Retours
PSI *
Année 2022-2023

Année 2023.

Si vous repérez une étourderie dans ce poly, voir pire, veuillez me le signaler ! ! !

Fichier évolutif ! !

Soit u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ et } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

1. Trouver un exemple de fonctions vérifiant cette propriété.

2. On prend u et v de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant la propriété ci-dessus.

Savez-vous ce qu'est une fonction harmonique ?

Montrer que u et v sont harmoniques.

3. On revient au cas où u et v de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que $u(0,0)$ est égale à la moyenne des valeurs de u sur le cercle de rayon r, pour tout $r \in \mathbb{R}_+^*$.

Sol :

1. Les fonctions $u : (x,y) \mapsto x$ et $v : (x,y) \mapsto y$ vérifient la propriété.

2. Une fonction harmonique vérifie $\Delta u = 0$, c'est-à-dire $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

par théorème de Schwarz. Idem pour v.

3. Pour tout $r \geqslant 0$, on s'intéresse à $G(r) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} u(r\cos\theta, r\sin\theta)d\theta$.

On va montrer que G est une fonction constante.

Posons $g : (r,\theta) \mapsto u(r\cos\theta, r\sin\theta)$, elle est de classe $\mathcal{C}^1$ par rapport à r et

$\dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = \cos\theta \dfrac{\partial u}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + \sin\theta \dfrac{\partial u}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)$

Soit $R > 0$, sur le disque fermé $\overline{D(0,R)}$, la fonction $\dfrac{\partial g}{\partial r}$ est bornée,

ce qui donne la condition de domination et ainsi G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout $[0,R]$

et donc sur $\mathbb{R}_+$, et on a pour tout $r > 0$:

$G'(r) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \left(\cos\theta \dfrac{\partial u}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + \sin\theta \dfrac{\partial u}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)\right) =$
$\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \left(\cos\theta \dfrac{\partial v}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) - \sin\theta \dfrac{\partial v}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta)\right) d\theta =$
$\dfrac{1}{2\pi r}\displaystyle\int_0^{2\pi} \left(-r\sin\theta \dfrac{\partial v}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + r\cos\theta \dfrac{\partial v}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)\right) d\theta$
$= \dfrac{1}{r2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \dfrac{\partial h}{\partial \theta}(r,\theta) = \dfrac{h(r,2\pi) - h(0,2\pi)}{2\pi r} = 0.$
en posant $h(r,\theta) = v(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

Ainsi G est constante sur $\mathbb{R}_+^*$ et continue sur $\mathbb{R}_+$, donc constante égale à $G(0) = u(0,0)$.

© Mines Ponts V Heyndericks ...

Exo 1 : On définit une suite réelle (a_n) en posant : $a_0 = 1$, $2a_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k a_{n-k}$.

1) Définition de f et rayon supérieur à 1.

2) Calculer f^2 en fonction des (a_n).

3) En déduire f et les (a_n).

Sol exo 23 de la feuille 6 dse.

Exo 2 : voir en partie 699 mines 21

Bonux : En dim infinie, avec $E = F \overset{\perp}{\bigoplus} F^{\perp}$.

Prouver que F est tjs un fermé.

Kdo : penser à lipschitziennneté.

Sol : F est le noyau de $P_{F^\perp}$, il faudrait la continuité pour appliquer

l'image réciproque du fermé $\{\overrightarrow{0}\}$.

Or elle est lipschitzienne de rapport 1 par Pythagore,

$\|P_{F^\perp}(x) - P_{F^\perp}(y)\|^2 = \|a - a'\|^2 \leqslant \|x - y\|^2 = \|a - a'\|^2 + \|b - b'\|^2$.

Rq perso pour celui qui pourrait améliorer cet exo :

En dim infinie, si $E = F \bigoplus F^\perp$, alors (cf exo 47 feuille 10) $(F^\perp)^\perp = F$.

Sot E ev préhilbertien, F sev de E.

1) Montrer que $F \subset (F^\perp)^\perp$.

2) Ici $E = \mathbb{R}[X]$.

On prend le produit scalaire $< P, Q >= \displaystyle\int_0^1 PQ(t)dt$.

$F = \{P \in E, P(1) = P'(1) = 0\}$.

Donner $F^\perp$ et $(F^\perp)^\perp$.

3) Donner une condition suffisante pour avoir $F = (F^\perp)^\perp$.

Sol 1) Cours .

2) On caractérise les éléments de F comme de la forme $(X - 1)^2 Q$,

ce qui simplifie bcp l'exo fait en classe avec $P(1) = 0$.

Soit Q ds l'orthogonal, on traduit l'orthogonalité avec $(X - 1)^2 Q$, le même Q ! !

Par thm nullité intégrale $Q = 0$.

Bref $F^\perp = \{\overrightarrow{0}\}$ et le double orthogonal E.

3) Syntaxe ambigüe, la dimension finie suffit, mais en plus subtil,

$E = F \bigoplus F^{\perp}$ aussi cf exo 47 eve.

Exo 2 : 1) Est-ce que $g(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$ est dse ?

2) Encadrement du rayon de cv .

Sol : voir dm 8 (20202021).

Exo pas gentil , limite HP.

© Diane CCINP :

Exercice 1 : Analyse

On considère les fonctions suivantes :

$$f : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt$$
$$\varphi : x \in \Big[1, +\infty\Big[\mapsto \int_{x-1}^{x} \ln(f(t))dt$$

1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

2. Pour $x \geqslant 1$, relier $f(x)$ et $f(x-1)$.

3. Montrer que φ est dérivable sur $[1, +\infty[$ et calculer φ'.

4. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 2} \frac{(-1)^n}{\varphi(n)}$.

Exercice 2 : Algèbre

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$, $f : P \mapsto (X-a)P' + P - P(a)$.

1. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$.

2. Déterminer $Im(f)$.

3. Déterminer les éléments propres de f.

Sol pour l'algègre : Voir MESLIN CCP, de RMS CCp 2019 retours compris.

Sol analyse :

1) On reconnait $\Gamma(1+x)$, la cie est + simple que ds le cours car plus de pb à gauche.

2) Comme ds le cours $f(x) = (x-1)f(x-1)$, (*) ipp...

3) On coupe en $x = 2$, thm fondamental analyse (""dedans"" c'est cie).

Il vient $\varphi' = \ln(x-1)$, par (*).

φ est donc croissante à partir de $x = 2$, or elle est positive et tend vers l'infini .

La positivité , vient de bornes croissantes et dedans positif.

Vers l'infini car $f(n) = n!$ rec simple (*) et la croissance.

On a ttes les hyp du cssa.

© Maximilien CCINP :

Analyse ; $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{t}}{e^t - 1} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_1^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$.

Fait en révisions, géométrique, Fubini...

Algèbre $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, tq $M^2 + M^T = I_n$.

2) Si M symétrique , pver dz ($\mathbb{C}$) et que $tr(M) \neq 0$, et inversible.

3) SS la symétrie , mq dz.

4) Mq M inversible ssi 1 pas vp.

Exo technique qui a été fait en révisions.

2) Attention à ne pas mélanger les hypothèses, et calculs...

Si M symétrique, $M^2 + M = I_n$, poly annul scindé simple : $(X^2 + X - 1)$.

Donc Dz, le terme cst est non nul donc inversible.

Les racines sont $\dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$, seules vp possibles.

Si la trace est nulle, il vient $q.\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) + (n-q).\left(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) = 0$.

Or $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$ donc comme $\sqrt{5}(q-(n-q)) + (-q-(n-q)) = 0$.

Il en sort $n = 0$ absurde.

3) On a $M = I_3 - (M^T)^2$, on reporte , un poly annul est $X(X-1)(X^2+X-1)(*)$.

Poly annul scindé simple, dz !

4) $M^T = (I-M)(I+M)$, or -1 n'est pas vp (*).

Donc $\det(M) = K\det(I-M)$ avec $K \neq 0$. Gagné.

Voir aussi rms centrale 2021 , 1012

Et Marie ds le même fichier.

© Edouard Mines Ponts.

Exercice 1 : Soit $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et Δ l'endomorphisme de dérivation.

Montrer que les espaces vectoriels stables par Δ sont les $\mathbb{R}_k[X]$ pour $k \in [\![1, n-1]\!]$.

2) Soit E un espace de dimension n avec $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^n = o_{\mathcal{L}(E)}$ et $f^{n-1} \neq o_{\mathcal{L}(E)}$.

a) Justifier qu'il existe x tel que $(x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x))$ soit une base de E.

b) Montrer qu'il existe ε base de E tel que $Mat_\varepsilon(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & \ddots & 0 \\ & & \ddots & & n-1 \\ 0 & & \cdots & & 0 \end{pmatrix}$.

c) Déterminer tous les espaces stables par f dans E.

Exercice 2 :

a) Déterminer la limite de $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{nt(1-t)}{(nt)^2+(1-t)^2}dt$.

b) $2^{\text{ème}}$ question non traitée avec l'étude des $\sum {I_n}^2$ et $\sum I_n$.

Sol : C'est intéressant (les 2) !

Algèbre : 1) Attention ! l'énoncé suggère l'équivalence !

La stabilité est évidente, mais là il faut prouver que si un sev est stable par Δ,

c'est un $\mathbb{R}_k[X]$. On peut faire plus simple...

Soit F sev stable et j le plus gros degré possible dans F.

On va pver que $F = \mathbb{R}_j[X]$, soit $P \in F$ avec $d^0(P) = j$.

Par stabilité, on a un $X^j + ... \in F$, on dérive on a un $jX^{j-1} + ... \in F$,

donc aussi $X^{j-1} + ... \in F$, etc (rec non rédigée) $1 \in F$.

Mezalor , en remontant la rec précédente et par stabilité $X + a \in F$ donne $X \in F$.

Et remontada sur le même principe, $X^2 \in F$,...$X^j \in F$, par stabilité $\mathbb{R}_j[X] \subset F$.

L'autre inclusion est limpide, gagné !

2) a) Fait en cours , il existe x_0 tq $f^{n-1}(x_0) \neq \overrightarrow{0}$,

il fait l'affaire, bon cardinal et liberté par l'abs surtout pas par rec.

b) On retourne la base précédente en inversant l'ordre des vecteurs.

Puis, après on dilate les vecteurs à partir du troisième , fois 2, puis le suivant fois 6...

On y est.

c) On va pver que ce sont les $F_j =< b_0, b_1, ..., b_j >$.

D'abord ces F_j sont stables par f.

Pour l'autre sens, il me vient une idée :

la matrice précédente est celle de l'endo de dérivation ds la base canonique, hasard...

Par isom matriciel la stabilité d'un sev est caractérisée par l'action de la matrice,

or cette matrice a été étudiée à la première question, vlà !

On peut faire plus rigoureux, ou plus simple aussi...

Soit $\phi : \mathbb{R}_k[X] \longrightarrow E$ linéaire qui envoie la base canonique sur $(b_k)_0^{n-1}$.

C'est un isomorphisme, soit $g = \phi^{-1} \circ \Delta \circ \phi$.

$g(F) \subset F \iff \Delta \circ \phi(F) \subset \phi(F)$.

J'ai écrit équivalent !

Analyse :

a) Cv dominée, la fonction cv simplement vers la fct nulle.

La fonction est dominée par $1/2$ qui est intégrable sur le segment.

Ce contrôle vient de $2ab \leqslant (a^2 + b^2)$.

b) On va montrer que $I_n \underset{\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)}{n}$.

Il faut me relire avec attention, j'ai pu dérailler.

Un plan logique pour débuter :

On pose $u = nt$ de classe $\mathcal{C}^1$.

On arrive à $\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^{\infty} g_n(u)du$, avec $g_n(u) = \mathbb{1}_{[0,n]}\dfrac{u(1-\frac{u}{n})}{u^2 + (1-\frac{u}{n})^2}$.

Alors à u fixé, quand n tend vers l'infini, on cv simple vers $\dfrac{u}{1+u^2}$.

Et là , désastre, pas intégrable !

Autre essai logique, on met $\dfrac{1}{n}$ en facteur, cv simple vers $g(t) = \dfrac{1-t}{t}$. Aïe...

Une idée plus poussée, on a vu apparaitre g, mais pb en 0^+.

Donc je l'enlève et je la fais apparaitre.

Pour gérer tout ça, je coupe en $1/n$.

Il faut relire , car j'ai vraiment pu écrire une...

On arrive à : $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{nt(1-t)}{(nt)^2+(1-t)^2}dt + \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{(1-t)dt}{nt} + \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{nt(1-t)}{(nt)^2+(1-t)^2} - \frac{(1-t)}{nt}dt.$

On doit controler le premier morceau par du négligeable devant l'équivalent envisagé.

$nt \leqslant 1$, la fonction est donc dominée par $\displaystyle\frac{(1-t)}{(nt)^2+(1-t)^2} \leqslant \frac{1}{1-t}$,

On calcule cette intégrale, qui se domine par $\displaystyle\frac{1}{n}$, grâce à $\ln(1+u) \leqslant u$. Bien.

Deuxième morceau : on le calcule, $\displaystyle\frac{\ln(n)}{n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$, parfait.

Le troisième , je n'arrive pas à le controler par cv dominée, j'y croyais pourtant...

A la main : je réduis au même dénominateur.

Je passe le controle en valeurs absolues, $nt \geqslant 1$.

Il vient $\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{(1-t)^3dt}{n^2t^2+(1-t)^2} \leqslant \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{1}{n^2t^2}dt = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}$. Youpi !

Ai-je raté plus simple ? Une cv dominée ? ? ?

Mezalor, la série des I_n est clairement divergente et celle des carrés est convergente

car négligeable devant $1/n^{3/2}$.

Vincent H (Saclay) : voir 205 rms 23 et exo 62 F10.

1) Mq $\displaystyle\sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{\sqrt{k(m-k)}} \geqslant \int_1^{m-1} \frac{dt}{\sqrt{t(m-t)}}$.

2) Calculer l'intégrale de droite avec $t = \dfrac{m}{1+u^2}$.

3) On pose $A_n = \left(\dfrac{1}{i+j-1}\right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

En étudiant pour $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), V^T A_n V$.

Mq les vp sont strictement positives.

4) On pose λ_n^+ et λ_n^- les plus grandes et petites vp .

Mq : $\lambda_n^- \leqslant \dfrac{1}{n}(a + b\ln(n))$.

Constantes indépendantes de n .

5) On pose $H = (1/\sqrt{1}, ..., 1/\sqrt{n})$.

Calculer $H^T A_n H$ et montrer que $\lambda_n^+ \geqslant \pi$.

Rq : Je pense que Vincent a oublié des questions et remarques.

Sol : 1) Attention courbe symétrique par rapport à $X = \dfrac{m}{2}$.

L'inégalité découle d'une comparaison série-intégrale, rq un dessin aide bcp.

2) Les calculs ne sont pas très durs mais un peu longs.

On arrive à $2\left(\arctan(\sqrt{m-1}) - \arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{m-1}}\right)\right)$.

3) Rappel de cours matrice symétrique définie positive est équivalent au spectre stric > 0.

Rq : attention aux normes de nos vecteurs...

Rappel bis : Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, positive. Alors, si λ est une valp (forcément réelle) de A,

et si $X \neq 0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ en est un vecp associé on a

$\min\limits_{sp(A)} |\lambda| \left\|X\right\|^2 \leqslant X^T A X = X^T(\lambda X) = \lambda \left\|X\right\|^2 \leqslant \max\limits_{sp(A)} |\lambda| \left\|X\right\|^2$

Rappel ter : $X^T A X = \displaystyle\sum_{1 \leqslant j,k \leqslant n} a_{j,k} x_k x_j$.

Notons $H_n = (a_{ij})$, de sorte que $a_{ij} = \dfrac{1}{i+j-1}$.

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}^T$.

Alors $X^T H_n X = \displaystyle\sum_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2} a_{ij} x_i x_j$.

En « remarquant »alors que $\dfrac{1}{i+j-1} = \displaystyle\int_0^1 t^{i+j-2}dt$ (astuce !) on a :

$$X^T H_n X = \int_0^1 \left(\sum_{i,j} x_i x_j t^{i+j-2} \right) dt = \int_0^1 \left(\sum_{i,j} (x_i t^{i-1})(x_j t^{j-1}) \right) = \int_0^1 \left(\sum_i x_i t^{i-1} \right)^2 dt \geqslant 0$$

Cela montre que la matrice H_n est symétrique positive.

De plus, par thm nullité de l'intégrale :

$$X^T H_n X = 0 \Leftrightarrow \forall t \in [0,1],\ \sum_{i=1}^{n} x_i t^{i-1} = 0 \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{justifiez !}} x_1 = \ldots = x_n = 0 \Leftrightarrow X = 0$$

donc H_n est définie positive. J'ai utilisé qu'un polynôme qui a trop de racines...

4) Je ne vois pas du tout à quoi sert le b... Il est inutile et ferait baisser l'information...

Je prends le dernier vecteur de la base canonique, $Z = (0, 0...., ., 1)^T$.(non vp).

Je calcule $\displaystyle\sum_1^n \lambda_i z_i^2 = Z^T H_n Z = \frac{1}{2n-1} \leqslant \frac{1}{n}$, par rappel ter.Rq Z normé.

Attention les (z_i) sont les coordonnées de Z dans un bon de dz.

On en déduit que λ_n^- tend vers 0 en l'infini.

5) Selon moi, il manque des questions (j'ai vu l'exo de Saclay posé à un autre élève).

Je calcule la norme au carré de H, c'est $\displaystyle\sum_1^n \frac{1}{k}$

qui est majorable par $1 + \ln(n)$ (*****) par comparaison série intégrale.

Puis je calcule $H^T H_n H = \displaystyle\sum_{(k,j) \in [\![1,n]\!]^2} \frac{1}{\sqrt{jk}.(k+j-1)}$.

Quantité qu'on va minorer par $2 \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \arctan(\sqrt{i-1})$(****).

Ceci découle forcément des questions 1 et 2 , la ressemblance est évidente.

Il me manque un p'tit morceau (mais ce n'est vraiment pas le plus important).

Les idées : on pourrait virer un terme positif gênant car on minore.

On peut inverser l'un des 2 signes somme.

On peut minorer $\dfrac{1}{j+k-1} \geqslant \dfrac{1}{j+k}$... etc ...

(***) se comporte comme une série positive divergente,

donc on a équivalence des sommes partielles.

En l'infini l'arctgte est équivalente à $\dfrac{\pi}{2}$,

donc notre somme est équivalente à $\pi \displaystyle\sum_{1}^{n} \frac{1}{i} \sim \pi \ln(n)$.

On reporte, on utilise (*****), on passe à la limite λ_n^+ est minorée

par un truc qui tend vers π.

On va montrer que la limite est π par gendarmes.

Les questions étaient données.

6) Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$. $\displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)\mathrm{d}t = -i \int_{0}^{\pi} P\left(e^{i\theta}\right) e^{i\theta}\mathrm{d}\theta$.

7) En déduire que. $\forall Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, $\displaystyle\int_{0}^{1} Q^2(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_{-1}^{1} Q^2(t)\mathrm{d}t \leqslant \pi \sum_{k=0}^{d} a_k^2$.

6) Petit piège, on ne peut pas poser $u = e^{i\theta}$, car variable complexe !

Le passage à l'intégrale étant linéaire, on se ramène à :

$$-i \int_{0}^{\pi} (e^{i\theta})^k e^{i\theta} d\theta = \frac{-i}{(k+1)i} \left[e^{(k+1)i\theta}\right]_0^{\pi} = \frac{1-(-1)^{k+1}}{k+1} = \int_{-1}^{1} t^k dt.$$

7) En reprenant l'idée qui a amené à la positivité (même poly) :

$$0 \leqslant X^T H_n X = \int_{0}^{1} Q^2(t)dt \leqslant \int_{-1}^{1} Q^2(t)dt = \left|-i \int_{0}^{\pi} Q^2(e^{i\theta})e^{i\theta}d\theta\right| \leqslant -i \int_{0}^{\pi} |Q^2(e^{i\theta})|d\theta.$$

On en sort : $0 \leqslant X^T H_n X = \displaystyle\int_0^1 Q^2(t)dt \leqslant \int_0^\pi \left|\sum a_k e^{i(k-1)\theta}\right|^2 d\theta$.

