RMS Centrale
PSI *
Année 2019

Année -2.

Attention aux erreurs de frappes...

X,Mines ++

a) Soit u un endomorphisme en dimension 3 tel que $u^3 = 0$ et $u^2 \neq 0$.

Prouver qu'il existe une base où sa matrice est : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) Soit v un endomorphisme en dimension $3n$ tel que $v^3 = 0$ et $v^2 \neq 0$ et $rg(v) = 2n$.

Montrer qu'il existe une base où sa matrice est : $B = \left(\begin{array}{c|c|c} 0_n & 0_n & 0_n \\ \hline I_n & 0_n & 0_n \\ \hline 0_n & I_n & 0_n \end{array}\right)$

On a $\mathrm{rg}(v) = 2n$, donc $\dim \mathrm{Ker}(v) = n$.

L'égalité $v^3 = 0$ s'écrit $\mathrm{Im}\left(v^2\right) \subset \mathrm{Ker}(v)$.

Elle implique donc $\mathrm{rg}\left(v^2\right) \leqslant n$.

Soit w la restriction de v à $\mathrm{Im}(v)$.

On a les égalités $\left\{ \begin{array}{l} \mathrm{Im}(w) = \mathrm{Im}\left(v^2\right) \\ \mathrm{Ker}(w) = \mathrm{Ker}(v) \cap \mathrm{Im}(v) \end{array} \right.$

Le théorème du rang, appliqué à w, donne donc :

$$\begin{aligned} 2n &= \mathrm{rg}\left(v^2\right) + \dim(\mathrm{Ker}(v) \cap \mathrm{Im}(v)) \\ &\leqslant \mathrm{rg}\left(v^2\right) + n \end{aligned}$$

Ainsi $\mathrm{rg}\left(v^2\right) \geqslant n$, donc $\mathrm{rg}\left(v^2\right) = n$.

On a ainsi obenu $\left\{ \begin{array}{l} \mathrm{Im}\left(v^2\right) \subset \mathrm{Ker}(v) \\ \mathrm{rg}\left(v^2\right) = \dim \mathrm{Ker}(v) \end{array} \right.$

Il en résulte l'égalité $\mathrm{Im}\left(v^2\right) = \mathrm{Ker}(v)$.

On va maintenant construire une base convenable pour représenter v.

On choisit une base $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ de $\mathrm{Ker}(v) = \mathrm{Im}\left(v^2\right)$.

Il existe donc $e_1, \ldots, e_n$ dans E tels que :

$$\forall i \in [[1, n]], \varepsilon_i = v^2\left(e_i\right)$$

On forme alors la famille :

$$\mathcal{B} = \left(e_1, \ldots, e_n, v\left(e_1\right), \ldots, v\left(e_n\right), \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\right)$$

Il suffit de montrer que $\mathcal{B}$ est libre.

On se donne des scalaires $\lambda_i, \mu_i, \gamma_i$ tels que :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i + \sum_{i=1}^{n} \mu_i v\left(e_i\right) + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \varepsilon_i = 0$$

En appliquant v^2, on obtient : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varepsilon_i = 0$.

La liberté des ε_i entraine la nullité des λ_i.

$$\text{Ainsi : } \sum_{i=1}^{n} \mu_i v\left(e_i\right) + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \varepsilon_i = 0$$

On applique v et on obtient : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mu_i \varepsilon_i = 0$.

On en déduit la nullité des μ_i puis celle des γ_i.

Finalement $\mathcal{B}$ est libre : c'est une base de E.

La matrice de v dans $\mathcal{B}$ est bien la matrice désirée...

X !

Soit la série $\displaystyle\sum_n \left(\frac{1}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sqrt{k}} \right)$.

Il faut en déterminer la nature.

Au préalable on peut commencer par un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sqrt{k}$...

Il y a du cours et du travail, pour y arriver...

Sol : première idée , relire son cours pour revoir que :

Si $(a_n), (b_n)$ suites de $\mathbb{R}^{+*}$ équivalentes en l'infini (donc séries de même nature),

alors dans le cas de la divergence, les sommes partielles sont équivalentes.

Remarquer ensuite que $(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}) \sim \frac{1}{2\sqrt{k}}$, il viendrait comme en cours ce matin :

$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sqrt{k} \sim (-1)^k \sqrt{n}$..., on a aussi utilisé la comparaison séries-intégrales

pour retrouver $\sum^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \sim 2\sqrt{n}$.

X , ENS , ...

Exercice. 1 Soit $J = \left(\begin{array}{c|c} 0 & -I_p \\ \hline I_p & 0 \end{array}\right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $n = 2p$.

