.

Elles sont donc annulées par des polynômes scindés simples, respectivement P et Q.

Ainsi $P(u) = 0$ et $Q(v) = 0$, donc u et v sont diagonalisables dans $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$.

- Notons $E_\lambda(u)$ le sous-espace propre de u pour la valeur propre λ.

On a donc la décomposition en somme directe : $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) = \overset{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)}{\oplus} E_\lambda(u)$.

Puisque $uv = vu$, chacun des $E_\lambda(u)$ est stable par v.

v étant diagonalisable, sa restriction v_λ à chaque $E_\lambda(u)$ est diagonalisable (cours).

On munit chaque $E_\lambda(u)$ d'une base de vecteurs propres de v_λ.

Soit (e) la base de E formée par concaténation des bases précédentes.

Par construction, (e) est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ formée de vecteurs propres de u et de v.

Dans cette base, les matrices de u et v, donc celle de $\varphi = uv$, sont diagonales.

On a ainsi montré que si A, B sont diagonalisables, alors φ est diagonalisable.

4. Retrouver le résultat de la question (3c), mais sans l'aide de u et v,

et en indiquant comment former une base de vecteurs propres de φ à partir d'une base

de vecteurs propres de A et d'une base de vecteurs propres de $B^\top$.

Sol :

4. La matrice $B^\top$, tout comme B, est diagonalisable.

Par ailleurs, on a $\operatorname{Sp}\left(B^\top\right) = \operatorname{Sp}(B)$ (les multiplicités étant les mêmes).

Soit $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une base de vecteurs propres de A, associées resp. aux $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$.

Soit $(Y_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ une base de vecteurs propres de $B^\top$, associées resp. aux v $(\mu_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$.

Pour i, j dans $[[1, n]]$, posons $M_{i,j} = X_i Y_j^\top \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On a successivement :

$$\begin{aligned} \varphi\left(M_{i,j}\right) &= A X_i Y_j^\top B = \left(A X_i\right)\left(B^T Y_j\right)^\top \\ &= \lambda_i \mu_j X_i Y_j^\top = \lambda_i \mu_j M_{i,j} \end{aligned}$$

Montrons que les n^2 matrices $M_{i,j}$ sont libres donc forment une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Soit $(\lambda_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ des scalaires.

On suppose $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \lambda_{i,j} M_{i,j} = 0$ c'est-à-dire $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i \sum_{j=1}^{n} \lambda_{i,j} Y_j^\top = 0$.

Ainsi : $\forall Z \in \mathbb{C}^n, \sum_{i=1}^{n} X_i \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_{i,j} Y_j^\top Z \right) = 0$

Dans cette égalité, les $\alpha_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{i,j} Y_j^\top Z$ sont des scalaires.

La famille $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ étant libre, il en résulte :

$$\forall i \in [[1, n]], \forall Z \in \mathbb{C}^n, \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_{i,j} y_j \right)^\top Z = 0$$

On en déduit l'égalité $\sum_{j=1}^{n} \lambda_{i,j} Y_j = 0$.

Par liberté de $(Y_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$, tous les $\lambda_{i,j}$ sont nuls.

La famille $(M_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est donc une base de vecteurs propres

de φ (dans cette notation, chaque $M_{i,j}$ est associée à $\lambda_i \mu_j$).

La méthode précédente montre que :

$$\mathrm{Sp}(\varphi) = \{\lambda\mu, \lambda \in \mathrm{Sp}(A), \mu \in \mathrm{Sp}(B)\}$$

1212. CCINP. Pour $A \in \mathcal{M}_{\mathrm{n}}(\mathbb{R})$, on note $f_A : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto AM$.

a) Montrer que f_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b) Montrer que si $A^2 = A$ alors f_A est un projecteur.

c) Montrer que A est diagonalisable si et seulement si f_A l'est.

d) Construire une matrice propre de f_A à l'aide d'un vecteur propre de A.

e) Construire un vecteur propre de A à l'aide d'une matrice propre de f_A.

f) En déduire que $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(f_A)$.

Sol : a) Facile , linéaire et de E vers E.

b) Si A projecteur , $\forall M, f_A \circ f_A(M) = A^2 M = AM = f_A(M)$.

c) Si A diagonalisable, elle est annulée par un polynôme Q scindé simple.

Alors $Q(f_A) = f_{Q(A)} = 0$ donc par la réciproque du thm précité f_A est diagonalisable.

Réciproquement : si f_A est diagonalisable , elle est annulée par un polynôme S scindé simple.

$S(f_A) = 0$, mais $S(f_A) = f_{S(A)}$ donc $S(A)$ est nulle aussi.