On regarde le carré du module qui vient d'arriver :

$\left|\sum a_k e^{i(k-1)\theta}\right|^2 = \displaystyle\sum_{(k,j)\in[\![1,n]\!]^2} a_j a_k e^{i(k-j)\theta}$, puis linéarité intégrale.

$\displaystyle\int_0^\pi \left|\sum a_k e^{i(k-1)\theta}\right|^2 d\theta = \sum_{(k,j)\in[\![1,n]\!]^2} a_j a_k \int_0^\pi e^{i(k-j)\theta} d\theta = \pi\|x\|^2 + \sum_{j\neq k} \dots$

La somme finale est nulle car les termes se compensent 2 à 2.

On vient de majorer λ_n^+ par π. Donc la limite est π.

Arthur D (Saclay) : A rédiger. Voir surtout rms 213, exo en cours de finition.

On pose (E) : $y" + qy = 0$ où $q \in \mathcal{C}^2([a, +\infty[, \mathbb{R}_*^+)$.

Avec : $\displaystyle\lim_{+\infty} \int_a^x \sqrt{q(t)}dt = +\infty$.

Et $q'(x) = o\left(q^{\frac{3}{2}}(x)\right)$, en l'infini, hyp peu claire.

Soient y_1 et y_2, $\mathcal{C}^1$, ss racines communes.

On pose $\varphi(x) = y_1(x) + iy_2(x)$ et $\varphi(a) = r_0 e^{i\theta_0}$.

1) Mq $\forall x \in [a, +\infty[$, $\varphi(x) = e^{\psi(x)}$, où $\psi(x) = \displaystyle\int_a^x \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}dt + \ln(r_0) + i\theta_0$.

2) Mq on peut écrire : $y_1(x) = r(x)\cos(\theta(x)), y_2(x) = r(x)\sin(\theta(x))$ sur notre intervalle.

Avec $r(x) = \sqrt{y_1^2(x) + y_2^2(x)}$.

Et $\theta(x) = \theta_0 + \displaystyle\int_a^x \frac{(y_2' y_1 - y_2 y_1')(t)}{r^2(t)} dt$.

3) On pose $\tau(x) = \displaystyle\int_a^x \sqrt{q(u)}du$.

Mq τ réalise une bijection de notre intervalle vers $\mathbb{R}^+$.

4) Soit y une solution de (E), ss réserve...

Mq $Y = y \circ (\tau^{-1})$ est solution de (E') , $Y" + \varphi Y' + Y = 0$,

où $\varphi(x) = \dfrac{q'(\tau^{-1}(x))}{2.q^{3/2}(\tau^{-1}(x))}$.

5) Montrer que Y et Y' n'ont pas de zéro en commun et que l'on peut écrire

$Y = r\cos(\theta)$ et $Y' = r\sin(\theta)$ où r, θ sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

6) Montrer que $(r^2)' = -2\varphi r^2 \sin^2(\theta)$. En déduire que y et y' sont bornées.

Sol :

1) Mise au point equa diff d'ordre 2 linéaire qui vérifie les hyp de Cauchy linéaire,

donc l'ensemble des solutions sur $[a, +\infty[$ est un ev de dim 2.

y_1 et y_2 est donc une base car libre (pas de racines communes).

1) On va montrer que les deux candidates sont solutions de la même equa diff

avec les mêmes conditions initiales.

Par remplacement φ est solution de E et jamais nulle...

Je nomme g le temps des calculs la fonction e^{ψ}, je la dérive 2 fois.

On arrive à $e^{\psi}(\psi" + (\psi')^2) = A$.

Or par thm fondamental, $\psi' = \dfrac{\varphi'}{\varphi}$, $\psi" = \dfrac{\varphi.\varphi" - (\varphi')^2}{\varphi^2} = -q - \left(\dfrac{\varphi'}{\varphi}\right)^2$.

$A = e^{\psi}\left(\left(\dfrac{\varphi'}{\varphi}\right)^2 - q - \left(\dfrac{\varphi'}{\varphi}\right)^2\right)$. Donc e^{ψ} est solution de E.

Il suffit de remplacer pour constater qu'elles sont égales en a.

Je dérive g j'applique en a, on a $\psi'(a)e^{\psi(a)} = \psi'(a)\varphi(a) = \dfrac{\varphi'(a)}{\varphi(a)}.\varphi(a)$. Yes.

Autre sol qui va aider pour la suite :

Remerciements appuyés à Diane.

Rq : φ jamais nulle car pas de racines en commun, donc $\dfrac{\varphi'}{\varphi}$ existe et cie.

Rq : φ jamais nulle car pas de racines en commun, donc $\dfrac{\varphi'}{\varphi}$ existe et cie.

Je note $\varphi(x) = r(x)e^{i\theta(x)}$, ainsi $\varphi'(x) = (r'(x) + r(x).i.\theta'(x))e^{i\theta(x)}$.

Ainsi $\dfrac{\varphi'}{\varphi}(x) = \dfrac{r'(x)}{r(x)} + i\theta'(x)$. On intègre.
$\displaystyle\int_a^x \frac{\varphi'}{\varphi}(t)dt = \ln(r(x)) - r_0 + i(\theta(x) - \theta_0)$.
Donc en notant $\psi(x) = \displaystyle\int_a^x \frac{\varphi'}{\varphi}(t)dt + \ln(r_0) + i\theta_0$, on a

$\psi(x) = \ln(r(x)) + i(\theta(x)$, $e^{\psi(x)} = r(x)e^{i\theta(x)}$.

2) Le module est immédiat : $|\varphi(x)| = r(x) = \sqrt{y_1^2(x) + y_2^2(x)}$.

On calcule $\dfrac{\varphi'}{\varphi}(x) = \dfrac{(y_1y_1' + y_2y_2')(x)}{r^2(x)} + i.\dfrac{(y_2'y_1 - y_1y_2')(x)}{r^2(x)}$ (quantité conjuguée).
Alors $Im(\psi(x)) = \theta(x) = \theta_0 + \displaystyle\int_a^x \frac{(y_2'y_1 - y_1y_2')(t)}{r^2(t)}dt$.
On a $y_1(x) = r(x)\cos(\theta(x))$ et $y_2(x) = r(x)\sin(\theta(x))$.

3) Thm bijection monotone car $\sqrt{q}$ est cie, aucun pb.

4) Soit y sol de E (existe par Cauchy L vu plus haut)

$Y = y \circ (\tau^{-1})$, $Y'(x) = \dfrac{1}{\tau'(\tau^{-1}(x))}y'(\tau^{-1}(x)) = \dfrac{1}{\sqrt{q(\tau^{-1}(x))}}y'(\tau^{-1}(x))$.
On calcule $Y"(x)$, le calcul n'est pas dur mais lourd..., on reporte dans $Y" + Y'$,

il y a 2 termes qui se téléscopent car y sol de E.

On a bien Y sol de $Y" + \varphi Y' + Y = 0$ avec φ proposé par l'énoncé.

5) Si Y et Y' ont une racine commune x_0, on applique le thm de Cauchy lin (hyp ok)

avec ces conditions initiales, la fonction serait donc identiquement nulle. Absurde.

Tout est réuni pour appliquer 2) , r et θ sont bien de classe $\mathcal{C}^1$, rq la racine carrée n'est pas en 0 et pour $\theta(x)$ on applique le thm fondamental de l'analyse.

6) On a $r^2 = Y^2 + Y'^2$, je dérive $(r^2)' = 2(YY' + Y'Y") = 2Y'(-\varphi.Y')$, ça marche.

Le but est de contrôler r et donc $g = r^2$.

Dérivée logarithmique de g, il faudrait pver que $2\varphi \sin^2(\theta)$ est intégrable...

Les hyp ne sont pas assez claires selon moi.

Mais le wronskien de E est cst non nul, ce qui simplifie l'expression de θ...

φ tend vers 0 par (**) ?

© Arthur D Centrale 1 (ss prépa).

On pose $n > 0, u_n = \displaystyle\int_0^\infty \frac{1-\cos^n(t)}{t^2}dt$.

On admet $u_1 = \dfrac{\pi}{2}$.

1) Existence de $(u_n)_{\mathbb{N}}$ et valeur de u_2.

2) Mq $u \in [0,1]$, $\left|1 - \cos^n\left(\sqrt{\dfrac{2u}{n}}\right)\right| \leqslant u$.

3) Mq pour $n > 0$, $u_n = \sqrt{2}\sqrt{n}\displaystyle\int_0^\infty \frac{1-\cos^n\left(\sqrt{\frac{2u}{n}}\right)}{u.\sqrt{u}}du$.

En déduire que : $\exists K \in \mathbb{R}$ tq $\underset{0}{\sim} K\sqrt{n}$.

Sol : Exo sympa que je ne connaissais pas.

1) Existence car cie sur l'ouvert et prolongeable par cie en 0.

En l'infini, c'est domniné en va par $\dfrac{2}{t^2}$.

$u_2 = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^2(t)}{t^2}dt$.

Ipp, crochet cv et nul, $u' = \dfrac{1}{t^2}, v = \sin^2(t)$.

Qui donne $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin(2t)}{t} dt$, Dirichlet.

Qui elle même sort de u_1 par IPp $v = 1 - \cos(t), u' = \dfrac{1}{t^2}$.

Tout cela est hyper classique...

2) Application du TAF, $f(u) = \cos^n\left(\sqrt{\dfrac{2u}{n}}\right)$.

$|f'(u)| \leqslant 1$ après dérivation, majoration du cos par 1 et $\sin(a) \leqslant a$, pour $a > 0$.

Donc $|f(0) - f(u)| \leqslant |u - 0|. \sup\limits_{[0,1]} |f'|$.

3) Erreur d'énoncé ss importance.

On pose $t = \sqrt{\dfrac{2u}{n}}$, $\mathcal{C}^1$ st croissant bijectif.

Attention aux étourderies de calcul, $u_n = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{n}\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos^n\left(\sqrt{\frac{2u}{n}}\right)}{u.\sqrt{u}} du$.

On pense à la cv dominée, hyp classiques faciles.

Pour la domination, on utilise 2) sur $[0,1]$ pour controler par $\dfrac{1}{\sqrt{u}}$.

Puis sur $[1, +\infty[$ par $\dfrac{2}{u\sqrt{u}}$. Toutes deux intégrables.

La cv simple à u fixé n'est pas si simple...

Le numérateur cv simplement vers $1 - e^{-u}$.

Bref l'intégrale cv vers $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-u}}{u\sqrt{u}}$, ouf intégrable ! Gagné .

© Baude Centrale 1 ss préparation.

$E = \mathbb{R}^n$ muni de se sa structure canonique.

$u \in \mathcal{L}(E)$ associée à A dans $\mathcal{B}$ bon.

$u^* \in \mathcal{L}(E)$ associée à A^T dans $\mathcal{B}$.

A' associée à u dans $\mathcal{B}'$ bon.

1) Mq la matrice de u^* dans $\mathcal{B}'$ est $(A')^T$.

En déduire que la définition de u^* est indépendante de la base choisie.

2) Mq $\forall (X, Y) \in E^2, (u(X)|Y) = (X, u^*(Y))$.

Mq cela définit u^*, ie unicité .

3) Soit $w = u^* \circ u$.

Mq w possède n vp positives.

4) Soit λ et μ la plus petite et la plus grande vp de w.

Mq $\forall X \in E, \sqrt{\lambda}\|X\| \leqslant \|u(X)\| \leqslant \sqrt{\mu}\|X\|$.

Sol :

1) $Mat_{B'}(u) = A' = PAP^T$, car une mat de passage de bon vers bon est orthogonale.

On transpose , ça roule tout seul.

2) $(u(X)|Y) = X^T A^T Y = (X|u^*(Y))$, par traduction matricielle du ps en BON.

Pour s'assurer de l'unicité il suffit d'appliquer en $X_i = (0, ..., 1_i, 0, 0, ..)^T$ et $Y_j = (0, ..., 1_j, 0, 0, ..)^T$.

Alors $X^T AY = a_{ji}$ et l'autre a_{ij} ce qui est logique par transposition.

3) Tout ceci a été anticipé en cours.

$W = A^T A$ qui symétrique réelle donc dz en bon.

Donc tout ceci se passe dans $\mathbb{R}$.

λ vp, $A^T AX = \lambda X$, on multiplie à gauche par X^T.

On arrive à $\|AX\|^2 = \lambda\|X\|^2$, voilà.

4) $\|u(X)\|^2 = \|AX\|^2 = X^T A^T AX = Y^T DY = \sum_1^n \lambda_i x_i^2$.

A clarifier $Y = QX$ de même norme car Q isométrie.

On encadre $\lambda\|X\|^2 \leqslant ... \leqslant \mu\|X\|^2$,cqfd.

© Heyndericks Centrale 1 sans préparation.

1) On pose $V = \left\{ \begin{pmatrix} x & z \\ y & x \end{pmatrix}, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.

Quelles sont les matrices de V dz ?

2) Matrices de V qui représentent un projecteur orthgonal en base canonique ?

3) On associe à (X, Y, Z) des lois uniformes dans $[\![1, 6]\!]$, indépendantes.

Quelle est la probabilité pour que la matrice soit inversible ?

Sol le même exo a été posé à Th Edouard (Centrale 1 aussi).

Rqs utiles pour la suite : Si $y = z = 0$ c'est déjà diag.

Si l'un des deux est nul (pas l'autre) grand classique de réduction (pas dz) pb de dim sep.

Ensuite le pb est le même que $\begin{pmatrix} 0 & y \\ z & 0 \end{pmatrix}$

car l'homothétie de rapport x est tjs diagonalisée, une lettre de moins.

On calcule le polynôme caractéristique : $X^2 - yz$.

Si $yz > 0$ 2 vp 2 à 2 distinctes dz.

Si $yz < 0$ pas de racines réelles, pas de vp.

Si $yz = 0$ voir les rqs.

2) Là, il faut connaitre son cours. Si p projecteur il est $\perp$ ssi mat symétrique(bon).

De plus la trace doit valoir 1, bref on teste : $\begin{pmatrix} 1/2 & y \\ y & 1/2 \end{pmatrix}$, on met au carré cns $y = \pm 1/2$.

3) Ici, l'essentiel est que $\mathcal{P}(x^2 - yz \neq 0) = 1 - \mathcal{P}(x^2 - yz = 0)$. Etc .

© Diane Centrale 1 ss préparation.

Soit E un ev de dimension n et u un endo de E, nilpotent d'indice p.

Soit $v = \sum_{0}^{p-1} u^k$.

1) a) Mq v est bijectif.

b) Déterminer la bijection réciproque de u.

2) Mq $\ker(v - Id) = \ker(u)$.

3) Déterminer le spectre de v.

4) Soit $w = \sum_{0}^{p-1} \frac{u^k}{k!}$.

Montrer sa bijectivité, et donner sa réciproque.

Sol : Le début a été fait en classe de sup.

1) Pourquoi en 2 questions, on sait que l'inverse est $I - u$.

On se met ds la logique de l'énoncé, on regarde un vecteur du noyau , on applique u^{p-1}.

On obtient $u^{p-1}(x) = \overrightarrow{0}$.

On reporte, on applique u^{p-2}. Etc par réc...Il est nul. Injectivité en dim finie.

2) L'inculsion de dte à gauche est simple en reportant.

On pourrait trigonaliser u , ses puissances le seraient aussi,

v n'a que des 1 sur la diag ppale. Spectre de v réduit à 1.

Autre façon, sachant que $(I - u) \circ v = I$, si $v(x) = \lambda x$. $\lambda \neq 0$ car inversible.

On applique en x, il en sort $u(x) = \frac{\lambda - 1}{\lambda} x$, comme u nilp sa seule vp est nulle.

$Sp(v) = \{1\}$.

4) Ca fait penser à l'exponentielle de u, CHUT !

Je compose à dte ou à gauche par $w = \sum_{0}^{p-1} \frac{(-u)^k}{k!}$. Tout téléscope. C'est l'inverse.

Si on veut faire en 2 temps, on fait comme plus haut.

Félix D Centrale 1 ss préparation.

$A = \{f \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R}), f'(x) = x^2 + f^2(x), f(0) = 0\}$.

1) Mq $f(x) = \frac{x^3}{3} + \int_0^x f^2(t)dt \Leftrightarrow f \in A$.

2) On admet l'existence d'une suite f_n telle que $f_0(x) = \frac{x^3}{3}$.

$f_n(x) = \frac{x^3}{3} + \int_0^x f_{n-1}^2(t)dt$.

Mq $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,1]$, $f_n(x) \leqslant \frac{2}{5}x$, et $0 \leqslant (f_{n+1} - f_n)(x) \leqslant (f_{n+1} - f_n)(1)$.

3) Mq A est non vide...

Sol : d'abord j'ai cru à un thm de Dini, mais on peut faire sans.

Rq : tous les objets à venir sont positifs, pas besoin de valeurs absolues.

1) Aucun problème, de gauche à dte par thm fondamental analyse(*), on dérive...

De dte à gauche, on intègre en faisant attention aux cstes.

2) On admet ? Pourquoi ? Les f_n existent et sont cies par rec.

Pour la première inégalité, rec immédiate.

On remplace, il apparait $\frac{29}{75} < \frac{2}{5}$.

Pour la deuxième à gauche, rec immédiate.

Celle de dte, il suffit de remplacer, des termes disparaissent.

Il reste $\int_0^x (f_n^2(t) - f_{n-1}^2(t))dt \leqslant \int_0^1 (f_n^2(t) - f_{n-1}^2(t))dt$

qui est vraie par positivité de l'intégrale.

Ai-je écrit une co...... ?, ça me semble trop simple pour le moment.

3) A x fixé, $f_n(x)$ est donc croissante majorée donc cv par TLM.

J'appelle g la limite simple sur $[0,1]$.

Attention , on ne sait pas encore que g est cie, donc ...

Au début j'ai cru que les inégalités déclencheraient la cv uniforme (Dini).

Mais il y a plus logique, je regarde $\displaystyle\int_0^x (f_n^2 - g^2)dt$, TCD ?

Cv simple ok, controle par une intégrable ?

Grâce aux inégalités : $0 \leqslant f_n - g$ (monotonie f_n).

Puis à t fixé , $f_n - g \leqslant f_n(1) + f_0(t) - f_0(1)$ borné par une cste.

$0 \leqslant f_n + g \leqslant 2g \leqslant \dfrac{4}{5}t \leqslant 1$.

Donc $f_n^2 - g^2$ est bornée sur un segment, TCD ok.

$\displaystyle\int_0^x (f_n^2 - g^2)dt$ tend vers 0, à x fixé.

Donc à x fixé, $f_n(x)$ tend vers $g(x)$ et $\displaystyle\frac{x^3}{3} + \int_0^x g^2(t)dt$.

Unicité de la limite : $g(x) = \displaystyle\frac{x^3}{3} + \int_0^x g^2(t)dt$, $g \in A$?

Il en manque ! La cie de g entrainerait sa classe $\mathcal{C}^1$ par (*).

On regarde la cie de $x \mapsto G(x) = \displaystyle\int_0^x g^2$.

$|G(x) - G(y)| = \left|\displaystyle\int_y^x g^2\right| \leqslant \dfrac{16}{25}\left|\displaystyle\int_y^x t^2 dt\right| = \dfrac{16}{75}|x^3 - y^3| \leqslant \dfrac{16}{25}|x - y|$.