On dit que $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symplectique lorsque ${}^tMJM = J$.

1) Cet ensemble a t-il la structure de groupe pour le produit matriciel ?

2) Donner les CNS sur $(A, B, C, D) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ pour que la matrice $\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)$ soit symplectique.

3) Soit $M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)$ symplectique , avec D inversible .

En écrivant M sous la forme $M = \left(\begin{array}{c|c} I_p & Q \\ \hline O & I_p \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} * & O \\ \hline * & * \end{array}\right)$, montrer que $\det M = 1$.

4) Soit $M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)$ symplectique .

-i- Soit $v \in \mathbb{R}^p$, tel que $Dv = Bv = 0$. Montrer que $v = 0$.

-ii- Soient s_1 et s_2 2 réels distincts et $v_i \in \ker(D - s_iB)$.

Montrer que le produit scalaire $< Dv_1, Dv_2 >$ est nul .

-iii- Montrer qu'il existe $s \in \mathbb{R}$ tel que $D - sB$ soit inversible.

-iv- Montrer que $\det M = 1$.

Sol :

Exercice. 1 $J = \left(\begin{array}{c|c} 0 & -I_p \\ \hline I_p & 0 \end{array}\right)$, donc $J^2 = -I_{2p}$ et $J^{-1} = -J = {}^tJ$.

Et ${}^tMJM = J$ donc $\det({}^tMJM) = \det(J) \neq 0$, et ainsi $\det^2(M) = 1$.

1) C'est un ss gpe de $Gl_{2p}(\mathbb{R})$ car I_{2p} est là , $\forall (A,B) \in \mathcal{S}^2$,

${}^t(AB)J(AB) = {}^tB({}^tAJA)B = J$.

puis ${}^tMJM = J \Rightarrow J = ({}^tM)^{-1}JM^{-1} = {}^t(M^{-1})JM^{-1}$. (Toutes inversibles).

2) On développe par blocs : ${}^t\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} 0 & -I_p \\ \hline I_p & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & -I_p \\ \hline I_p & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow$

$\begin{cases} {}^tAC \in \mathcal{S}_n \\ {}^tDA - {}^tBC = I_n \\ {}^tDB \in \mathcal{S}_n \end{cases}$

3) Soit $M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)$ symplectique , avec D inversible .

$M = \left(\begin{array}{c|c} I_p & BD^{-1} \\ \hline O & I_p \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} A - BD^{-1}C & O \\ \hline C & D \end{array}\right) \Rightarrow \det M = (\det D)(\det(A - BD^{-1}C)) =$

Or $M \in$ S , ça donne : $\det({}^tDA - {}^tDBD^{-1}C) = \det(I_n + {}^tBC - {}^tBDD^{-1}C) = 1$

4) Soit $M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)$ symplectique .

-i- Soit $v \in \mathbb{R}^p$, tel que $Dv = Bv = 0$, $\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} 0 \\ \hline v \end{array}\right) = \overrightarrow{0} \Rightarrow \left(\begin{array}{c} 0 \\ \hline v \end{array}\right) \in \ker M$.

Or $M \in GL_n$ donc $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.

-ii- Soient s_1 et s_2 2 réels distincts et $v_i \in \ker(D - s_iB)$.

$< Dv_1, Dv_2 >= {}^t(DV_1)DV_2 = {}^tV_1{}^tDs_2BV_2 = s_1 < Bv_1, Dv_2 >= s_1{}^tV_1{}^tBDV_2$.

On arrive sur un schéma $s_1Q = s_2Q \Rightarrow (s_1 - s_2)Q = 0 \Rightarrow Q = 0$. Ok !

-iii- Il existe $s \in \mathbb{R}$ tel que $D - sB$ soit inversible, par l'absurde, il existerait $n+1$ valeurs 2 à 2 distinctes et non nulles avec $D - s_iB \notin Gl_n$.

Donc aussi $n+1$ vecteurs non nuls tels que $DV_j = s_jBV_j \neq \overrightarrow{0}$ (cf 4.i).

Donc ces DV_j sont tous non nuls et 2 à 2 orthogonaux . Impossible en dim n.

-iv- Soit la matrice symplectique $K(\alpha) = \left(\begin{array}{c|c} I_p & 0 \\ \hline -\alpha I_p & I_p \end{array}\right)$.

$K(\alpha)M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C - \alpha A & D - \alpha B \end{array}\right) \in$ S, or $D - \alpha B$ est inversible , donc par le 3) déterminant de M vaut 1.

Rq : $\det K(\alpha) = 1$.