Rq importante f_B nulle ssi $B = 0$, car si $B \neq 0$, $\exists M \neq 0$ telle que $f_B(M)$ non nulle .

Il suffirait de prendre une colonne de M dans un suppl de $\ker(B)$.

d) Soit $X \neq 0$ tel que $AX = \lambda X$, soit M dont les colonnes sont toutes X,

alors $f_A(M) = \lambda M$.

e) Si on a une matrice propre, avec un calcul similaire au précédent, $f_A(M') = \mu M'$,

en notant C_1 la première colonne de M' , on a $AC_1 = \mu C_1$.

f) Il ressort de ce qui précède que les vp de l'un sont vp de l'autre.

---

713. On considère la suite $(a_n)_n$ définie par $a_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n t \ \mathrm{dt}$.

a) Étudier les variations de la suite $(a_n)_n$ puis sa limite.

b) Déterminer une relation de récurrence entre a_{n+1} et a_{n-1}.

c) Justifier la convergence de la série de terme général $(-1)^n a_n$

d) Montrer que la série entìre de coefficient a_n a un rayon de convergence supérieur

ou égal à 1 puis montrer que la somme de cette série est solution de l 'équation

différentielle $(1 - x^2)\, y' - xy = 1$.

Sol :

La suite (a_n) tend vers 0 (classique) TCD.

Elle décroit par calcul de la différence.

b) IPP classique de première année.

c) On a tout pour le TSSA.

Le rayon R vérifie (a_n) tend vers 0... donc $R \geqslant 1$.

Sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ on a $\cos(t) \geqslant 1 - \frac{2}{\pi}t$, donc :

$$a_n \geqslant \int_0^{\pi/2} \left(1 - \frac{2}{\pi}t\right)^n \, \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2(n+1)}$$

Ainsi $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n$ diverge, donc $R = 1$.

Pour $|x| < 1$ (interversion justifiée par CVN) :

Oui car 1)segment 2) $|x.\cos(t)|^n \leqslant x^n$, géom à x fixé.

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n &= \int_0^{\pi/2} \sum_{n=0}^{+\infty} (x\cos t)^n \, \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{1 - x\cos t}\end{aligned}$$

Enfin, avec $u = \tan\frac{t}{2}$ puis $v = u\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$:

$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{1 - x\cos t} = \int_0^1 \frac{2 \, \mathrm{d}u}{(1+u^2) - x\,(1-u^2)}$

$= \int_0^1 \frac{2 \, \mathrm{d}u}{(1-x) + (1+x)u^2} = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \arctan\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$

d) Plus " malin" en cours, méthode de la série entière ds l'équa diff, on retouve b)

et on regarde la condition initiale en 0 ...

Et surtout, ça respecte la structure de l'énoncé.

987. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on pose $\varphi(A) = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$.

a) Montrer que l'on définit ainsi une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $\forall i \in [\![1, n]\!], |a_{i,i}| > \sum\limits_{j \neq i}^{n} |a_{i,j}|$. Montrer que pour tout $b \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'équation $AX = b$ admet une unique solution dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Sol : a) Est -ce du cours ?

Il suffirait que $A \in GL_n(\mathbb{R})$, soit un éventuel élément non nul du noyau ;X.

Soit j tel que $x_j \neq 0$ soit la plus grosse composante de X en valeur absolue.

En regardant $AX = 0$, on cible la ligne j , on isole $\alpha_{j,j} x_j$,

on majore brutalement par inégalité triangulaire , absurde.

1185. IMT. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $z = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$.

a) Donner le module et un argument de $z^k - 1$.

b) Montrer que $\sum\limits_{k=1}^{n-1} \left|z^k - 1\right| = 2 \operatorname{cotan}\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)$.

Sol : a) $z^k - 1 = e^{\frac{ik\pi}{n}} 2i \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

Le module (positif !) est $\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$. Car l'angle est bien placé.

Argument $\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{k\pi}{n}$.

b) On reporte le a) . On passe à la partie imaginaire , somme géométrique , angle moitié.

Ne pas oublier d'ajouter le terme 1 qui ne change pas la partie imaginaire

mais rend les calculs plus cools.

---

744. a) Soit X et Y des variables aléatoires réelles admettant un moment d'ordre 2.

Montrer que $(\mathbf{E}(XY))^2 \leqslant \mathbf{E}\left(X^2\right) \mathbf{E}\left(Y^2\right)$.

b) Soit Z une variable aléatoire à valeurs strictement positives, admettant un moment d'ordre 2 et $a \in]0, 1\,[$.