C'est lipchitzien donc cie ! Je retire ce que j'ai dit , la fin était technique...

© Clavaud Centrale 1 ss préparation.

Soit E ev de dimension n.

1) Supposons l'existence de $\overrightarrow{x}$ tq $(x, u(x), ..., u^{n-1}(x))$ soit libre.

a) Mq $(Id, u, ..., u^{n-1})$ libre ?

b) $(Id, u, ..., u^{n-1}, u^n)$ libre ?

2) Supposons u dz et que $(Id, u, ..., u^{n-1})$ libre.

Mq $\exists x_0 \in E$ tq $(x_0, u(x_0), ..., u^{n-1}(x_0))$ libre.

3) Soit $r > 0$ qcq (pas clair).

Mq $\forall x \in B(x_0, r)$ la famille $(x, u(x), ..., u^{n-1}(x))$ libre.

Rq : A mon premier avis , pver l'existence d'un tel r...

Sol : Attention, ne pas confondre avec un exo classique ou u est nilpotent.

Rq : 1) cette famille libre est une base (cardinal), pas sûr que ce soit utile.

a) On écrit une comb lin nulle, on applique sur le x qui précède, les coeff sont nuls !

b) Ne pas tomber ds le piège du cardinal, on est en dim n^2.

Mais Cayley-H nous garantit que le poly caract de degré exactement n annule u...

2) On regarde la matrice diagonalisée, les vp sont 2 à 2 distinctes.

Car par l'absurde, si il y en a "moins", la matrice serait annulée par $\prod_1^q (X - d_i)$.

Avec q le cardinal des vp restantes, donc u subit le même sort.

On donc u^q comb lin des précédents.

On peut exhiber plusieurs vecteurs valables, mais mon préféré (de loin) est :

$x_0 = \sum_1^n e_i$, $((e_i)_1^n)$ base de dz.

$u^k(x_0) = \sum_1^n d_i^k e_i$, le det de cette famille ds cette base est VDM $\neq 0$.

3) L'application qui à x associe $\det_{(e_i)_1^n}(x, u(x), ..., u^{n-1}(x))$

est cie en tant que composée (bcp) d'objets cies , rq dim finie.

Or elle est non nulle en x_0, donc $\exists r > 0$ tel que elle le reste sur la boule de rayon r.

Gagné ! Bel exo.

Ex1 Analyse :

1) $u_n = \displaystyle\sum_{n+1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$.

Existence et limite.

2) $v_n = \dfrac{(-1)^n}{n} u_n$, cv de $\sum v_n$?

3) $w_n = \dfrac{(-1)^n}{n} \displaystyle\sum_{1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$.

Cv de $\sum w_n$?

4) $x_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$.

Cv de $\sum x_n$?

5) Bonus perso : Cv de $\sum u_n$?

Sol : Pour le bonus voir feuille exos sur cssa.

1) Le cssa est validé décroissance et limite nulle.

Donc u_n est un reste de série cvte , existence et limite nulle.

2) D'autre part (cssa) il est du signe du premier terme engagé

et controlé en VA par ce premier terme(*).

v_n est donc à signe positif.

Et v_n est domninée(*) par $\dfrac{1}{n.\sqrt{n}}$, Riemann cv.

3) Attention l'objet a changé.

$w_n = \dfrac{(-1)^n}{n} S - v_n$, somme de deux séries cvtes.

4) $x_n = \dfrac{1}{n} S - \dfrac{1}{n} R_n$.

La denière est série cvte car dominée par $\dfrac{1}{n.\sqrt{n}}$.

La première est divte car en $1/n$.

Exo 2 Algèbre.

C'est l'exo 84 de la feuille de réduction, fait au tableau tous les ans.

Berruezo Centrale 1.

Cahier bleu à la fin.

$\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne.

$f_{b,c}(t) = (\sqrt{1+c^2}\cos(t), b\sqrt{1+c^2}\sin(t), c)$.

1) Mq $f_{b,c}([0,2\pi]) \subset S_b$ avec $S_b = \left\{ (x,y,z), x^2 + \dfrac{y^2}{b^2} - z^2 = 1 \right\}$.

Déterminer le plan tgt à S_b au pt $(1,0,0)$.

Déterminer la tgte à la courbe $f_{b,0}([0,2\pi])$ en $(1,0,0)$.

2) On note $L : (b,c) \in \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R} \longmapsto \displaystyle\int_0^{2\pi} \|f'_{b,c}(t)\| dt$.

Mq L est cie, puis calcul de $L(b,0)$.

Sol : Exo très crescendo...

0) Tout le monde aura remarqué que cette surface est un

hyperboloïde elliptique à 2 nappes non connexes.

1) Nous avons aussi un arc paramétré défini par $f_{b,c}$.

L'inculsion est facile en remplacant.

On calcule le gradient de $g(x, y, z) = x^2 + \dfrac{y^2}{b^2} - z^2 - 1$.

On a $(2x, \dfrac{2y}{b^2}, -2z)$ jamais nul, surface régulière.

Pour le plan tgt on applique le cours calcul diff : page 26 du vôtre.

On a vérifié que le point proposé est là...

L'équation de ce plan tangent est $X = 1$.

Pour la tgte à la courbe voir cours fonctions vectorielles,

elle est dirigée par le vecteur sse $\dfrac{\partial f_{b,c}}{\partial t}$, le point est atteint pour $t = 0$.

$\overrightarrow{V} = (0, 1, 0)$, en paramétriques la tgte est $(1, \alpha, 0)$ inculse ds le plan tgt !

2) Ca se complique :

Si c'est lipschitzien (donc cie) tant mieux, sinon...

On écrit $L(b, c) - L(b', c') = \displaystyle\int_0^{2\pi} \sqrt{\ldots} - \sqrt{\ldots} = \int_0^{2\pi} \frac{(c^2 - c'^2)(1 + \sin^2) + (\ldots)\cos^2}{\sqrt{\ldots} + \sqrt{\ldots}}$.

Ca ne saute pas aux yeux, mais oui...

D'abord la continuité c'est local, donc je me place au voisinage d'un pt (b, c).

Il faut minorer le dénominateur, ds les radicaux on peut minorer par $b^2 + (1 - b^2)\sin^2$.

Donc chaque radical est minoré par $\min(1, b)$, rq étude de courbe .

Donc localement ce dénominateur est minoré par une cste > 0.

Pour le numérateur on le majore par :

$2(c^2 - c'^2) + (b^2(1 + c^2) - b'^2(1 + ..))$.

Il faut suivre... $(c^2 - c^{'2}) = (c - c^{'})(c + c^{'})$ la somme est localement controlée par une cste.

La différence par la distance du point (b, c) au pt (b', c').

Pour $(b^2 - b^{'2})$ pareil... Pour $b^2c^2 - b^{'2}c^{'2} = (bc - b'c')(bc + b'c')$.

A dte (+)controlé par une cste (localement).

A gauche (-) : $(bc - b'c') = (b - b')c + b'(c - c')$ le c et le b' sont localement controlables.

Les deux petites diff sont majorées par la distance du point (b, c) au pt (b', c').

Bref ... on est localement lipschitzien donc cie.

Ai-je raté plus simple ? ?

La dernière question est la longueur d'un arc fermé.

Si la question est vraiment celle-là (j'en doute) , c'est abject.

Par parité et périodicité on a 4 fois l'intégrale sur $[0, \pi/2]$.

Par si $b = 2$ alors le calcul devient juste ultra pénible avec des chgts $\tan(x) = \sqrt{2}.\sinh(t)$...

© Debray CCinp :

Analyse : Soit (a_n) une suite telle $a_0 = a_1 = 1$ et $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$.

1) Mq $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{a_n}{n!} \leqslant 1$, que peut on en déduire sur le rayon de la dse $\displaystyle\sum_0^\infty \frac{a_n}{n!}x^n$.

2) Etablir l'équa diff sur $]-1, 1[$ (ordre 1).

3) Expressions des a_p en fct de p.

Algèbre :

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tq $f^3 = Id$ et $f \neq Id$.

1) Mq 1 est vp.

2) Mq $\mathbb{R}^3 = \ker(f - Id) \oplus \ker(f^2 + f + Id)$.

3) Matrice : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Sol : 1) Le poly caract est de degré 3 rééI, donc au moins une racine réelle (vp).

Or les vp annulent les poly annulateurs ($X^3 - 1$) donc 1 est vp.

2) On peut faire par analyse synthèse, pas très drôle, faite en exo.

On peut aussi (même exo 16) par décomposition des noyaux (Hors prog).

Rq perso $\mathbb{R}^3 = \ker(f - Id) \oplus Im(f - Id)$. exo16.

3) Il y a certainement plus simple que ça...

Si vous avez faites le moi savoir.

Ds la somme directe qui précède aucun sev nul, car 1 vp et $f^3 \neq Id$.

Soit b non nul du 2ème, $f(b)$ est aussi dedans par calcul élémentaire.

La famille $(b, f(b))$ est libre, $\alpha.b + \beta f(b) = \overrightarrow{0}$.

On applique f, on fait une comb lin pour virer b.

On arrive à $(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta)f(b) = \overrightarrow{0}$.

Or $f(b)$ non nul ! Car sinon $b = \overrightarrow{0}$, 0 non vp...

Donc hyper classique du cours $(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta) = 0$ entraine $\alpha = \beta = 0$.

Donc dte à gauche, plan à dte pour raisons dimensionnelles.

On prend une base adaptée à la somme directe : $(a, b, f(b))$.

La matrice n'est pas encore celle désirée $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

J'en cherche une autre...

Je cherche donc un cycle, prenons $u = a + b$, $f(u) = a + f(b)$ nommé w,

$f(w) = a + f^2(b) = a - f(b) - b$ nommé v.

Bien sûr, $f(v) = u$, si la famille est libre, c'est gagné !

On écrit une comb lin nulle, on identifie sur la base adaptée à la somme directe.

Tout est nul ss difficultés.

Analyse : facile

1) Rec triviale donc le rayon excède 1 (attention à ne pas inverser les inégalités).

2) On remplace, équa diff ordre 2 à coeff csts, on résout.

On applique les cond initiales, on trouve f (unique) on dérive on a l'équa diff.

3) Fibonacci suite rec ordre 2 etc...

© CCINP Marie Léo Exo 1 .

$I_n = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\arctan(x+n)}{(x+n)\sqrt{x}} dx.$

Existence, limite, équivalent .

Algèbre.

$A^T + A^2 = I_3$ et $tr(A) = 0$.

1) Mq les vp sont à récolter parmi les racines des polynômes annulateurs.

2) Y-a-t-il une solution ? Kdo tver un poly annulateur.

Sol : cv car cie sur l'ouvert et équivalente en 0 à $\dfrac{\arctan(n)}{n\sqrt{x}}$, Riemann.

En l'infini : équivalente à $\dfrac{\pi}{2.x^{3/2}}$, Riemann.

On devrait appliquer le TCD , à x fixé la limite est nulle.

On cherche une domination intégrable indépendante de n.

$\varphi(x) = \dfrac{\pi}{2.(x+1).\sqrt{x}}$ fait l'affaire I_n tend vers 0.

Pour l'équivalent, (**) , $u = nx$ de classe $\mathcal{C}^1$ strict croissant et bij de $\mathbb{R}_+^*$ sur lui même.

$\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ arrive en facteur, TCD , même domination, cv simple vers φ.

On calcule l'intégrale par $u = v^2$ (**) ... $I_n \sim \dfrac{\pi^2}{2\sqrt{n}}$.

Algèbre 1) C'est du cours, si tu as oublié, relire...

2) On a $A = I_3 - (A^T)^2 (*)$, on remplace , le poly est $X(X-1)(X^2+X-1)$.

Racines possibles $\left\{0, 1, \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\right\} (***)$.

Là, attention A annulé sur $\mathbb{C}$ par un poly scindé simple, donc $\mathbb{C}$ dz.

A^T est aussi dz pour les mêmes raisons.

Or elles commutent (*) donc codz ! ! Savoir refaire ! Exo 87 F4.

Rq inutile et voir piège Vuidel ccinp même fichier.

Soient (a, b, c) les vp après dz.

Donc, on voudrait $a + b + c = 0$ et $a + b + c + a^2 + b^2 + c^2 = 3$.

D'abord les cas avec uniquement des 0 et des 1 disparaissent vite.

Donc $a = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Et alors $a^2 + a = 1$.

Donc $b = \dfrac{-1 \mp \sqrt{5}}{2}$, car $\sqrt{5}$ doit disparaitre. Et alors $b^2 + b = 1$.

Il sort de la trace nulle $c = 1$, et le 3 est un 4, impossible.

Voir aussi Maximilien de ce fichier. et rms centrale 2021 exo 1012.

Vite B CCINP.

Exo 1 : $I = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos(t)}{1 + e^t} dt$.

Existence et $I = \displaystyle\sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}.n}{1 + n^2}$.

Sol :

Existence facile , cie sur I et dominée par e^{-t} en l'infini.

On multiplie par e^{-t} num et dénominateur.

On développe en dse (géométrique) $\dfrac{1}{1+e^{-t}} = \displaystyle\sum_0^{\infty}(-1)^k e^{-kt}$.

SS réserve d'inversion , on calcule l'intégrale obtenue comme partie réelle de $e^{-(1+k-i)}$.

Nickel ! $(-1)^k.\dfrac{1+k}{1+(1+k)^2}$, on décale de un cran l'indice, CC de l'énoncé.

Pour intervertir, CVU absurde , on n'est pas sur un segment.

Fubini (TAT) , non car la série en jeu est en $1/k$,divte.

Je regarde bien sûr les sommes partielles, le vrai pb (la cv simple vient du dse)

est la majoration par une intégrable.

$$G_n = \sum_0^n (-1)ke^{-(k+1)t}\cos(t).$$

On factorise par le cos, il reste un objet CSSA, donc dominé par le premier terme engagé.

Bref par e^{-t} en fin de boulot. Gagné.

Exo 2 :

$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ endo associé en canonique.

1) Mq A non dz mais tz.

2) Donner d'éventuelles droites stables par A.

On note $a' = a_{|F}$, où F est un sev stable par A.

a) Mq $\chi_{a'}$ divise χ_a.

b) Que dire de $\ker(a-3Id)$?

c) Benjamin ne sais plus, nature de a' ? ?

Sol Algèbre :

1) On calcule le poly caract $(X-3)^3(**)$, 3 est la seule vp.

Si elle était dz , on aurait $3Id$ ce qui n'est pas, donc pas dz.

Le poly caract est scindé sur $\mathbb{R}$ donc tz sur $\mathbb{R}$.

2) Pour avoir la dimension de E_3 on regarde $A-3Id$ qui est facilement de rang 2.

Donc une dte propre pour A, on remarque que $(1,1,1)^T$ dans le noyau de $A-3Id$.

2)a) C'est du cours, dans un base adaptée à $E = F \bigoplus G$.

La matrice est triangulaire par blocs , on calcule le poly caract (invariant de similitude),

on a A' la mat de la réduction à F, le poly caract est le produit de 2 poly dont $\chi a'$.

b) On l'a déjà dit c'est une droite.

Je cherche un plan stable suggéré par l'énoncé.

Grosse feinte exo 63 F10 vue en Td A^T a le même poly caract et $A^T - 3Id$ a le même rang.

on cherche la dte propre de A^T dirigée de par $(1,-1,0)^T$).

Donc le plan orthogonal à ce vecteur est le **seul** invariant par A. ie $X - Y = 0$.

Mais hélas il contient la dte propre de A donc pas de somme directe pour valoriser 2)...

Je cherche donc à réduire au mieux A.

Je rêve de $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

On va réviser le fameux savoir placer les 1 à la Jordan.

Soit un vect qui n'est pas dans le plan stable ex $W = (0,0,1)$, le dernier de la base à venir.

Pour réaliser la 3 ème colonne, je propose $(A-3I)W$ qui sera le 2ème.

Alors l'image de W serait ok.

Ils sont libres car sinon w vp de A ce qui n'est pas.

Pour réaliser la 2 ème colonne, je propose $(A-3I)^2W$ qui sera le 1er.

Alors l'image du 2ème serait ok.

Et le premier aussi car cf CHamilton $(A-3I)^3 = 0(**)$.

Donc $A((A-3I)^2W) = 3(A-3I)^2W$. Reste la liberté.

Qui est tjs vraie ds les cond précédentes, voir exo 4 F 2, non nullité car W pas ds le...

Rq : cette belle réduction permet par ex le calcul de A^n... Binome.

© Baude G Mines Exo 1

Soient f et g cies sur $[0,1]$ vers lui-même, qui commutent.

1) Mq $\exists \alpha > 0$, $\forall x \in [0,1]$, $f^n(x) \geqslant g^n(x) + \alpha n$.

2) En déduire : $\exists c \in [0,1], f(c) = g(c)$...

Sol : Par l'absurde si f et g ne se croisent pas, par thm de cie de sup et le rôle sym

des fcts, on a $\exists \alpha > 0$ telle que : $\forall x \in [0,1]$, $f(x) \geqslant g(x) + \alpha$.

1) En appliquant ce qui précède en $f(x)$ et $g(x)$ et par récurrence,

on arrive à ce qui est demandé.

2) L'absurdité apparait en faisant tendre n vers l'infini.

Rq perso , je préfère l'autre syntaxe!! Ds 5 pages.

Mines exo 2 algèbre.

Soient $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, telles que $AB = 0$.

1) Mq A et B ont un vecteur propre en commun .

2) Mq A et B sont cotrigonalisables.

Sol : Si B est nulle c'est limpide.

$Im(B) \subset \ker(A)$, donc tous les vecteurs de $Im(B)$ sont VP de A pour la vp 0.

Or $Im(B)$ stable par B (clair) , on est sur $\mathbb{C}$, l'endo induit par B dans $Im(B)$,

admet une vp par Alembert Gauss, donc un VP associé, c'est bon, il fait le boulot.

2) Tout cela est très très proche de la fin de l'exo 87 feuille 4.

C'est de la récurrence sur la dimension (déguisée par blocs).

Par 1) on commence une base par le VP qui précède.

En cette base, A devient $\begin{pmatrix} 0 & L \\ 0 & A' \end{pmatrix}$ et B devient $\begin{pmatrix} 0 & L' \\ 0 & B' \end{pmatrix}$.

En développant $A'B' = 0$, on applique en cascade le 1)

A' et B' cotrigo, $A' = P^{-1}T_1P$ et $B' = P^{-1}T_2P$.

Il suffit alors de prendre (exo 87) $(P_1)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix}$ et P_1 son inverse.

$A = \begin{pmatrix} 0 & L \\ 0 & P^{-1}T_1P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & LP^{-1} \\ 0 & T_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}$.

De ""même"" pour B.

© Inconnu Mines.

1) Montrer que $(x^n - 1)^2 = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(x^2 - 2x\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + 1 \right)$.

2) Calculer pour $x \in \mathbb{R} \backslash \{-1, 1\}$.

$$\int_0^{2\pi} \ln\left(x^2 - 2x\cos(\theta) + 1\right) d\theta (\text{ convergence pour } x = 1?)$$

3) Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(\theta))d\theta$.

Sol :

1) Le côté droit est la factorisation du gauche, il suffit de voir que les degrés

et coeff dominants sont les mêmes, puis on regarde les racines à droite.

Ce sont les $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$.

Rq perso, comme on va de 1 à n avec les conjugués, on les répète dédoublées.

2) On passe en sommes de Riemann, $I_x = \lim\limits_{\infty} \dfrac{2\pi}{n} \displaystyle\sum_1^n \ln\left(x^2 - 2x\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + 1\right)$.

Après avoir remarqué que ce qui est dans le ln est strictement positif et cie.

$x^2 - 2x\cos(\theta) + 1 = (x - \cos(\theta))^2 + \sin^2(\theta)$, et $x \neq 1$.