Montrer que $\mathcal{P}(Z \geqslant a\mathbf{E}(Z)) \geqslant (1-a)^2 \dfrac{\mathbf{E}(Z)^2}{\mathbf{E}\left(Z^2\right)}$.

Sol : a) C'est l'inégalité de Cauchy-Schwarz du cours page 8. Démo à relire ?

b) Soit $a \in]0, 1[$, et posons $m = E(Z) > 0$.

On doit montrer : $\mathcal{P}(Z \geqslant am) \geqslant (1-a)^2 \dfrac{m^2}{E\left(Z^2\right)}$.

On peut écrire : $Z = Z\mathbf{1}_{(Z \geqslant ma)} + Z\mathbf{1}_{(Z<ma)}$.

De plus, on a : $Z\mathbf{1}_{(Z<ma)} \leqslant ma$.

Par la première question :

$$\begin{aligned} E^2\left(Z\mathbf{1}_{(Z \geqslant ma)}\right) &\leqslant E\left(Z^2\right) E\left(\mathbf{1}^2_{(Z \geqslant ma)}\right) \\ &= E\left(Z^2\right) \mathcal{P}(Z \geqslant ma) \end{aligned}$$

Ainsi : $(1-a)^2 m^2 \leqslant E\left(Z^2\right) \mathcal{P}(Z < ma)$.

Oui car $Z\mathbf{1}_{(Z \geqslant ma)} = Z - Z\mathbf{1}_{(Z<ma)} \geqslant Z - ma$.

On passe à l'espérance (linéaire) : $E(Z\mathbf{1}_{(Z \geqslant ma)}) \geqslant E(Z) - ma = m(1-a)$.

On passe au carré (tout positif).

Finalement : $\mathcal{P}(Z \geqslant am) \geqslant (1-a)^2 \dfrac{m^2}{E\left(Z^2\right)}$.

---

719. On pose, pour tout réel $x > 1$, $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\operatorname{sh} t}{t}\, \mathrm{d}t$.

a) Vérifier que la fonction F est bien définie.

b) Déterminer le comportement asymptotique de F en $+\infty$.

c) Calculer $F(x)$.

Sol :

$\boldsymbol{f} : (x,t) \mapsto e^{-xt}\dfrac{\mathrm{sh}t}{t}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]1,+\infty[\times\mathbb{R}^{+*}$

On se donne x dans $]1,+\infty[$.

$t \mapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$(avec $f(0)=1$).

Pour tout $t \geqslant 1$, on a :

$$0 \leqslant e^{-xt}\frac{\mathrm{sh}\, t}{t} \leqslant \frac{1}{2t}e^{-(x-1)t}$$

Par domination, f_x est donc intégrable sur $[1,+\infty[$.

En conséquence, F est bien définie sur $]1,+\infty[$.

On va montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$.

Pour cela, soit (x_n) une suite de $[2,+\infty[$.

On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.

Il s'agit de montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} F(x_n) = 0$.

On définit les fonctions $f_n : t \mapsto f(x_n, t)$.

Ainsi $F(x_n) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t$.

Chaque f_n est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, et (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^{+*}$ vers la fonction nulle.

La suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t > 0$, on a :

$$0 \leqslant f_n(t) \leqslant e^{-2t}\frac{\mathrm{sh}\, t}{t}$$

(fonction intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$).

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} F(x_n) = 0$ (convergence dominée).

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 0$ (caractérisation séquentielle).

- On en vient au calcul de F par une première méthode.

On va montrer que F est $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$.

Ensuite on calculera $F'(x)$ pour en déduire $F(x)$.

Pour $x > 1, f_x : t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Pour $t > 0, x \mapsto f(x,t)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$.

De plus $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -e^{-xt}\mathrm{sh}t$.

On se donne $a > 1$. Pour $x \geqslant a$ et $t > 0$, on a :

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{sh}(t) \leqslant \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-(a-1)t}$$

(intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$).

Le théorème de dérivabilité d'une intégrale à paramètre s'applique.

Donc F est $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$ et :

$$\begin{aligned} F'(x) &= -\int_0^{+\infty} e^{-xt}\,\mathrm{sh}\,t\ \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \left(e^{-t(1+x)} - e^{t(1-x)}\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{e^{-t(1+x)}}{-(1+x)} - \frac{e^{t(1-x)}}{(1-x)}\right]_0^{+\infty} \end{aligned}$$

On trouve donc $F'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$.