Alors $I_x = \lim\limits_{\infty} \dfrac{2\pi}{n} \ln\left(\displaystyle\prod_1^n \left(x^2 - 2x\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + 1\right)\right) = \lim\limits_{\infty} \dfrac{2\pi}{n} \ln((x^n - 1)^2)$.

Pour $|x| < 1$, pas de forme indéterminée, limite nulle.

Pour le reste : La fonction est paire !

On ramène de $-\pi$ à π par périodicité, puis le double de 0 à π par parité en θ.

Puis $t = \pi - \theta$.

Pour $x > 1$, $g\left(\dfrac{1}{x}\right) = g(x) - 4\pi\ln(x)$. En remplaçant...(***)

En $x = 1$, on est ramené à la cv de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{1}} \ln(\sin(\theta))d\theta$.

Trigo classique angle double.

Qui vaut le double de celle du 3) en coupant par Chasles au milieu et $\theta = \frac{\pi}{2} - u$

qui est $\mathcal{C}^1$ strict monotone et bijectif qonc qui CONSERVE la nature de cette intégrale.

Reste à pver la cv du 3), classique :

$\ln(\sin(\theta)) = \ln\left(\frac{\sin(\theta)}{\theta}\right) + \ln(\theta)$, à gauche cie, à dte cv en 0 classik.

3) Cv établie plus haut.

Le résultat final sera $-\frac{\pi}{2}\ln(2)$.

Bien sûr 2) suggère de regarder en 1.

Mais le vrai pb c'est la contniuité en 1.

La cie à droite suffirait, mais de toutes façons elle entraine celle à gauche par (***).

On regarde en 1^+, $h(x) = \ln(x^2 - 2x\cos(\theta) + 1)$.

$g'(x) = 2(x - \cos(\theta)) > 0$.

Ce qui est dans le ln augmente donc (attention aux signes) tant que ce ln est négatif,

l'objet est décroissant en valeurs absolues.

Ce ln deviendra négatif sur notre zone $]1, 1+\alpha[$.

Rqs en 1^+ l'objet est intégrable (vu avant), il le reste donc tant qu'il est négatif.

Le "pire" sera donc en $1+\alpha$, c'est $\ln(\alpha^2 + 2(1+\alpha))$ quantité fixée donc intégrable.

On a tout géré ind de θ...

Ce n'était pas facile voir exo 3 feuille 8 int à param...

Ce que je n'ai pas écrit n'est que calculs élémentaires selon moi.

© Leo L Mines :

Analyse facile ; On note $f(x) = \sum_{0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}$ et $F(x) = \int_0^x f(t)e^{-t}dt$.

1) Rayon de cv de f et valeur usuelle.

2) Mq F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calcul de F'.

3) Mq F est dse et donner le développement.

Algèbre : 1) $P = X^3 - X^2 + 1$, mq il admet une unique racine réelle notée α.

2) Soit $Q = X^5 + X + 1$, décomposition en facteurs irréductibles en fonction de α.

3) Même question avec $R = X^5 + X^4 + 1$.

4) Approximation de α.

Sol Algèbre :

1) Un tableau de variations précis (simple!!) permet de valider par

thms bijections l'unicité de la racine entre -1 et 1.

2) On "voit" que j et $\overline{j}$ sont racines de Q.

$Q = (X^2 + X + 1)P$, donc $Q = (X^2 + X + 1).(X - \alpha).(X^2 + (\alpha - 1)X - \dfrac{1}{a})$.

Ce dernier étant irréductible par 1).

3) On "voit" que j et $\overline{j}$ sont racines de R.

On factorise par $(X^2 + X + 1)$, il vient $X^3 - X + 1$, et miracle,

il a pour racines les inverses de celles de P.

$R = (X^2 + X + 1)(X - \dfrac{1}{\alpha})(...)$.

Le dernier est bien sûr irréductible par ce qui précède.

4) Encadrement rigolo, les tableaux de variations P et R, révèlent 2 encadrements.

On est donc dans l'intersection, il reste $\left]-1, -\dfrac{4}{5}\right[$.

© Naïm Mines :

$u_n = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dt}{\prod_1^n (t + k)}$.

1) Existence et limite.

2) Mq $\forall x > 0,\ x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.

Mq $\forall a > 0, \exists b \geqslant 0, \forall x \in [0,1],\ e^{ax^2} \leqslant 1 + bx$.

3) Mq $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\prod_1^n (t+k)} \sim \frac{1}{n!\ln(n)}$.

4) Equivalent de u_n.

Algèbre Naïm mines : Trouver les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M + M^T$ soit nilpotente.

Contre exemple sur $\mathbb{C}$.

Sol Algèbre : objet symétrique réel, donc dz (thm spectral), or nilpotent donc nul.

Bref M est antisymétrique.

Contre ex sur $\mathbb{C}$, on regarde $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ qui est nilpotente et non antisym.

Analyse , le début voir 1116 Centrale 2022.

2) Inégalité classique par étude courbe.

Pour la deuxième, on étudie la différence sur $[0,1]$, $b = 2ae^a$ convient.

Car avec lui, fct croissante , nulle en 0.

3) On va encadrer l'intégrale sur $[0,1]$.

Rq : $\displaystyle\prod_1^n (t+k) = n! \prod_1^n \left(1 + \frac{t}{k}\right)$. H_n l'harmonique bien connue.

On utilise 2) $t.H_n - \dfrac{t^2}{2} \displaystyle\sum_1^n \frac{1}{k^2} \leqslant \sum_1^n \ln\left(1 + \frac{t}{k}\right) \leqslant tH_n$.

On range, on passe aux inverses (tout > 0). Attention n fixé!!!

Notre intégrale est encadrée par $\displaystyle\int_0^1 e^{-tH_n} dt = \frac{1}{H_n} - \frac{1}{H_n} e^{-H_n} \sim \frac{1}{\ln(n)}$ d'un côté.

On remet le $n!$ nickel.

De l'autre : le terme en t^2, va disparaitre grâce à 2).

Car $e^{-t^2 S_n} \leqslant 1 + bt$, avec S_n cvte (Riemann).

On remplace, on a un controle en $\displaystyle\int_0^1 (1+bt)e^{-tH_n}dt$.

On calcule par ipp cette intégrale, même équivalent que de l'autre côté,

car le terme avec le b est négligeable devant l'autre.

4) De nouveau voir 1116.

Exo 2 : Soient f et g continues de $[0,1]$ dans $[0,1]$ telles que

$$f \circ g = g \circ f$$

1) Mq l'ensemble des points fixes de f(et de g) admet un maximum et un minimum.

2) Montrer qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que $f(c) = g(c)$

Sol :

1) Les ensembles de points fixes sont non vides ,

(TVI à $h(t) = f(t) - t$) qui est cie (cours sup).

Ils sont donc majorés et minorés. Donc possèdent des bornes sup et inf.

Or ces ensembles de points fixes sont des fermés, comme images réciproques de 0 par h cie.

Donc ils contiennent leurs sup et inf.

2) Je remarque que si c est un point fixe de f, alors $g(c)$ aussi.

Je nomme β le plus grand pour f (resp α) le plus petit.

$g(\beta)$ est là, donc majoré par $\beta = f(\beta)$. De même $g(\alpha) \geqslant \alpha = f(\alpha)$.

Donc $d = f - g$ est positive en β et négative en α. TVI !

Inconnu ccp. Je peux rédiger, déjà fait.

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$ - espace vectoriel E de dimension finie non nulle.

1) Supposons f diagonalisable, montrer que f^2 est diagonalisable.

2) Supposons f diagonalisable, montrer que $\text{Ker}(f) = \text{Ker}\left(f^2\right)$.

Soit λ une valeur propre non nulle de f^2, et μ racine complexe de λ.

3) Démontrer que :

$$\text{Ker}\left(f^2 - \lambda Id_E\right) = \text{Ker}\left(f - \mu Id_E\right) \bigoplus \text{Ker}\left(f + \mu Id_E\right)$$

4) Supposons f^2 dz et inversible, montrer que f est dz et inversible.

5) Supposons f^2 dz, montrer que : f est dz $\Leftrightarrow \text{Ker}(f) = \text{Ker}\left(f^2\right)$

ANALYSE ; Posons

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x))dx$$
$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x)\cos(x))dx$$

1) Montrer que I converge.

2) Montrer que $J = 2I$.

3) Calculer la valeur de I.

VANI ccinp. Je peux rédiger.

Soit $m, p \in \mathbb{N}^+$, on définie l'intégrale :

$$I_{m,p} = \int_0^1 z^p(\ln(z))^m dz$$

et sur $]0, 1]$, $\quad f(x) = \dfrac{1}{x^x}$.

Q1) Justifier l'existence de $I_{m,p}$,

Q :2) Montrer la relation pour $m > 1$:

$$I_{m,p} = -\frac{m}{p+1} I_{m-1,p}$$

Q.3) Justifier l'intégrabilité de f sur $[0, 1]$.

Q.4) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^m}$.

Exercice : On a $(E_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant m}$ base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q.1) Rappeler la définition d'um projecteur.

Q.2) Quelles matrices de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ représentent un projecteur ?

Q3) Montrer que si M est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ alors M s'écrit comme ume combinaison linéaire de projecteurs.

Q 4) Montrer que $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ sont des projecteurs.

Q.5) Une combinaisom linéaire de projecteurs est-elle diagonalisable ?

Sol Q5 diff des 2 de Q4.

Barrault CCINP.

$$E = \varphi^0([-1, 1], \mathbb{R}) f(g) = \int_{-1}^{1} g(t)f(t)dt.$$

un produit scalaire sur E.

1. Montrer qu'il existe une famille orthogonale $(Q_m)_m$ de $\mathbb{R}[X]$ tel que

deg $(Q_n) = n$ et le coefficient dominant de Q_n est 1.

b) Il y a -t-il unicité ?

2) Calculer Q_0, Q_1, Q_2, Q_3

3)a). On pose $\hat{f}(t) = f(-t)$

montrer que $(\hat{g} \mid f) = \left(g \mid \hat{f}\right)$.

b) En déduire la parité de Q_n en fonction de n.

Ex2 :

1. Justifier l'existence de l'intégrale $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x - 1} dx$.

2. Montrer que $J = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^3}$.

Sol : Classique de CCINP, bien rédigé , bien guidé.

Algèbre : 1) On fait Gramm-Sch en partant de la base canon, ss normer les vecteurs.

b) Oui il y a unicité , car Q_n est dans l'orthogonal de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ comme sev de $\mathbb{R}_n[X]$.

L'orthogonal est une dte, les candidats seraient donc colinéaires et de $\widehat{m}$ coeff dominant.

2) $Q_0 = 1$,$Q_1 = X$, $Q_2 = ...$, le but de la question est de suggérer les parités.

3)a) On remplace , on pose $u = -t$ dans l'intégrale, ça sort tout seul.

b) Il semblerait par 2) que Q_n ait la parité de n.

On calcule $(Q_n, \widetilde{X^j}) = (-1)^n \displaystyle\int_{-1}^{1} Q_n(t) t^j dt = \int_{-1}^{1} Q_n(-t) t^j dt$.

Donc $Q_n(X) - (-1)^n Q_n(-X)$ est orthogonal à une base, donc poly nul.

Analyse :

Classique , on fait appararaitre la géométrique en multipliant par e^{-x} haut et bas.

On la développe en dse, on inverse les signes sommes par TAT (Fubini).

Gautier Vasse CCINP.

Exercice 1 :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Q1) La matrice M est-elle diagonalisable ?

Q2) La suite $(Tr^n(M))_n$ converge-telle ?

Q3) Soient a et b deux complexes tels que : $R_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$.

Q4) Etudier la suite $(\mathrm{Tr}^n(R(a,b)))_n$.

Déterminer une/des condition(s) sur a et b pour que la suite converge.

Exercice 2 :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{te^{-tx}}{e^t - 1} dt$$

Q1) Déterminer le domaine de définition de f.

Q2) Déterminer sa limite en $+\infty$.

Q3) Calculer $f(x-1) - f(x)$.

Q4) En déduire un DSE de f.

Q5) Trouver d'une autre manière ce DSE.

Sol :

Algèbre : Raisonnable.

1) Elle est symétrique réelle donc dz.

2) On calcule les vp par χ, $\{2, -1, -1\}$.

Donc on étudie $2^n + 2(-1)^n$ qui div grossièrement.

3) Oui dz mais pas de thm spectral !

Elle est la somme de aI_3 tjs diag et de bM dz par 1).

4) les vp sont $\{a+2b, a-b, a-b\}$, on étudie $(a+2b)^n + 2(a-b)^n$.

CS , si les 2 modules sont strict inférieurs à 1 on cv vers 0.

Si l'un des deux dépassent 1 et qu'ils ne sont pas égaux, l'un va manger l'autre.

Si ils sont égaux, il n'y aurait que $a-b=1$ et $a+2b=1$ qui pourrait fonctionner , c'est I_3.

Analyse : 1) On peut prolonger par cie en 0.

Pour $x > -1$, la fonction est équivalente en $+\infty$ à $te^{\beta t}$, avec $\beta < 0$. Cvte.

Pour $x \leqslant -1$, div grossière.

2) Ca tend vers 0 en l'infini par thm de cvd à param cie,

pour $x > 0$ on peut dominer par $t \mapsto \dfrac{t}{e^t - 1}$ intégrable.

A t fixé la fonction s'écrase vers la fct nulle.

3) On part bien sûr de $x > 0$ par Q1.

On calcule la somme téléscopique qui cv grâce à 2) on a $f(x) = \displaystyle\sum_1^{\infty} \frac{1}{(x+k)^2}$.

4) Vu.

DSE , ben non série de fcts , erreur de retour par Gautier...Voir Q3...

5) Classique on multiplie par e^{-t} haut et bas.

On développe en dse (géométrique), on a $\displaystyle\int_0^{\infty} t.e^{-(x+1)t} \sum_0^{\infty} e^{-kt}$.

Ss réserve d'inversion, on arrive à une série d'intégrales qui se calculent bien par IPP.

On tombe sur $\dfrac{1}{(x+1+k)^2}$, parfait.

TAT fonctionne bien car à $x > -1$ fixé on est en $1/k^2$.

Thieulent CCINP : 3 élèves concernés. C'est le 719 mines 19.

Exercice 1 :

$$g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{(\mathrm{e}^{-xt} sh(t))}{t} dt$$

1) Donner le domaine de définition de g, noté Dg.

2) Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Dg et calculer g'.

3) Donner la limite de $(g(n))_{n>1}$ en $+\infty$.

4) Donner la valeur de $g(x)$.

Exercice 2 : Soit M les matrices symétriques réelles qui vérifient l'équation :

$$\mathrm{M}^3 + 4\mathrm{M}^2 + 5\mathrm{M} = 0_n$$

1) Justifier que M est diagonalisable.

2) Montrer que les valeurs propres de M sont parmi les racines de

$$P(X) = X^3 + 4X^2 + 5X$$

3) Trouver les matrices M.

© Heinrich CCINP :

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2 \quad / Sp(A) \cap Sp(B) = \varnothing$.

1) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, polynôme annulateur de A.

Montrer que les valeurs propres de A sont racines de P.

2) Montrer que $\chi_A(B) \in GL_n(\mathbb{C})$.

3) Soit $X \in \mathbb{C}^n$. Montier que $AX - XB = 0_{\mathbb{C}^n} \Leftrightarrow X = 0_{\mathbb{C}^n}$.

4) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Montrer qu'il existe un unique $X \in \mathbb{C}^n$ tel que $AX - XB = M$.

Sol : Fait en révisions. RMS mines 2021 1144.

Voir aussi rms mines 2019 661, rms ens 2018

Exercice 2 : Analyse, vu mais où ? exotd ? ou mines 19 ?

Soit $\varphi : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} \sin(xt)dt$.

1) Vérifier que φ est bien définie sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que φ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

3) Soit $x \in \mathbb{R}$, donner l'expression de $\varphi'(x)$ puis de $\varphi(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.

© Heinrich Centrale 1

Soit $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ continue, décroissante et intégrable , sur $\mathbb{R}^+$.

1) Montrer que, par une comparainon série-intégrale,

$\forall x \in \mathbb{R}^+, \displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \varphi(x+n)$ est une série convergente.

2) On pose le problème suivant :

$$(P) \begin{cases} f(x+1) + f(x) = \varphi(x) \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 \end{cases}$$

Montrer que l'expresion de f est nécessairement : $\forall x \in \mathbb{R}^+$

$$P(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \varphi(x+n)$$

3) Montrer que $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \varphi(x+n)$ satisfait (P).

Conclure (nbre de solution de (P)).

4) Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}_+$.

Sol :

1) Un dessin clarifie très bien les idées.

$\lfloor x \rfloor + n \leqslant x + n \leqslant \lfloor x \rfloor + 1 + n$ donc $\varphi(\lfloor x \rfloor + n) \geqslant \varphi(x+n) \geqslant \varphi(\lfloor x \rfloor + 1 + n)$

Notre série est à termes positifs ,il suffit de majorer.

Par comparaison, $\displaystyle\int_{\lfloor x \rfloor - 1 + n}^{\lfloor x \rfloor + n} \varphi \geqslant \varphi(\lfloor x \rfloor + n) \geqslant \varphi(x+n)$, gagné.

2) Rq(*) pour la suite $\lim\limits_{\infty} \varphi = 0$ csq de ce qui prècède.

Par calcul élémentaire $f(x) = \varphi(x) - \varphi(x+1) + f(x+2)$, rec aisée :

$f(x) = \displaystyle\sum_{0}^{N} (-1)^k \varphi(x+k) + (-1)^{N+1} f(x+N+1)$.

On fait tendre N vers $+\infty$ tout possède une limite ! La CN est acquise.

3) La série utilisée est abs cvte.

Mais elle vérifie aussi le CSSA donc dominée par le premier terme engagé.

Il tend vers 0 (*) .

Il reste la première clause : On revient en somme partielle (pas obligé séries abs cvtes),

on décale l'un des indices, tout téléscope sauf 2 termes , l'un tend vers 0. Gagné.

On a une CNS donc solution unique au pb.

4) On va utiliser le caractère local et un thm de transfert.

f se présente comme une série d'objets cies.

Je me place sur $[0, A]$, je regarde le reste pour une éventuelle cv uniforme.

On le controle grâce au CSSA $\left| \displaystyle\sum_{N}^{\infty} \right| \leqslant |f_N| \leqslant \varphi(N)$. Yes.

Rq local inutile ?

© Léo Marie Mines : Algèbre.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telle que $A^3 = A^2 - 2A$.

Mq que le rang de A est pair.

Sol : On a fait un truc similaire en td avec $B^3 + B^2 + B = 0$...

On a plusieurs plans possibles , décomposition des noyaux (interdit !).

Je fais scolaire, on a un poly annulateur scindé simple sur $\mathbb{C}$.

A est dz sur $\mathbb{C}$, les éventuelles vp sont racines de ce poly.

$Sp(A) \subset \{0, \alpha, \overline{\alpha}\}$, car 0 est racine et les autres sont complexes conjuguées.

Donc le rang se lit sur la diagonale (nbre de coeff non nuls).

Or la trace est restée réelle, donc le nbre de α est le même que pour $\overline{\alpha}$.

Analyse (Léo mines), exo **très** calculatoire.

1) Etablir : $\lim\limits_{\infty} \displaystyle\int_a^b f(t)\sin(nt)dt$.

Et re : $\lim\limits_{\infty} \displaystyle\int_a^b f(t)\cos(nt)dt$.

Avec $f \in \mathcal{C}^1([a,b], \mathbb{R})$.

2)a) Calculer $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2nt)}{\tan(t)}dt$.

b) En déduire $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$.

3) Limite et équivalent de : $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(2.\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right)\cos(nt)dt$.

Sol : Ouch, Léo a eu du mal à finir...

Selon moi c'est rigolo mais technique et ...

1) Il s'agit bien sûr ici du fameux lemme de Lebesgue, question de cours pour l'éternité.

Mais , pourquoi les deux, alors que c'est les mêmes ... ?

Bien sûr, ça va venir.

2)a) On calcule $I_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2(t)dt = \frac{\pi}{2}$, par linéarisation "élémentaire".

Puis l'évidence arrive , on calcule $I_{n+1} - I_n$, on utilise le formulaire trigo à block.

$\sin(p) - \sin(q) = ..$, ça simplifie bcp, puis $\cos(a)\cos(b) = ...$, bref 0.

C'est donc constant, b) $I_n = \dfrac{\pi}{2} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2nt)\left(\frac{1}{\tan(t)} - \frac{1}{t} + \frac{1}{t}\right)dt.$

Car comme nous le savons $\dfrac{1}{\tan(t)} - \dfrac{1}{t}$ est de classe $\mathcal{C}^1$. thm prolongement dérivée.

On applique 1) on pratique $u = 2nt$ de classe $\mathcal{C}^1$ à droite.

Il vient (après avoir établi la cv de l'intégrale de Lejeune-Dirichlet, vue en cours).

$\displaystyle\int_0^{n\pi} \frac{\sin(u)}{u}du$. Donc par caractérisation séquentielle de la limite, LJ$=\dfrac{\pi}{2}$.

3) D'abord la cv, pb en 0, avec les précautions classiques ,

la fonction est équivalente à $\ln(t)$, qui est classiquement intégrable.

Ma première idée a été de diviser et multiplier par t ds le ln(), calculs désagréables.

Une meilleure idée cohérente avec ce qui précède :

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{2.\cos(t/2).\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{\cos(t/2)}\right)\cos(nt)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))\cos(nt)dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(t/2))\cos(nt)dt.$$

IPP sur la première, crochet cv et nul.

On arrive à $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(nt)}{n.\tan(t)}dt$, déjà calculée pour n pair !

A mon avis , idée similaire pour les impairs(*).

La deuxième tend vers 0 par le lemme de Lebesgue, bref limite nulle.

Mais cela est imprécis pour avoir l'équivalent.

On réécrit l'IPP de Lebesgue pour décortiquer.

Le crochet est nul en 0, en $\pi/2$, on a un truc qui dépend de la parité

de n qui vient rejoindre (*).

Et l'intégrale est en $1/n$ fois un truc qui subit l'autre Lebesgue de Q1 ! ! ! !

En calculant les cstes non terminées , on est en K/n.

J'arrête là, trop long.

© Pôl Lemaire Mines telecom.

© Retour Lemaire (Mines télécom) Monnier p109

Exo 1 :

$(a, b) \in \mathbb{R}^3, \quad x \in \mathbb{R}^3 \quad, f(x) =< x/a > a+ < x/b > b$, (a, b) libre.

Q1) Montrer que f est un endomorphisme autoadjoint.

Q2) Montrer que $\ker(f) = \text{Vect}(a, b))^{\perp}$.

Q3) $\text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f) = \mathbb{R}^3$.

Q4) si $\langle a/b \rangle = 0$, que dire de f ? Reconnaître sa nature et ses éléments propres.

Q5) et si < a/b > non nul ?

Exo 2 : Soit f dérivable sur $[a, b[$, continue en b, $f(a) = f(b)$ et $f'(a) = 0$.

Q1) Montrer que il existe c dans $\mathbb{R}$ tels que, $f'(c) = (f(c) - f(a))/(c - a)$.

Q2) Proposer une interprétation géométrique.

Sol : Analyse , classique de première année.

1) Thm de Rolle à $g(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

On a $g(a) = g(b) = 0$ car $f'(a) = 0$.

Donc $\exists c \in]a, b[$ tq $g'(c) = 0$. Gagné.

2) En faisant un dessin avec tgte horizontale en a,

il arrive au point c que la tgte à la courbe passe par le point de départ.

Pour la preuve, on écrit l'équation d'une tgte, on la force à passer par le pt de départ...

Algèbre : 1) Il est clair que f est linéaire par bilin du ps, et de E vers E.

En remplaçant, on a facilement $\forall (x, y), (f(x)|y) = (f(y)|x)$.

2) On écrit $f(x) = 0$, par liberté de (a, b), on a les ps nuls.

Réciproquement : si $x \in \text{Vect}(a, b))^{\perp}$, tout est nul.

Dimension finie, donc le noyau est un droite, car $\text{Vect}(a, b)$ est un plan.

Or $\text{Vect}(a, b))^{\perp} \oplus \text{Vect}(a, b)) = E$.

Or il est visible que $Im(f) \subset \text{Vect}(a, b)$, égalité des dim par thm rang fin Q3.

4) On choisit une bon très adaptée, on norme a , puis b , puis leur produit vectoriel.

La matrice ds cette base est : (attention à bien remplacer)...

$\begin{pmatrix} \|a\|^2 & 0 & 0 \\ 0 & \|b\|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ on a les vp et sep, mais si ils sont normés,

on a un projecteur orthogonal sur $\text{Vect}(a, b)$.

5) Si les vecteurs a, b ne sont pas normés les calculs sont infectes,

mais le thm spectral s'applique quand même...

Je pense que les vecteurs étaient normés ds l'énoncé.

On regarde ce qui se passe dans ce plan stable.

On pose classiquement $(a|b) = \cos(\theta)$.

Les vp (par poly caract sont $1 \pm \cos(\theta)$).

Les vect propres sont alors classiqement $(1,1)^T$ et $(1,-1)^T$.

© B Vite Mines :

Algèbre : E eve , u endo orthogonal , $v = u - Id$.

1) Mq $\ker(v) = (Im(v))^{\perp}$.

2) Soit $u_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{0}^{n-1} u^k$.

Mq qu'elle cv vers la projection orthogonale sur $\ker(v)$.

Analyse : $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

1) Mq f est convexe ssi $\forall a \in \mathbb{R}^n, H_f(a) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

2) $a \in \mathbb{R}^n$, tq $f(a)$ min local, alors il est global.

Sol Algèbre :

1) Rq : le noyau de v c'est les invariants de u.

Il suffit de montrer une inclusion, car égalité dimensions, thm rang et dim de l'orthogonal.

Soit un vecteur qcq de $Im(v)$, donc , $u(x) - x$.

Soit $y \in \ker(v)$, on a $((u(x) - x)|y) = (u(x)|u(y)) - (x|y) = 0$.

2) On a donc $E = \ker(v) \overset{\perp}{\oplus} Im(v)$.

On évalue facilement u_n sur $\ker(v)$, c'est l'identité.

Sur $Im(v)$, $x = u(z) - z, u(x) = u^2(z) - u(z), u^2(x) = u^3(z) - u^2(z)$....

On somme, $u_n(x) = \dfrac{u^n(x) - x}{n}$, qui tend vers le vecteur nul car $\|u^n(x)\| = \|x\|$.

Donc on conserve le morceau ds le noyau et celui de l'image disparait...

Analyse :

Rappel : $[x, y] \overset{\text{cours.}}{=} \{(1-\lambda)x + \lambda y : \lambda \in [0,1]\}$.

Soient un entier $p \geqslant 1, x_i \in \mathbb{R}^n, i = 1, 2, \ldots, p$, on appelle combinaison convexe(**)

de $x_1, x_2, \ldots, x_p$ l'élément de la forme $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$ où $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1, \lambda_i \geqslant 0, i = 1, \ldots, p$.

Exemple : tout point de $[x, y]$ est une combinaison convexe de x et y ($p = 2$ dans ce cas).

Soit $f : C \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, C$ convexe, on dit que f est convexe ssi

$\forall x, y \in C, \forall \lambda \in [0,1],\ f((1-\lambda)x + \lambda y) \leqslant (1-\lambda) f(x) + \lambda f(y)$.

f est concave ssi $-f$ est convexe , ie changer le sens de l'inégalité précédente.

Soit f définie sur un convexe C de $\mathbb{R}^n$ et soit $x_i \in C, \quad i = 1, \ldots, p$.

Si f est convexe alors (mêmes hyp que **).

$$f\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(x_i)$$

Rq : Si $f_1, f_2, \ldots, f_k$ sont des fonctions convexes définies sur un même convexe C

et si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ sont des réels **positifs** alors $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \ldots + \alpha_k f_k$ est convexe.

Rq : Si $f : C \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est convexe et si $g : f(C) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est convexe

et croissante alors $g \circ f$ est convexe .

$$x, y \in C \text{ et } 0 \leqslant \lambda \leqslant 1$$

f convexe

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leqslant (1-\lambda) f(x) + \lambda f(y)$$

g croissante et convexe

$$g[f((1-\lambda)x + \lambda y)] \leqslant g[(1-\lambda) f(x) + \lambda f(y)] \leqslant (1-\lambda) g[f(x)] + \lambda g[f(y)]$$

$g \circ f$ convexe

Idée 1

- $f : C \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur C ouvert et convexe,

f est convexe ssi $f(y) \geqslant f(x) + \nabla f(x) \bullet (y-x) \forall x, y \in C$.

Démonstration : sens nécessaire

$$x, y \in C \text{ et } 0 < \lambda \leqslant 1$$

Convexité de f

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leqslant (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y) = f(x) - \lambda f(x) + \lambda f(y)$$
$$\frac{f(x + \lambda(y-x)) - f(x)}{\lambda} \leqslant -f(x) + f(y)$$

On fait $\lambda \to 0$, on parle ici de DL1, bien sûr.

$$\nabla f(x) \cdot (y-x) \leqslant -f(x) + f(y)$$
$$x \neq y \in C \text{ et } 0 < \lambda < 1$$

Démonstration : sens suffisant

$$f(y_1) \geqslant f(x) + \nabla f(x) \cdot (y_1 - x) \quad (1)$$

$$f(y_2) \geqslant f(x) + \nabla f(x) \cdot (y_2 - x) \quad (2)$$

$$y_1, y_2, x \in C$$

$$0 \leqslant \lambda \leqslant 1$$
$$(1-\lambda)(1) + \lambda(2) \to$$
$$(1-\lambda)f(y_1) + \lambda f(y_2) \geqslant f(x) + \nabla f(x) \cdot ((1-\lambda)y_1 + \lambda y_2 - x)$$

On prend maintenant $x = (1-\lambda)y_1 + \lambda y_2$ et on arrive sur la définition de la convexité de f.

Idée 2

$f : C \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur C ouvert et convexe,

f est convexe ssi $Hf(x)$ est semi-défini positif $\forall x \in C$.

démonstration : sens nécessaire

$x \in C$ ouvert et $d \in \mathbb{R}^n$, t scalaire suffisamment petit pour que $x + td \in C$

f convexe et par idée on a $f(x+td) \geqslant f(x) + \nabla f(x).\ td$ (Développement de Taylor)

$$f(x+td) = f(x) + \nabla f(x) \bullet td + \frac{1}{2} td \bullet Hf(x)td + \|td\|^2 o(td)$$

On en déduit

$$\frac{1}{2} td \bullet Hf(x)td + \|td\|^2 o(td) \geqslant 0$$

En divisant par t^2

$$\frac{1}{2} d \bullet Hf(x)d + \|d\|^2 o(td) \geqslant 0$$

On fait $t \to 0$ alors $o(td) \to 0$

Et il reste

$$\frac{1}{2} d \bullet Hf(x)d \geqslant 0$$

Comme d est quelconque, cela veut dire que $Hf(x)$ est semi-définie positive.

Démonstration : sens suffisant

$Hf(z)$ semi-définie positive $\forall z \in C$.

Développement Taylor $x, y \in C$ et il existe $z \in]x, y[$

$$f(y) = f(x) + \nabla f(x) \bullet (y-x) + \frac{1}{2}(y-x) \bullet Hf(z)(y-x)$$
$$(y-x) \bullet Hf(z)(y-x) \geqslant 0$$

Et donc $f(y) \geqslant f(x) + \nabla f(x) \bullet (y-x)$

Par idée 1, f est convexe.

Soit $f : C \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ convexe, C convexe,

alors tout minimum local de f est minimum global de f sur C.

Démonstration

x^* minimum local de f sur C convexe, $B\left(x^*, \varepsilon_0\right)$ le voisinage sur lequel x^* est minimum

Soit $y \in C, 0<\lambda \leqslant 1$, avec λ suffisamment petit pour que $x^*+\lambda\left(y-x^*\right) \in B\left(x^*, \varepsilon_0\right)$ i.e.

$\lambda\left\|y-x^*\right\|<\varepsilon_0$ On a par minimalité locale puis convexité de f :

$$f\left(x^*\right) \leqslant f\left(x^*+\lambda\left(y-x^*\right)\right)=f\left((1-\lambda) x^*+\lambda y\right) \leqslant(1-\lambda) f\left(x^*\right)+\lambda f(y)$$

On en déduit

$$f\left(x^*\right) \leqslant(1-\lambda) f\left(x^*\right)+\lambda f(y)$$

Soit après simplification

$$f\left(x^*\right) \leqslant f(y)$$

Donc x^* minimum global

$f: C \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur C ouvert et convexe,

$x^* \in C$ est minimum global de f ssi x^* est un point critique $\left(\nabla f\left(x^*\right)=0\ \right)$.

Démonstration

Sens nécessaire x^* minimum local sur un ouvert alors $\nabla f\left(x^*\right)=0$.

Sens suffisant

On a par idée $1, \forall y \in C$ ouvert

$$\begin{gathered} f(y) \geqslant f\left(x^*\right)+\nabla f\left(x^*\right) \bullet\left(y-x^*\right) \\ \text{Si } \nabla f\left(x^*\right)=0 \text{ il reste } f(y) \geqslant f\left(x^*\right) \end{gathered}$$

Exemple récapitulatif

Soit $f(x)=x_1^2+4 x_2^2-x_1 x_2+2 x_1-3 x_2$ définie sur $\mathbb{R}^2$.

On cherche le minimum de f sur $\mathbb{R}^2$

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 + 2 \\ 8x_2 - x_1 - 3 \end{pmatrix}$$
$$Hf(x) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}$$

$Hf(x)$ est semi-défini positif et même défini positif. Et ceci pour tout x.

Donc f est convexe et même strictement convexe.

Exemple récapitulatif

Soit $f(x) = x_1^2 + 4x_2^2 - x_1x_2 + 2x_1 - 3x_2$ définie sur $\mathbb{R}^2$

On cherche le minimum de f sur sur $\mathbb{R}^2$
Point critique

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 + 2 \\ 8x_2 - x_1 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$15x_2 - 4 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{4}{15}$$
$$2x_1 - \frac{4}{15} + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{13}{15}$$

Donc $x^* = \begin{pmatrix} -\frac{13}{15} \\ \frac{4}{15} \end{pmatrix}$ est minimum global.

© Debray Mines :

Analyse : Soit (a_n) une suite telle $a_0 = a_1 = 1$ et $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$.

1) Mq $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{a_n}{n!} \leqslant 1$, que peut on en déduire sur le rayon de la dse $\displaystyle\sum_0^{\infty} \frac{a_n}{n!}x^n$.

2) Etablir l'équa diff sur $]-1,1[$ (ordre 1).

2') Trouver f.

3) Expressions des a_p en fct de p.

Sol :

Je mixe les 2 exos quasi similaires avec ccp.

0) Rec facile $a_n > 0$.

1) Rec forte et aisée $a_n \leqslant n!$

On en déduit que le rayon dépasse 1.

2) On va trouver $f'(x) - (1+x)f(x) = 0$.

Pour l'obtenir, on écrit $f(x) = \sum_0^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$.

On dérive ds l'ouvert de cv, donc au moins dans $]-1,1[$.

Donc $f'(x) = \sum_0^{\infty} \frac{a_{k+1}.x^k}{k!} = 1 + \sum_0^{\infty} \frac{a_{k+2}.x^{k+1}}{(k+1)!}$, on utilise le départ :

C'est bon : $f'(x) - (1+x)f(x) = 0$.

Ce qui confirme que le rayon est 1.

On résout : $f(x) = \lambda e^{x+\frac{x^2}{2}}$, sensation de déjà vu ? ? ?

Rq : $a_0 = 1$ donc $f(0) = 1$, bref $\lambda = 1$.

3) Pour avoir le dse, produit de Cauchy de séries entières cvtes

(ouvert plus petit rayon)(peu amusant).

Ressemblance avec mines 2022 , 695.

$$e^t e^{\frac{t^2}{2}} = \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{t^p}{p!}\right)\left(\sum_{q=0}^{+\infty} \frac{t^{2q}}{2^q q!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p+2q=n} \frac{1}{2^q p! q!}\right) t^n$$

4) On peut alors séparer en pairs, impairs, on a les coeff...

On peut alors les expliciter comme somme sur une lettre muette.

Exo 2 Debray mines, on est en plein délire, exo qualifié en classe de Béton armé.

C'est le 9 feuille 8 ...Je redonne.

Exercice 9. Montrer que, pour tout $x \geqslant 0$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t}dt$

En déduire $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$.

1. (a) Appliquons le théorème de continuité des intégrales à paramètre.

- Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $x \to \frac{e^{-xt}}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, la fonction $x \to \frac{e^{-xt}}{1+t^2}$ est cpm sur $\mathbb{R}_+$.

- On a

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \left|\frac{e^{-xt}}{1+t^2}\right| = \frac{e^{-xt}}{1+t^2} \leqslant \frac{1}{1+t^2}$$

La fonction $t \to \frac{1}{1+t^2}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+$;

elle est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, car $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} \int_0^A \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ existe et vaut $\pi/2$.

Cela fournit l'hypothèse de domination.

On en déduit que f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

(b) Pour tout $x > 0$, on peut écrire :

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-xt}\ \mathrm{d}t = \left[-\frac{e^{-xt}}{x}\right]_{t=0}^{t=+\infty} = \frac{1}{x}$$

On en déduit $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

(c) Notons $\varphi : (x,t) \to \frac{e^{-xt}}{1+t^2}$ et appliquons le caractère local sur des segments,

pour établir que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

- Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $x \mapsto \varphi(x,t)$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_*^+$.

$\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t) = -\frac{te^{-xt}}{1+t^2}$ et $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x,t) = \frac{t^2e^{-xt}}{1+t^2}$.

- Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $p \in [0,1]$.

La fonction $t \mapsto \frac{\partial^p \varphi}{\partial x^p}(x,t) = \frac{(-t)^p e^{-xt}}{1+t^2}$ est continue par morceaux, car continue, sur $\mathbb{R}_+$.

Comme $\frac{(-t)^p e^{-xt}}{1+t^2} \sim (-1)^p t^{p-2} e^{-xt} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$, au voisinage de $+\infty$, elle est intégrable sur cet intervalle, par comparaison aux intégrales de Riemann.

- La fonction $t \mapsto \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x,t) = \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^2}$ est continue par morceaux, car continue, sur $\mathbb{R}_+$.

- Soit $[a,b]$ un segment inclus dans $\mathbb{R}_+^*$. On a :

$$\forall (x,t) \in [a,b] \times \mathbb{R}_+^*, \left|\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x,t)\right| = \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^2} \leqslant e^{-xt} \leqslant e^{-at}$$

La fonction $t \mapsto e^{-at}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$;

d'où l'hypothèse de domination sur tout segment pour $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$.

Par suite, f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x,t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^2}\ \mathrm{d}t$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f''(x) + f(x) &= \int_0^{+\infty} \left(\frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^2} + \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-xt}\ \mathrm{d}t = \left[-\frac{e^{-xt}}{x}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x}\end{aligned}$$

On peut donc conclure que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f''(x) + f(x) = \frac{1}{x}$$

- Pour $x > 0$, la fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{x+t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Pour $x = 0$, la fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ car,

au voisinage de 0 , on a $\sin t \sim t$.

Cela assure, pour $x \in \mathbb{R}_+$, l'existence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin t}{x+t}\ \mathrm{d}t$.