Ainsi $F(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 0$

- Deuxième méthode, avec le DSE de $t \mapsto \mathrm{sh}t$:

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(t)\mathrm{d}t \text{ où } g_n(t) = \frac{e^{-xt}t^{2n}}{(2n+1)!}$$

Chaque g_n est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

De plus $\sum_{n\geqslant 0} g_n$ est CVS sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Sa somme $t \mapsto e^{-xt}\frac{\mathrm{sh}t}{t}$ est cpm sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons :

$$\begin{aligned} J_n &= \int_0^{+\infty} |g_n(t)|\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{(2n+1)!}\int_0^{+\infty} e^{-xt}t^{2n}\ \mathrm{d}t \end{aligned}$$

Le changement de variable $u = xt$ (recevable ?) donne :

$$\begin{aligned} J_n &= \frac{1}{(2n+1)!}\frac{1}{x^{2n+1}}\int_0^{+\infty} e^{-u}u^{2n}\ \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{(2n+1)x^{2n+1}} \leqslant \frac{1}{x^{2n+1}} \end{aligned}$$

Sachant $x > 1$, la série $\sum \int_0^{+\infty} |g_n(t)|\,\mathrm{d}t$ converge.

Le théorème d'intégration terme à terme donne :

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} g_n(t)\mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)x^{2n+1}} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \end{aligned}$$

On en déduit par équivalent de première année que $F \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{x}$.

Rq : pour Clément L : cet équivalent se trouve assez facilement par IPP.

$u' = e^{-xt}$, le crochet est convergent et vaut $\frac{1}{x}$.

Le morceau restant est de type $\dfrac{1}{x}o(1)$, pour les mêmes raisons que $F \to 0$.

---

731. Soit Γ la fonction de la variable réelle x définie par $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t$.

a) Donner le domaine de définition de Γ.

b) Donner un équivalent en $+\infty$ de $f(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} \ln(\Gamma(u))du$.

c) En déduire un équivalent en $+\infty$ de $\ln(\Gamma(x))$.

Sol :

a) C'est une question de cours !

La fonction $\gamma : t \mapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc intégrable sur tout segment de $\mathbb{R}^{+*}$.

On a $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2\gamma(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} t^{x+1}\mathrm{e}^{-t} = 0$.

Ainsi γ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Enfin on a $\gamma(t) \overset{t\to0^+}{\sim} t^{x-1}$.

La fonction γ est donc intégrable sur $]0, 1]$ si et seulement si $x - 1 > -1$.

Conlusion : $\Gamma(x)$ est défini si et seulement si $x > 0$.

On rappelle les propriétés classiques suivantes :

D'une part, $\forall x > 0, \Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$.

D'autre part, Γ est croissante sur $[2, +\infty[$.

b) La fonction γ est continue et strictement positive sur $\mathbb{R}^{+*}$, donc Γ est à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$.

Ainsi $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^{x+1} \ln\Gamma(t)dt$ est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Soit $F(x) = \displaystyle\int_2^x \ln\Gamma(t)\mathrm{d}t$ pour $x \geqslant 2$

. On a : $\quad F(x+1) = \int_2^{x+1} \ln\Gamma(t)\mathrm{d}t = \int_1^{x} \ln\Gamma(u+1)\mathrm{d}u.$

Or $f(x) = F(x+1) - F(x)$. Il en résulte :

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_1^x \ln\Gamma(t+1)\mathrm{d}t - \int_2^x \ln\Gamma(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_1^x \ln\left(\frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t)}\right)\mathrm{d}t + \int_1^2 \ln\Gamma(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_1^x \ln t \ \mathrm{d}t + \int_1^2 \ln\Gamma(t)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Ainsi $f(x) = x\ln x - x + C$ avec

$$C = 1 + \int_1^2 \ln\Gamma(t)\mathrm{d}t$$

Finalement, $f(x) \overset{+\infty}{\sim} x\ln x$.

c) La fonction Γ (donc la fonction $x \mapsto \ln(\Gamma(x))$ sont strictement croissantes sur $[2,+\infty[$.

Soit $x \geqslant 3$, on a donc :

$$\int_{x-1}^{x} \ln\Gamma(t)\mathrm{d}t \leqslant \ln\Gamma(x) \leqslant \int_x^{x+1} \ln\Gamma(t)\mathrm{d}t$$

Mais d'après la question 2 :

$$\int_{x-1}^{x} \ln\Gamma(t)\mathrm{d}t \overset{+\infty}{\sim} (x-1)\ln(x-1) \sim x\ln x$$

Ainsi $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{\ln\Gamma(x)}{x\ln x} = 1$, donc $\ln\Gamma(x) \overset{+\infty}{\sim} x\ln x$.