Fixons $x \geqslant 0$ et justifions la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t}\ \mathrm{d}t$, à l'aide d'une IPP :

- Le crochet $\left[-\dfrac{\cos t}{t+x}\right]_{t=1}^{t=+\infty}$ existe et vaut $\dfrac{\cos 1}{1+x}$.

* On a, pour tout $t \geqslant 1$: $\left|\dfrac{\cos t}{(t+x)^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{(t+x)^2} \leqslant \dfrac{1}{t^2}$.

On en déduit la convergence absolue de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{(t+x)^2}\,\mathrm{d}t$,

par comparaison aux intégrales de Riemann.

Par suite, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t}\,\mathrm{d}t$ converge et l'on a :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t}\,\mathrm{d}t = \frac{\cos 1}{1+x} - \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{(t+x)^2}\,\mathrm{d}t$$

On a donc établi la convergence, pour tout $x \geqslant 0$, de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t} dt$

- Pour tout $x > 0$, la fonction $\psi :]x, +\infty[\to]0, +\infty[$, définie par $\psi(u) = u - x$

est une bijection strictement croissante, de classe $\mathcal{C}^1$.

D'après le théorème changement de variable, on peut donc écrire :

$$\begin{aligned}
g(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_x^{+\infty} \frac{\sin(\psi(u))}{x+\psi(u)}\psi'(u)\mathrm{d}u = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(u-x)}{u} du \\
&= \int_x^{+\infty} \frac{\cos x \sin u - \sin x \cos u}{u} du
\end{aligned}$$

En procédant comme dans l'étude précédente, on établit la convergence

des intégrales $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u$ et $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,\mathrm{d}u$. On peut donc écrire :

$$g(x) = \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,\mathrm{d}u$$

Comme les fonctions $u \mapsto \frac{\sin u}{u}$ et $u \mapsto \frac{\cos v}{v}$ sont continues sur $\mathbb{R}^*$,

, on deduit thm fondamental analyse, que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*+$ avec, pout, tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\sin x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\, \mathrm{d}u - \frac{\cos x \sin x}{x} \\ &\quad - \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\, \mathrm{d}u + \frac{\sin x \cos x}{x} \\ &= -\sin x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\, \mathrm{d}u - \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\, \mathrm{d}u \end{aligned}$$

La fonction g' est de même de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec, pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} g''(x) &= -\cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\, \mathrm{d}u + \frac{\sin^2 x}{x} \\ &\quad + \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\, \mathrm{d}u + \frac{\cos^2 x}{x} \\ &= -g(x) + \frac{1}{x} \end{aligned}$$

La fonction g est donc solution, sur $\mathbb{R}_+^*$, de la même équation différentielle que f :

$$y'' + y = \frac{1}{x}$$

Fixons $x \geqslant 0$ et effectuons une intégration par partie.

De $\left|\dfrac{1-\cos t}{t+x}\right| \leqslant \dfrac{1-\cos t}{t}$ pour $t > 0$, on tire $\lim\limits_{t \to 0} \left(\dfrac{1-\cos t}{t+x}\right) = 0$,

car $\dfrac{1-\text{cost}}{t} \sim \dfrac{t^2/2}{t}$, an voisinage de 0 .

De $\left|\dfrac{1-\cos t}{t+x}\right| \leqslant \dfrac{2}{t}$ pour $t > 0$, on tire $\lim\limits_{t \to +\infty} \left(\dfrac{1-\cos t}{t+x}\right) = 0$.

Par suite, le crochet $\left[\dfrac{1-\cos t}{t+x}\right]_0^{+\infty}$ existe et vaut 0.

On déduit du théorème d'IPP la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{(t+x)^2}\, \mathrm{d}t$ et l'égalité :

$$g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x}\, \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{(t+x)^2}\, \mathrm{d}t$$

- Appliquons le théorème de continuité des intégrales à paramètre.

* Pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto \frac{1-\cos t}{(t+x)^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, la fonction $t \mapsto \frac{1-\cos t}{(t+x)^2}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$.

- On a :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*, \left|\frac{1-\cos t}{(t+x)^2}\right| = \frac{1-\cos t}{(t+x)^2} \leqslant \frac{1-\cos t}{t^2}$$

La fonction $\varphi : t \mapsto \dfrac{1-\cos t}{t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Comme $\dfrac{1-\cos t}{t^2} \sim \dfrac{t^2/2}{t^2} = \dfrac{1}{2}$, au voisinage de 0,

la fonction φ a un prolongement continu sur $\mathbb{R}_+$, donc est intégrable sur $]0,1]$.

On a $\varphi(t) = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$, au voisinage de $+\infty$; on en déduit,

par comparaison aux intégrales de Riemann, l'intégrabilité de φ sur $[1, +\infty[$.

Ainsi φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Cela fournit l'hypothèse de domination.

On peut donc conclure que g est continue sur $\mathbb{R}_+$.

- On a :

$$\forall x > 0 \quad 0 \leqslant g(z) \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{2}{(t+x)^2} dt = \left[-\frac{2}{t+x}\right]_0^{+\infty} = \frac{2}{x}$$

On en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$.

- Posons $h = f - g$. D'après les questions précédentes, la fonction h est continue sur R_+,

de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ et est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle :

$$y'' + y = 0$$

On en deduit l'existence de $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x > 0 \quad h(x) = a\cos x + b\sin x$$

D'après l'étude précédente, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$.

Il en résulte que les deux suites $(h(2n\pi))_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(h\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers 0 ;

comme $h(2n\pi) = a$ et $h\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right) = b$, il vient $a = b = 0$, d'où $h = 0$.

sur $\mathbb{R}_*^+$. Puis sur $\mathbb{R}^+$, par continuité en 0 .

On a donc êtabli que les fonctions f et g sont égales sur $\mathbb{R}_+$.

Coume $f(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = [\text{ Arctan } t]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$, on en déduit que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t = g(0) = \frac{\pi}{2}$$

Debray Th Centrale 1. A faire.

On considère la matrice M réelle tél que :

$$\begin{aligned} Mii &= c \\ Mij &= \text{ a } \quad si \quad i > j \\ Mij &= \text{ b } \quad sinon \end{aligned}$$

On note $f(z) = \det(z - m_{ij})$.

1) Mq que f est une fonction polynomiale de degré 1.

2) On prend c = 0, mq M est DZ.

3) Mq les valeurs propres de M sont incluses soit dans un cercle soit dans une droite.

Voir F4 exo 8.

On a à faire à une ligne de niveau complexe $Arg\left(\dfrac{z+a}{z+b}\right) = cste$.

Si la cste est 0 modulo π on est sur une dte.

Sinon c'est du cercle. Preuve d'un autre temps...

Elles sont accessibles mais hors programme Google,

thm arc capable, institut Camille Jordan, tb rédigé.

Vuidel CCINP.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \neq 0$, $f_n(x) = \dfrac{(1+\frac{x}{n})^n - 1}{x}$. $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)$.

1) Existence de I_n.

2) Mq $\lim\limits_{\infty} I_n = \displaystyle\sum_1^{\infty} \frac{1}{k.k!}$.

Algèbre :

$A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A^2 = A^T$, inversible, $A \neq I_2$.

1) Polynôme annulateur.

2) Mq les vp sont des racines des poly annu...En déduire le spectre de A.

3) Mq A est orthogonale.

4) Déterminant de A, puis que vaut A.

Sol :

1) Attention piégeux, n fixé ! La fct tend vers 1 en 0 donc cie !

Kdo : exp de ln, puis $(e^u - 1) \underset{0}{\sim} u$. Bref I_n existe.

A x fixé (cv simple) Comme en 1) vers $x \mapsto \dfrac{e^x - 1}{x}$

qui est intégrable car cie sur un segment.

Or $\ln(1+u) \leqslant u$ donc $f_n(x) \leqslant \dfrac{e^x - 1}{x}$, TCD , $\lim\limits_{\infty} I_n = L = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^x - 1}{x} dx$.

Je dévellope $e^x - 1$ en dse. $L = \displaystyle\int_0^1 \sum_1^{\infty} \frac{x^{k-1}}{k!}$.

Ss réserve d'interversion $L = \displaystyle\sum_1^{\infty} \int_0^1 \frac{x^{k-1}}{k!} = \sum_1^{\infty} \frac{1}{k.k!}$.

Le thm de Fubini (T à T) s'applique car la série des $\displaystyle\int |g_k|$ cv.

Algèbre :

1) $A^4 = (A^2)^T = A$, donc $X^4 - X$ est recevable, mais A inversible donc $A^3 - I = 0$.

Donc A est $\mathbb{C}$ dz car annulée par poly scindé simple.

Mais on peut faire mieux, si 1 est vp comme la trace est réelle , l'autre aussi seul 1.

Donc $A = I_2$ impossible, bref $1 \notin sp(A)$, $A - I$ est donc inversible.

Poly annulateur $X^2 + X + 1$.

2) C'est du cours à maîtriser à la perfection car hyper réccurent.

Les vp ($\mathbb{C}$) recevables sont donc incluses ds $\{j, j^2\}$.

3) Comme $A^3 = I$, $A^2.A = I$, $A^T.A = I$.

4) Le det de la transposée est celui de A donc $\det^2(A) = \det(A)$ et A inversible.

$\det(A) = 1$. A est donc une rotation en dim 2, or $R_\theta^3 = I$, $\theta = \pm\dfrac{2\pi}{3}$. Car pas I_2.

Réciproque ok.

5) Les délires à éviter :

A^2 et A^T commutent sont sont codz.

Donc $\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ donc $a = 1, b = 1$ c'est I_2 , impossible.

Où est l'erreur ? L'ordre des vp...$a^2 = \overline{a}$...

© Hue Corentin CCINP :

Analyse fait en cours :

On introduit l'application sur $[0, +\infty[$

$$f_n : x \mapsto \frac{x^n \mathrm{e}^{-x}}{n!}$$

a) Etudier les convergences de la suite de fonctions (f_n).

b) Etudier les convergences de la série de fonctions $\sum f_n$.

Sol :

Exercice 53 :

a) Par CC , la suite de fcts (f_n) converge simplement vers la fonction nulle.

La fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$f_n'(x) = \frac{1}{n!} x^{n-1}(n-x)\mathrm{e}^{-x}$$

On peut alors dresser le tableau de variations de f_n et affirmer

$$\sup_{x \in [a,+\infty[} |f_n(x)| = f_n(n) = \frac{n^n}{n!}\mathrm{e}^{-n}$$

Par la formule de Stirling

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$$

donc

$$f_n(n) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$$

On en déduit que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[0,+\infty[$.

b) Par référence à la série exponentielle, la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ et sa somme est égale à 1.

Il ne peut y avoir convergence normale sur $[a,+\infty[$ car $f_n(n)$ n'est pas sommable.

En revanche sur $[0,a]$, il y a convergence normale car pour n assez grand , $n \geqslant a$, on a

$$\sup_{x\in[0,a]} |f_n(x)| = f_n(a)$$

Il y a aussi a fortiori convergence uniforme sur $[0, a]$.

Par l'absurde, s'il y a convergence uniforme sur une voisinage de $+\infty$,

on obtient par le théorème de la double limite

$$\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} f_n(x)$$

ce qui donne l'absurdité $1 = 0$.

Il n'y a donc pas convergence uniforme sur $[0, +\infty[$.

Algèbre :

$\mathbb{E} = \mathbb{R}_n[X]$, $\phi : P \longmapsto P(1 - X) + P(0)X^n$.

1) ϕ endo et matrice base canonique.

2) En étudiant ϕ^2, mq A^2 est triangulaire supérieure.

3) a) Mq si λ vp de ϕ alors λ^2 vp de ϕ^2.

b) Mq si λ est vp de A^2, $\pm\sqrt{\lambda}$ est vp de A.

Sol peu clair, pb énoncé ?

Sol : Pb énoncé (grr) , il me semble que A^2 sera triangulaire inférieure.

J'ai testé pour débuter $n = 2, 3$...

1) C'est clairement linéaire, et on respecte le degré max n.

On calcule l'image de la base canonique par ϕ.

$\phi(X^q) = (1 - X)^q$ pour $q > 0$, $\phi(1) = 1 + X^n$.

A Pas triang sup à cause du 1 en contrebas à gauche.

2) On calcule $\phi^2(P) = P(X) + P(0)(1-X)^n + P(1)X^n$.

Sur la base canon pour $q \neq 0, n$, $\phi^2(X^q) = X^q + X^n$. 1 sur la diag ppale.

$\phi^2(X^n) = 2X^n$, 2 sur la diag.

$\phi^2(1) = 2 + ...$, 2 sur la diag. Jamais rien au dessus !

3)a) Evident.

3)b) Les vp de A^2 sont positives, rq classique une triang sup est semblable à sa transposée.

Il suffit d'inverser l'ordre de la base ! ! !

Or A est $\mathbb{C}$ tz , ses vp auront pour carrés 1 et 2.

Donc les vp de A ne peuvent être que ± 1 et $\pm\sqrt{2}$.

Et au moins un sera là ! Sinon il manquerait dans A^2.

© Soyer Mines telecom :

Analyse : 1) DSE de $\displaystyle\int_0^x e^{-t^2} dt$.

2) Valeur à 10^{-3} près de $\displaystyle\int_0^1 e^{-t^2} dt$.

Sol :

On peut intégrer un dse sur son ouvert de convergence, il vient, $\displaystyle\sum_0^\infty \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(2n+1)}$.

$R = +\infty$, en $x = 1$ on a cssa.

Donc $R_{n-1} \leqslant \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(2n+1)}$.

Bref $n = 5$ est ok, la somme de 0 à 4 fait le boulot.

Algèbre $\Phi(M) = tr(AM)$, $\Psi(M) = M + tr(AM)B$.

$A \neq 0$, $B \neq 0$, $tr(A) \neq 0$.

1) Nature de Φ.

2) Mq $\ker(\Phi)$ est un sep de Ψ.

Noyau de Φ.

3) Conclure.

Sol 1) On a une forme linéaire non nulle...Car l'identité à un image non nulle.

2) Un exo très très proche a été fait en cours et un autre en révisions.

On immédiatement accès à la vp 1.

On regarde les sep pour vp différentes de 1.

Il vient $M(1-\lambda) = -tr(AM)B$ donc on est dans $< B >$.

$\Psi(B) = (1 + tr(AB))B$.

3) Dz ou pas dz ? Si $B \notin \ker(\Phi)$, on a en base adaptée :

1 avec un sep de dimension $n^2 - 1$ comme hyperplan (noyau forme lin non nulle).

Et $1 + tr(AB) \neq 1$ avec sep de dim au moins 1,dz.

Sinon, on complète l'hyperplan, triangulaire sup diag que des 1, pas dz !

Car $\Psi(C) = C + z$, $z \in \ker(\Phi)$.

Sol dérivation ? Homographie ? alignement, orthogo lignes de niceau.

Proba-Algèbre : X, Y va indépendantes, géométriques de paramètre $0 < p < 1$.

$$M = \begin{pmatrix} X & Y & 0 \\ 4Y & X & 0 \\ 0 & 0 & X - Y \end{pmatrix}.$$

Probabilité qu'elle soit inversible ?

Sol : Ne pas oublier que ceci commence par un exo d'algèbre linéaire.

Son déterminant est non nul ssi $X \neq Y$ et $X^2 - 4Y^2 \neq 0$.

Calculs aisés, attention géom donc à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

Analyse : g cie sur $[0,1]$, $G(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 |x-t|g(t)dt$.

1) Mq G est $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$. G".

2) Unicité d'une fonction tq $f(0) = f(1) = f'(0) = 0$...

© Barrault Martin Centrale 1 : Bô!!

Soit $(u_n)_{\mathbb{N}}$ définie par $u_0 > 0$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\arctan(u_n)$.

1) Mq $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_0 2^{-n}$.

En déduire, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = -\ln(2) + \mathcal{O}(u_n^2)$.

2) Mq $\exists C > 0$, tq $u_n \sim \dfrac{C}{2^n}$.

En posant $u_n = \dfrac{C}{2^n}(1+\varepsilon_n)$.

3) Mq $\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n = \dfrac{-C^2}{3.4^n}$????

En déduire que $u_n = \dfrac{C}{2^n} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{8^n}\right)$.

Sol : 1) rec facile car $|\arctan(u)| \leqslant |u|$.

En déduire? NON!

$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\arctan(u_n)}{u_n}$.

On fait un DL (elle tend vers 0) ça sort direct.

2) On fait la somme du 1) de 0 à $n-1$, la série des (u_n^2) est abs cvte par 1).

Il en sort : $\ln(u_n) = -n.\ln(2) + K + o(1)$, on passe en expon. Ca marche.

Le "on pose" est recevable par 2)

3) = NON ! Equivalent oui.

On reporte dans la def de notre suite rec.

On fait un DL ordre 3, tout se téléscope ou presque, ça roule.

$\sum(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n)$ cvte, donc les restes des 2 séries équivalentes signes csts,sont équivalents ! !

Ca téléscope, il reste $\varepsilon_n \sim \dfrac{K}{4^n}$.

On remplace, ça passe.

Hue Corentin Centrale 1 (pareil que Bourdon).

On définit $2n$ va indépendantes $(X_i)_1^{2n}$, de mêmes loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.

On note $(U_k = 1) = \displaystyle\bigcap_1^{2n}(X_i \neq k)$, à valeurs ds $\{0, 1\}$.

Et on note $F_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_1^n U_k$.

1) Donner la loi des U_k, espérance de F_n et sa limite.

2) Variance de F_n et sa limite.

3) Mq $\lim\limits_{\infty} \mathcal{P}(|F_n - e^{-2}| \geqslant \varepsilon) = 0$.

Sol : Exo fait en cours (ou presque) , je redonne, c'est un modèle.

Ainsi $U_k \rightsquigarrow \mathcal{B}(p_n)$, avec $p_n = \dfrac{(n-1)^{2n}}{n^{2n}} = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{2n}$

(on observe que cette loi est indépendante de k).

$E(U_k) = p_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{2n}$ et

$V(U_k) = p_n(1 - p_n) = p_n - p_n^2 = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{2n} - \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{4n}$.

$F_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} U_k$, donc $E(F_n) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} E(U_k) = E(U_1) = p_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{2n}$.

De même : $V(F_n) = \dfrac{1}{n^2} V\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} U_k\right) = \dfrac{1}{n^2}\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(U_k) + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \mathrm{cov}(U_i, U_j)\right) =$

$\dfrac{1}{n}(p_n - p_n^2) + \dfrac{n-1}{n}\mathrm{cov}(U_1, U_2)$.

L'événement $(U_1U_2 = 1)$ est l'ensemble des $(n-2)^{2n}$ applications de

$[\![1, 2n]\!]$ dans $[\![3, n]\!]$.

Ainsi $U_1U_2 \rightsquigarrow \mathcal{B}(r_n)$, avec $r_n = \left(1 - \dfrac{2}{n}\right)^{2n}$, donc

$\mathrm{cov}(U_1, U_2) = E(U_1U_2) - E(U_1)E(U_2) = r_n - p_n^2$.

Il en résulte :

$V(F_n) = \dfrac{1}{n}(p_n - p_n^2) + \dfrac{n-1}{n}(r_n - p_n^2) = r_n - p_n^2 + \dfrac{1}{n}(p_n - r_n)$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \mathrm{e}^{-2}$, classique de sup. De même $r_n = \left(1 - \dfrac{2}{n}\right)^{2n}$ tend vers e^{-4} quand $n \to +\infty$.

Puisque $\begin{cases} E(F_n) = p_n \\ V(F_n) = r_n - p_n^2 + \dfrac{1}{n}(p_n - r_n) \end{cases}$, il en résulte $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} E(F_n) = \mathrm{e}^{-2} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} V(F_n) = 0 \end{cases}$

Pour la limite finale on applique BT, c'est tout.

© Naïm Centrale 1 . Bel exo , jamais croisé.

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Etude des variations du poly caractéristique, une racine réelle ?, scindé ?

On note (a, b, c) les racines avec $a \in \mathbb{R}$.

2) a) $a^n + b^n + c^n \in \mathbb{N}$.

b) Mq $\sum \sin(\pi a^n)$ cv.

Sol : Calcul classique $\chi(A) = X^3 - X - 1$, tableau variations facile.

Une racine réelle entre 1 et 2, les 2 autres complexes conjuguées.

On est donc non scindé sur $\mathbb{R}$, trigonalisable sur $\mathbb{C}$.

2)a) Comme A à coeff entiers naturels, ces puissances aussi donc $tr(A^n) \in \mathbb{N}$.

Or après trigonalisation la trace (invariant de similitude) est $a^n + b^n + c^n \in \mathbb{N}$.

b) Tout serait simple si a de valeur absolue inférieure à 1, mais aïe.

On remplace a^n par $a^n + b^n + c^n - (b^n + c^n)$.

Par trigo élémentaire on arrive à une série en $\pm \sin(\pi(b^n + c^n))$.

On va montrer son absolue convergence.

b, c ont même module car conjuguées, et $abc = 1$.

Donc se module est strictement inférieur à 1.

Donc $(b^n + c^n)$ est un réel en valeur absolue controlé par $2r^n$.

Avec $|\sin(u)| \leqslant |u|$. Bref notre terme général est dominé par une série géom cvte.

© Titouan F Centrale 1

1) Prouver la cv de $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))dt$.

2) Pour $n \geqslant 2$, $P_n = \displaystyle\prod_1^{n-1} \left(\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\right)$.

Mq $\displaystyle\lim_{\infty} \frac{\pi}{2n} \ln(P_n) = I$.

Mq $P_n^2 = 2^{2n-1} P_{2n}^2$.

En déduire I.

Sol : 1) Fct cie sur le semi ouvert : pb en 0, ne pas composer les équivalents !

On est à signe négatif (cst), on fait apparraitre un t ss le sinus et au num,

la fonction est donc équivalente à $\ln(t)$ en0^+, intégrable.

2) On passe au ln, on reconnait une somme de Riemann, mais il ya un piège.

Intégrale généralisée ! Voir feuille intégration.

Ici fct intégrable et **monotone** donc ça passe.

Pour les produits au carré : On utilise $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

On arrive à $P_n = \prod_1^{n-1} 4\left(\sin^2\left(\frac{k\pi}{4n}\right)\right)\left(\cos^2\left(\frac{k\pi}{4n}\right)\right) = 2^{2n-2}\prod_1^{n-1}\left(\sin^2\left(\frac{k\pi}{4n}\right)\right)\prod_1^{n-1}\left(\cos^2\left(\frac{k\pi}{4n}\right)\right)$.

$= 2^{2n-1}\prod_1^{n}\left(\sin^2\left(\frac{k\pi}{4n}\right)\right)\prod_1^{n-1}\left(\cos^2\left(\frac{k\pi}{4n}\right)\right)$.

Pour le dernier produit on utilise $\sin(u) = \cos(\pi/2 - u)$ dans le morceau désiré :

$\prod_{n+1}^{2n-1}\left(\sin^2\left(\frac{k\pi}{4n}\right)\right)$, suivi de $l = 2n - k$, fini.

3) On passe au ln ce qui précède, on applique la lim de la somme de Riemann des 2 côtés.

$I = -\frac{\pi}{2}\ln(2)$.

Titouan F : X

Soient $(\lambda_i)_1^p \in \mathbb{R}^*$, $(\rho_i)_1^p \in \mathbb{R}^*$.

$f(x) = \sum_1^p \rho_i exp(\lambda_i x)$.

1) Mq f admet au plus $p-1$ racines.

2) Soit P polynôme réel avec p coeff non nuls, mq P admet au plus $2p-1$ racines.

Sol : d'abord je clarifie :

Je peux exiger que les (λ_i) soient strictement positifs en multipliant par une $exp(\lambda x)$ suffisante ss changer les racines.

On peut aussi exiger que les (λ_i) soient 2 à 2 distincts par regroupement.

Au départ j'ai penser à interpolation de Lagrange, mais non.

Je peux aussi exiger ($\times \pm 1$) que $\rho_n > 0$.

C'est de la rec, au rang 2 : $f(x) = \rho_1 exp(\lambda_1 x) + \rho_2 exp(\lambda_2 x)$.

Je dérive **après** avoir mis $exp(\lambda_1 x)$ en facteur , c'est strict croissant.

Donc au plus une racine.

Rq classique sur thm de Rolle si g possède q racines g' en aura $q-1$.

Donc au rang p, je mets $exp(\lambda_1 x)$ en facteur (ne change rien) ,

je dérive, on applique l'hyp ce rec d'avant.

2) D'abord $2p-1 = (p-1)+1+(p-1)$! Et on va appliquer 1).

On va prouver qu'il y a au plus racines $p-1$ sur $\mathbb{R}_*^+$, pareil sur $\mathbb{R}_*^-$.

Sur $\mathbb{R}_*^+$, on pose pour chaque racine $x_i = exp(\lambda_i x)$.

Les coeff du poly sont les $(\rho_i)_1^p$.

On applique 1), sur $\mathbb{R}_*^-$, $x_i = -exp(\lambda_i x)$.

Ne pas oublier 0, ce nbre max de racines est optimal car atteint.

$P(X) = X^3 - X$ possède 3 racines.

Rq : un exo raisonnable avant sur Fibonacci déguisé.

Titouan ENS Ulm

Voir exo rms 193, le même posé à un autre élève, même syntaxe.

E un $\mathbb{C}$ ev de dime finie $n, f \in \mathcal{L}(E)$. On pose $\forall g \in \mathcal{L}(E)$, $\varphi_f(g) = f \circ g - g \circ f$.

a) Calculer $\varphi_f^n(g)$ pour $g \in \mathcal{L}(E)$.

b) Montrer que $f^{n+1} \circ g - g \circ f^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} f^k (f \circ g - g \circ f) f^{n-k}$.

c) On suppose f non inversible. Montrer que f est nilpotente si et seulement si φ_f l'est.

d) Mq, si f possède une unique valeur propre, alors φ_f est nilpotente.

Étudier la réciproque.

Sol : D'abord on clarifie l'énoncé : si f homothétie, endo nul.

Bref on prend f non homothétie et alors elle ne commute pas avec tout (classik sup).

Donc notre endo est non nul, ressemblance avec exo 69 F4.

a) Au brouillon, on calcule le carré , le cube, hyp de rec facile à dem.

$\varphi_f^n(g) = \sum_{0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f^k \circ g \circ f^{n-k}$.

b) Calcul très simple qui rappelle celui de $a^n - b^n$ vu en sup.

On sépare en deux sommes , on décale les indices dans une,

on sort les deux termes désirés, le reste téléscope.

c) Classique pour le sens direct, si $f^p = 0$ à partir de φ^{2q-1} c'est nul.

Car dans chaque terme du a) l'une des deux puissances aux extrémités

est nul car exposant sup à n. Fin des évidences.

Pour la réciproque :

Mon idée est de prouver que si λ vp de f alors λ vp de φ_f.

Il y a peut-être plus simple que ce qui vient.

Soit par l'absurde λ vp non nulle de f alors je peux trigonaliser en mettant λ

en premier et (astuce) un vecteur du noyau en dernier (car cf énoncé f non inversible).

Bref $f(e_1) = \lambda e_1, f(e_n) = \overrightarrow{0}, \forall j \in [\![2, n-1]\!], f(e_j) = \sum_{2}^{j} ....$

OUi Oui j'ai écrit $k = 2$, mezalor où est passé le un ? Théo , le sais tu ?

Alors je crée $g \neq \omega$ par l'image d'une base : $\forall j \in [\![1, n-1]\!], g(e_j) = \overrightarrow{0}, g(e_n) = e_1$.

On vérifie assez facilement que pour tous les vecteurs de base $(f \circ g - g \circ f)(e_s) = \lambda g(e_s)$.

Mezalor λ vp de φ_f, ce qui est absurde car elle est nilpotente.

Donc f n'a que la vp 0, après tz elle devient triangulaire sup stricte et donc nilpo.

d) Si f n'a qu'une vp λ alors elle est la somme commutative de l'homothétie

de rapport λ et d'une nilpo N.

$\varphi_f(g) = N \circ g - g \circ N$, qui est donc nilpo.

Pour la réciproque : elle est vraie, soit λ vp non nulle de f, elle existe par A-Gauss ($\mathbb{C}$).

Alors $f - \lambda Id \notin Gl_n$, et $\varphi_{f-\lambda I}$ nilpo, on applique b).

Elle n'a donc que la vp 0, $f - \lambda Id$ est donc tz stricte sup. Gagné.

Rq agaçante : je ne me sers pas du b)...

© Léo Marie Centrale 1

En dimension n, soit un endo tq $u^2 = 0$. $rg(u) = r$.

1) Mq $r \leqslant \frac{n}{2}$.

2) Mq il existe une base $\mathcal{B}$, tq $Mat(u, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3) Déterminer le commutant de u.

Sol : Exo hyper classique , le "même" a été fait en cours, en révisions, en dm...

1) Par thm du rang ! Rq : $Im(u) \subset \ker(u)$.(*)

2) Soit $(e_i)_1^r$ une base de $Im(u)$, soit $(a_i)_1^r$, leurs antécédents.

Je complète $(e_i)_1^r$ en une base de de $\ker(u)$ cf (*).

Je regarde $(e_i)_1^r, (e_i)_{r+1}^{n-r}, (a_i)_1^r$, bon cardinal et libre ! ! !

Et on regarde la matrice en cette base , ben oui, ça roule...

3) Pour le commutant qui sera tjs un sev, on passe par blocs pour chercher

les matrices qui communtent.

Voici, une belle solution hélas fausse...

Bcp de candidats sont certainement tombés ds le piège (volontaire des profs).

Il arrive $\begin{pmatrix} A & B_r \\ 0 & A \end{pmatrix}$, donc nous cherchions les endos ayant une matrice

de ce type ds la base préalablement choisie.

Parmi les questions non posées mais prévues, la dimension ? Eternel pb...

Par iso matriciel, $r^2 + (n-r)^2$.

Fin de la solution bidon...

Et oui, on ne peut pas identifier, les blocs n'ont pas les mêmes tailles !

La vraie solution est dans le dm 2 2022-2023 !

Rq par convexité de la fct carré : $(n-r)^2 + r^2 \geqslant \dfrac{n^2}{2}$.

Le commutant a pour dim : $r^2 + (n-r)^2$, puis rq.

Il faut adapter les blocs ! Bref on est blocs 3×3...

Pour le reste voir nos exos et ce dm.

Legall Centrale 1 : Classique .

Soit $F(x) = \sum_{1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n^2+n}$.

1) Existence sur $\mathbb{R}^+$.

2) Continuité sur $\mathbb{R}^+$.

3) Classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^+_*$.

4) Donner F" (équa diff) , F', F.

Question de cours : Taylor avec reste intégral.

Sol : L'équation différentielle est $F" - F' = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}$.

Pour $\mathcal{C}^2$, caractère local sur $[a, +\infty[$.

Une primitive de $\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}$ est $\ln(1-e^{-x})$.

Les cstes peuvent se trouver grâce aux limites en l'infini.

Soit $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $B \in S_n^{++}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -C^T \\ C & B \end{pmatrix}$.

Soit $S = A^T A$, établir $S \in S_n^{++}$.

Sol : S symétrique clair, $\ker(A) = \ker(S)$ classique.

Donc même rang et $A \in Gl_n$ équivalent $S \in S_n^{++}$.

Puis $A \begin{pmatrix} x \\ X \end{pmatrix} = 0 \iff \{x - C^T X = 0, xC + BX = 0\} \iff \{x = C^T X, (C^T C + B)X = 0\}$.

Or la somme de 2 elts de S_n^{++} y est aussi donc $C^T C + B \in S_n^{++}$, donc $X = 0$ puis x aussi.

Donc $A \in Gl_{n+1}(\mathbb{R})$ et $S \in S_n^{++}$.

Exercice.

Pour $n > 0$, $a_n = \prod_{1}^{n} \left(1 + \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right)$.

a) Montrer que $a_n \longrightarrow 0$.

b) Que dire de $\displaystyle\sum_1^n \frac{1}{k}$?

c) En déduire que il existe $C > 0$ tel que $a_n \underset{\infty}{\sim} \dfrac{C}{\sqrt{n}}$.

d) Pour $n > 0$, $b_n = \displaystyle\prod_1^n \left(1 + \frac{1}{\sqrt{k}}\right)$.

Equivalent de b_n ?
Sol pour 4 mixtilignes

Exercice 7 : Transformation de Cayley

a) Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, que peut-on dire des valeurs propres complexes de A ?

b) Soit

$$\varphi : A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \mapsto (I_n - A)(I_n + A)^{-1}$$

Montrer que φ réalise une bijection de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sur

$$\{\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) / -1 \notin \mathrm{Sp}(\Omega)\}$$

Solution :

Exercice 7 :

a) Soit $\lambda \in sp(A)$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre associé.

D'une part $\bar{X}^T A X = \lambda \bar{X}^T X$, d'autre part $\bar{X}^T A X = -\overline{AX}^T X = -\bar{\lambda}\bar{X}^T X$.

Puisque $\bar{X}^T X \in \mathbb{R}^{+\star}$, on obtient $\bar{\lambda} = -\lambda$ donc $\lambda \in i\mathbb{R}$, comme pour thm spectral.

b) Pour tout $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}), \Omega = \varphi(A)$ est bien définie car $-1 \notin \mathrm{Sp}\, A$.

$\Omega^T \Omega = (I_n - A)^{-1}(I_n + A)(I_n - A)(I_n + A)^{-1}$

or $I_n + A$ et $I_n - A$ commutent donc $\Omega^T \Omega = I_n$.

Rq : $GH = HG$ et $H \in Gl_n$ entraine $GH^{-1} = H^{-1}G$, utilisé plusieurs fois...

De plus, si $\Omega X = -X$ alors $(I_n - A) X = -(I_n + A) X$ (car $I_n - A$

et $(I_n + A)^{-1}$ commutent) et donc $X = 0$. $-1 \notin \mathrm{Sp}(\Omega)$.

Ainsi l'application $\varphi : \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \to \{\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) / -1 \notin \mathrm{Sp}(\Omega)\}$ est bien définie.

Si $\varphi(A) = \varphi(B)$ alors $(I_n - A)(I_n + B) = (I_n + A)(I_n - B)$.

En développant et en simplifiant on obtient $A = B$ et donc l'application φ est injective.

Enfin soit $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tel que $-1 \notin \mathrm{Sp}(\Omega)$, on cherche à résoudre $\varphi(A) = \Omega$.

On développe on range...

Voilà $A = (\Omega + I_n)^{-1}(I_n - \Omega)$ qui est bien définie car $-1 \notin \mathrm{Sp}\Omega$.

$A^T = (I_n - \Omega^{-1})(\Omega^{-1} + I_n)^{-1} = (\Omega - I_n)\Omega^{-1}\Omega(I_n + \Omega)^{-1} = (\Omega - I_n)(I_n + \Omega)^{-1} = -A$

Ainsi $\varphi(A) = \Omega$. Finalement φ est bijective.

Centrale 2 Certains énoncés version torchon.

Soient $p_1 < ... < p_k$ des entiers non nuls.

$A_n = \{(n_1, ..., n_k) \in \mathbb{N}^k | \sum p_j n_j = n\}$, $a_n = card(A_n)$, $f(x) = \sum\limits_0^{\infty} a_n x^n$.

1) Soit $\alpha \in \mathbb{C}, p \in \mathbb{N}$.

Pour $|z| < 1$ mq, $\dfrac{1}{(z-\alpha)^p} = \sum\limits_0^{\infty} u_n x^n$, $u_n =?$, équivalent de u_n en l'infini.

2) Dans un match de rugby, les australiens ont marqué 142 pts.

Ecrire une fct Python qui compte le nombre de combinaisons possibles , essais, pénalités...

3) Mq pour $k = 3$, $\forall n \geqslant 1, a_n = \sum\limits_0^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} \left(1 + \left\lfloor \dfrac{n-3i}{2} \right\rfloor\right)$.

Equivalent de a_n en l'infini.

4) Cas général : Mq $a_n = O(n^k)$, rayon de cv de f ?

Mq pour $k = 2$, $f(x) = \prod\limits_0^k \dfrac{1}{1 - x^{p_i}}$. Kdo produit de Cauchy.

Sol :1) résultat de cours qu'on peut retrouver par dérivation terme à terme sur $\left]-|\alpha|, |\alpha|\right[$.

$$\frac{1}{a-x} = \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{a}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{a^{n+1}}, \quad \frac{1}{(a-x)^{p+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p} \frac{x^n}{a^{n+p+1}}.$$

On applique avec un cran de moins sur p, on fait attention au $\pm$ de la parité de p.

Pour un équivalent du u_n trouvé Stirling $q! \sim \left(\dfrac{q}{e}\right)^q . \sqrt{2q\pi}$.

Calculs agacants sur dl et équivalents, je crois que c'est $\dfrac{n^{p-1}}{(p-1)!} . \dfrac{1}{\alpha^{n+p}}$.

Rappel : j'ai utilisé $\left(1 + \dfrac{m}{n}\right)^n$ tend vers e^m.

2)

```
#nombres 3<5<7
```

```
def point(n):
    c=0
    for i in range (1+(n//7)):# attention à ne pas oublier en route
        for j in range (1+(n-7*i)//5):
            if (n-7*i-5*j)%3==0:# encore faut-il que le dernier existe
                c=c+1
    return c
# On peut faire bcp plus sophistiqué , pour élève habile en info
# fonction qui prend en argument n et une liste de pk...
# pas demandé ici mais ...
```

3) Enoncé imprécis je pense que $k = 3$ et $p_s = s$.

Alors p_3 peut prendre ttes les valeurs de 0 à $\lfloor n/3 \rfloor$, noté i.

Ce i acté le pb devient $p_1 + 2p_2 = n - 3i$,

p_2 peut prendre ttes les valeurs de 0 à $\lfloor (n-3i)/2 \rfloor$.

Le p_1 est alors unique, le 1 des sommes vient du fait qu'on part de 0.

Pour l'équivalent (encore) il faut être efficace sinon c'est long,

savoir dégagé ce qui va être négligeable.

Certes pas le droit d'additionner les équivalents mais on peut ajouter des dl

ce qui est presque pareil si les parties principales ne se téléscopent pas.

Il faut aussi uiliser $\lfloor x \rfloor \sim x$ en l'infini. Et encadrer $x - 1 \leqslant \lfloor x \rfloor \leqslant x$.

J'arrive sauf étourderie à $\dfrac{n^2}{12}$.

4) Etourderie d'énoncé : $a_n = O(n^{k-1})$?

Ceci vient du fait que au grand max p_k peut prendre n valeurs,

puis celui-ci décidé au grand max p_{k-1} peut prendre n valeurs,

etc mais p_1 au plus une, voir rugby.

Pour le rayon R, a_n tend vers l'infini car p_k peut à lui seul aller de 0 à $\lfloor n/n_k \rfloor$.

Donc $R \leqslant 1$, et plus grand que celui associé aux n^{k-1} qui est aussi 1. $R = 1$.

Puis $k = 2$ est hors sujet.

Vieil exercice à astuce (donnée ici (ouf)).

$f(x) = \prod_{0}^{k} \frac{1}{1 - x^{p_i}} = \prod_{0}^{k} \left(\sum_{0}^{\infty} (x^{p_i})^n \right)$.

On effectue le produit de Cauchy dans $]-1, 1[$ séries abs cvtes.

On arrive à $\sum_{0}^{\infty} a_n.x^n$ par def des a_n.

Expli : on décompte le nbre de puissances de x.

Adrien Le Derf, info pipo.

Soit $A \subset \mathbb{N}$, on pose $\sum a_n x^n$ avec $a_n = 1$ si $n \in A$, 0 sinon.

1) Mq le rayon dépasse 1.

On note f_A la fct concernée, et on suppose que les élts de A sont tq $\lim_{1^-} (1-x) f_A(x)$ existe.

On la note $P(A)$.

2)a) Mq $\emptyset$ et $\mathbb{N}$ sont là et calculer les limites concernées.

b) Mq $A \subset B \Rightarrow P(A) \leqslant P(B)$.

c) Mq $P(A) \in [0, 1]$.

d) Soient A, B disjoints , déterminer $P(A \cup B)$.

e) Déterminer $P(\overline{A})$.

Soit A l'ensemble des carrés en partant de 0.

3)a) Ecrire une fonction Python qui calcule $f_A(x)$.

b) Conjecturer $P(A)$.

c) Par comparaison série intégrale, déterminer un équivalent en 1 de f_A.

Sol : 1) Du cours $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leqslant 1$ donc $R \geqslant 1$.

2)a) Pour $A = \emptyset$ tout est nul, pour $A = \mathbb{N}$, on a la géométrique, $P(\mathbb{N}) = 1$.

2)b) Si $A \subset B$, sur $[0, 1]$, $f_A \leqslant f_B$, donc les limites aussi.

2)c) $\emptyset \subset A \subset \mathbb{N}$, on applique 2)b).

2)d) $f_{A\cup B} = f_A + f_B$, addition de dse cv.

Donc $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. C'est une probabilité...

2)e) On applique d) avec A et $\overline{A}$, $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

3) A vérifie les hyp de départ, car domination par géométrique. Fin du monde de ouioui.

3)a)

```
from math import *
def f(x):# on pourrait augmenter n mais la série cv très vite sauf si...Tableau
    S=1
    for j in range(1,1000000):
        S=S+x**(j**2)
    return S
def g(x):
    return (pi**0.5)/2/(1-x)**0.5
def quo(x):
    return (f(x)/g(x))
```

3)b) Oh là ! Au mieux en faisant des quotients de f(0.99)avec f(0.9999) et f(0.999999),

tu conjectures l'exposant de $1 - x$.

Sauf si tu connais les décimales de l'intégrale de Gauss...

3) c) Pas facile exo trop crescendo.

Pour $x \in [0, 1]$ fixé ! , $t \mapsto x^{t^2}$ est décroissante.

Sur $[n - 1, n], (n - 1)^2 \leqslant t^2 \leqslant n^2$, donc $\displaystyle\int_n^{n+1} x^{t^2} dt \leqslant x^{n^2} \leqslant \int_{n-1}^{n} x^{t^2} dt$.

Faire très attention la variable d'intégration est t.

On somme, Chasles, on passe à la limite ∞ car tt cv, clair ?

On aboutit à $\forall x \in [0,1], \displaystyle\int_0^{\infty} x^{t^2} dt \leqslant f_A(x) \leqslant 1 + \int_0^{\infty} x^{t^2} dt$.

C'est calculable ! On pose le chgt : $u = t.\sqrt{-\ln(x)}$ qui est bien $\mathcal{C}^1$,

strict croissant, bij de $\mathbb{R}^+$ vers lui-même, $\dfrac{1}{\sqrt{-\ln(x)}} \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-u^2} du$.

Or au voisinage de 1, $\ln(x) \sim 1-x$: Bref $f(x) \underset{1}{\sim} \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{1-x}}$. Ouf...

Alexandre

On considère une pièce avec une probabilité $p \in]0,1[$ de faire Pile et q de faire Face.

Pour $n > 0$, E_n événement 2 Pile consécutifs n'ont pas été obtenus après n lancers.

$p_n = \mathcal{P}(E_n)$.

1) Ecrire une fonction Python qui prend (p, n) en arguments et qui renvoie

True si E_n réalisé et False sinon.

2)a) $n > 0$, mq $p_{n+2} = pqp_n + qp_{n+1}$.

b) Mq 2 Piles consécutifs seront obtenus est un événement certain.

c) On note T la variable aléatoire qui prend en valeur le rang

de la première obtention de deux Pile.

Modifier votre fonction python pour qu'elle renvoie T.

3) Donner la fct génératrice de T en fonction de p.

4) Montrer que T admet une espérance, la calculer et vérifier grâce à une simulation.

Déjà corrigé voir centrale 2 tout corrigés compris, p116 et134 (le même !). Q4 y est.

Un piège : il faut observer 2 tirages consécutifs, mais après avoir examiné les 2 premiers, il ne faut surtout pas refaire le 2^e tirage pour le comparer au 3^e ! !

Une solution pourrait être de remplir au départ un vecteur avec n résultats de tirages,

mais c'est évidemment de la place mémoire et du temps perdus...

La relation de récurrence s'obtient par un raisonnement classique.

$A_{i,j}$ l'évét "jamais obtenir 2 Pile d'affilée du tirage i inclus à j exclu" (à la Python...).

Ainsi $p_n = P\left(A_{0,n}\right)$ (en numérotant les tirages à partir de 0).

L'indépendance mutuelle des tirages fait que $P\left(A_{i,j}\right)$ ne dépend que de $j-i$ (les tirages).

Soit F_i l'événement "le tirage i donne Face".

J'utilise le SCE $\left(F_0, \overline{F_0} \cap F_1, \overline{F_0} \cap \overline{F_1}\right)$ pour calculer p_{n+2} à l'aide de la FPT, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} P\left(A_{0,n+2}\right) &= P\left(F_0\right) P_{F_0}\left(A_{0,n+2}\right) + P\left(\overline{F_0} \cap F_1\right) P_{\overline{F_0} \cap F_1}\left(A_{0,n+2}\right) + P\left(\overline{F_0} \cap \overline{F_1}\right) F_{\overline{F_0} \cap \overline{F_1}}\left(A_{0,n+2}\right) \\ &= (1-p)P\left(A_{1,n+2}\right) + p(1-p)P\left(A_{2,n+2}\right) + 0 \end{aligned}$$

soit, grâce à la remarque précédente : $p_{n+2} = (1-p)p_{n+1} + p(1-p)p_n$

(ce qui permet d'expliciter (p_n) sachant que $p_0 = 1$ et $p_1 = 1 - p^2$).

Nous avons donc une relation de récurrence linéaire double ; les solutions de l'équation caractéristique sont les racines du polynóme $Q = X^2 - (1-p)X - p(1-p)$. Q est de degré 2 et

$Q(-1) = 2 - 2p + p^2 = 1 + (1-p)^2 > 0, \quad Q(0) = -p(1-p) < 0 \quad$ et $\quad Q(1) = p^2 > 0$

donc Q admet une racine dans $]-1, 0[$ et une dans $]0, 1[$.

En particulier, la suite (p_n) est une comb lin de 2 suites géométriques qui cv vers 0, donc (p_n) cv vers 0. Or l'événement A : "ne jamais obtenir 2 Pile d'affilée" n'est autre que $\bigcap A_{0,n}$ et la suite $(A_{0,n})$ est décroissante par construction.

Ainsi, grâce à la continuité décroissante de la probabilité, $P(A) = 0$; autrement dit :

L'événement presque certain.

Evaluons p_n, j'effectue N simulations et je calcule la fréquence de l'évét $E_n = A_{0,n}$.

D'ailleurs le calcul de p_n (relation de réc ci-dessus) s'effectue à l'aide d'une boucle banale.

(attention aux programmes récursifs de complexité exponentielle...).

```
import numpy as np
def E(n, p):
    if n < 2:
        return True
    else:
        P1 = np.random.rand() < p
        k = 1
        while k<n:
            P0, P1 = P1, np.random.rand() < p
            if P0 and P1: return False
            k += 1
        return True

def freqE(n, p, N):
    nb = 0
    for K in range(N):
        if E(n, p): nb += 1
    return nb/N

def pE(n, p):
    p0, p1 = 1, 1
    for k in range(1, n):
        p0, p1 = p1, p*(1-p)*p0 + (1-p)*p1
    return p1
```

La comparaison est probante pour N assez grand...

Avec les idées précédentes, T prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et, par construction, pour $n \geqslant 1$

$P(T = n) = P(T > n - 1) - P(T > n) = p_{n-1} - p_n$

d'où la valeur en x de la fonction génératrice (au moins pour $x \in [-1, 1] \ldots$)

$$G_T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (p_{n-1} - p_n)\, x^n$$

Par le résultat précédent, $\sum p_n$ est abs cv, puisque c'est une comb lin de 2 séries géom cv.

Je peux donc couper la somme en deux, pour x fixé dans $[-1,1]$:

$$G_T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} p_{n-1}x^n - \sum_{n=1}^{\infty} p_n x^n.$$

Par ailleurs, en reprenant la relation de récurrence du début, en multipliant par x^{n+2}

et en sommant (toutes les séries sont absolument convergentes) j'obtiens :

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{n+2}x^{n+2} = (1-p)\sum_{n=0}^{\infty} p_{n+1}x^{n+2} + p(1-p)\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^{n+2}$$

En notant $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$, sachant que $p_0 = 1$ et $p_1 = 1-p^2$, grâce à des réindexations,

$$g(x) - 1 - \left(1-p^2\right)x = (1-p)x[g(x)-1] + p(1-p)x^2 g(x)$$

c'est-à-dire

$$g(x)\left[1-(1-p)x - p(1-p)x^2\right] = 1 + p(1-p)x$$

$\varphi(x) = 1-(1-p)x(1+px)$ est un pôly de deg 2 avec $-\infty$ pour lim en $\pm\infty$ de plus

$$\varphi(-1) = 1 + (1-p)^2 > 0 \quad \text{et} \quad \varphi(1) = p^2 > 0$$

Donc φ a une racine α dans $]-\infty,-1[$, et β dans $]1,+\infty[$ et $\varphi > 0$ sur $[-1,1]$.

Ainsi $\forall x \in]\alpha,\beta[\quad g(x) = \dfrac{1+p(1-p)x}{\varphi(x)}$.

or après réindexation, compte tenu de $p_0 = 1$

$G_T(x) = xg(x) - [g(x)-1] = 1-(1-x)g(x)$ soit finalement

$$\forall x \in]\alpha,\beta[\quad G_T(x) = 1 - \frac{(1-x)(1+p(1-p)x)}{1-(1-p)x(1+px)}.$$

Or $1 \in]\alpha,\beta[$, G_T est dérivable en 1 donc T est d'espérance finie et (inutile d'expliciter g' !)

$$E(T) = G_T'(1) = g(1) = \frac{1+p(1-p)}{p^2} \text{ soit } E(T) = \frac{1+p(1-p)}{p^2}$$

Pour les simulations, je reprends l'idée du début, mais en comptant le nombre de lancers jusqu'à l'obtention de deux Pile consécutifs.

```
def T(p):
```

```
    n = 1
    P0 = np.random.rand() < p
    P1 = np.random.rand() < p
    while not (P0 and P1):
        P0, P1 = P1, np.random.rand() < p
        n += 1
    return n

def moyT(p, N):
    s = 0
    for K in range(N):
        s += T(p)
    return s/N

def espT(p):
    return (1 + p*(1-p))/p**2

print(espT(0.3), moyT(0.3, 10000))
```

Là encore, résultats probants !

Yann .

1) Écrire une fonction prenant en argument un entier naturel n > 1 , qui crée la liste des entiers naturels de 0 à $n-1$ puis qui retire un entier de la liste en utilisant une loi uniforme. (on pourra utiliser la commande list.remove(a) qui enlève la première occurence de a dans list.)

2) Écrire une fonction qui itère la manoeuvre précédente tout en remplissant une nouvelle liste des éléments retirés de la première liste.

Que simule cette fonction ?

3) Soit S_n l'ensemble des permtuations de $[\![0, \mathrm{n}-1]\!]$.

A. Quel est le cardinal de S_n ?

B. Écrire une fonction renvoyant le nombre de points fixes d'une permutation de $[\![0, n-1]\!]$.

Notons $f \in S_n$ et $\mathrm{Sn}(f)$ le nombre de points fixes de f.

C. Soit $N \in \mathbb{N}$. Écrire une fonction qui renvoie la liste $[\mathrm{Sn}\,(f_k)]_{0 \leqslant k < N}$.

D. Calculer la moyenne des valeurs de la liste pour n = 10 et N = 500.

E. Conjecturer la valeur de $E(Sn(f))$.

F. Démontrer ce résultat. On pourra notamment utiliser les variables $X_i(f)$ qui prennent la valeur 1 si i est un point de fixe de f et 0 sinon.

4) Calculer la variance de Sn(f).

5) Que valent $P(Sn = n)$ et $P(Sn = n - 1)$?

PS : Il y avait encore 3 ou 4 questions derrière, que je n'ai pas eu le temps de traiter.

Rq : je vais compléter et contextualiser.

Version plus mondaine :

n couples mariés arrivent à un bal et chaque cavalier choisit une cavalière aléatoirement.

Quel est le nombre moyen de couples mariés qui vont danser ensemble ?

6) Retour sur la loi : l'aide par exemple du principe d'inclusion-exclusion (ou formule de Poincaré, ou du crible), expliciter la loi de X (chaque $P(X = k)$ s'écrira comme une somme). Ce calcul cependant ne permet pas facilement d'en déduire l'espérance (et a fortiori la variance) de X.

Sol :

Les codes sont relus, tout va bien :

```
from random import *
import random as rd
def f(n):
    L=[j for j in range(n)]# liste en compréhension des entiers de 0 à n-1
    a=randint(0,n-1)
    L.remove(L[a])

    return L
def g(n):
    R=[]
    L=[j for j in range(n)]# liste en compréhension des entiers de 0 à n-1
    for j in range(n):
```

```
        a=randint(0,n-1-j)
        R.append(L[a])
        L.remove(L[a])
    return R
def ptfix(L):#L est une  liste qui révèle une permutation des nbres de 0 à len(L)-1
    c=0#compteur
    for j in range (len(L)):
        if L[j]==j:
            c+=1
    return c
def test(N,n):
    R=[]
    for k in range(N):
        b=g(n)
        d=ptfix(b)
        R.append(d)
    return R# un chiffre manque tjs ... normal ? oui ! le n-1 car...
def testbis(N,n):
    R=[]
    for k in range(N):
        b=g(n)
        d=ptfix(b)
        R.append(d)
        c=0
        for j in range (len(R)):
            c+=R[j]
    return c/N
```

Sol : 2) Comme les codes l'utilise, elle simule une parmutation aléatoire,

très utile ici en modulaire.

A) Ensemble de bijections de n elts vers n elts, cardinal $n!$.

D) Voir codes : Conjecture, la moyenne semble être 1.

F) L'idée, astucieuse la première fois :

$\forall \sigma \in S_n$, le nombre $X(\sigma)$ de points fixes de σ peut se calculer aussi comme suit :

$$X(\sigma)=\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{A_k}(\sigma),$$

où A_k est l'événement : k est un point fixe de σ i.e. $\sigma(k)=k$.

Mezalor la v.a. X donnant le nbre de pts fix d'une permutation s'exprime comme : $X=\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{A_k}$ et donc pour calculer $E(X)$ il suffit de savoir calculer $E\left(\mathbb{1}_{A_k}\right)$ i.e. $P\left(A_k\right)$.

Or pour chaque k fixé, $\sigma(k)$ peut prendre n'importe quelle valeur avec la même probabilité : c'est une conséquence intuitive du fait de mettre la proba uniforme sur S_n, mais qui demande quand même une justification rigoureuse, voir ci-dessous, après la conclusion.

Conclusion : pour tout $k, P\left(A_k\right)=1/n$, et donc $E(X)=\sum_{k=1}^{n} 1/n=1.$

Le nombre moyen de points fixes pour une permutation $\sigma \in S_n$ au hasard est de 1 .

Pour la justification rigoureuse (utile ?) : On regarde l'événement $A_1=\{\sigma \in S_n, \sigma(1)=1\}$:

il est formé des $(n-1)!$ permutations de $[\![2, n]\!]$, il est bien de proba. $1/n$.

On regarde $A_i=\{\sigma \in S_n, \sigma(1)=i\}$, on a une bij entre A_i et A_1, en composant par $\tau_{1,i}$.

b) Pour la variance : avec l'écriture $X=\sum_{k=1}^{n} X_k$, on sait que :

$$V(X)=\sum_{k=1}^{n} V\left(X_k\right)+2 \sum_{1 \leqslant k<l \leqslant n} \operatorname{Cov}\left(X_k, X_l\right) (***)$$

Comme chaque v.a. $X_k=\mathbb{1}_{A_k}$ est une Bernoulli de param $1/n$, on sait que

$$V\left(X_k\right)=\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}=\frac{n-1}{n^2}$$

D'autre part pour la covariance, on sait que :

$$\operatorname{Cov}\left(X_k, X_l\right)=E\left(X_k \cdot X_l\right)-E\left(X_k\right) E\left(X_l\right),$$

et $X_k \cdot X_l=\mathbb{1}_{A_k \cap A_l}$ est aussi une Bernoulli de param $P\left(A_k \cap A_l\right) = \dfrac{\operatorname{Card}\left(A_k \cap A_l\right)}{n!} = \dfrac{(n-2)!}{n!} = \dfrac{1}{n(n-1)}$.

Donc :

$$\operatorname{Cov}\left(X_k, x_l\right) = \frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2(n-1)}$$

Dans $(***)$, ceci donne :

$$V(X) = \sum_{k=1}^{n} \frac{n-1}{n^2} + 2 \sum_{1 \leqslant k < l \leqslant n} \frac{1}{n^2(n-1)} = 1$$

La variance est de 1!

c) Solution totale non demandée :

$P(X = k) = \dfrac{\operatorname{Card}\left(B_k\right)}{n!}$, B_k est l'ens des permut avec exactement k pts fix.

Mais choisir une telle permutation c'est :

- choisir l'ensemble des k points fixes : $\dbinom{n}{k}$ choix.

- choisir un dérangement de l'ensemble des $n-k$ éléments restants il y a en a d_{n-k} où le nombre de dérangements se calcule par le principe d'exclusion-inclusion.

Précisément :

L'ensemble $\mathcal{D}_p$ dérangements sur un ensemble à p éléments est le complémentaire des bijections ayant au moins un point fixe.

On écrit $\mathcal{D}_p = \left(F_1 \cup \cdots \cup F_p\right)^c$ où F_i est l'ensemble des bijections fixant i.

On applique la formule du crible (hors programme).

On trouve $d_p = \displaystyle\sum_{i=0}^{p} \frac{(-1)^i p!}{i!}$ pour le nombre de dérangements.

Si on revient à la loi de X, on obtient $P(X = k) = \dfrac{\binom{n}{k} d_{n-k}}{n!} = \dfrac{\binom{n}{k}}{n!} \displaystyle\sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i (n-k)!}{i!}$.

Donc en simplifiant le facteur $\dfrac{\binom{n}{k}(n-k)!}{n!} = \dfrac{1}{k!}$, on obtient pour la loi de X que :

$$P(X=k)=\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{n-k}\frac{(-1)^i}{i!}.$$

Rq : on retrouve $P(Sn=n)=\frac{1}{n!}$ très prévisible, une seule permutation convient (équi-probables).

$P(Sn=n-1)=0$, très prévisible, impossible d'avoir exactement $n-1$ invariants.

d) Pour $n\to+\infty, k$ fixé, $\displaystyle\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{n-k}\frac{(-1)^i}{i!}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{e^{-1}}{k!}$.

Ce qui démontre bien que la loi de X tend vers $\mathcal{P}(1)$.

Explication ? - La corrélation entre les X_i est suffisamment faible quand n est grand

(peut-être car elle est en $1/n^2$?).

On pourra effectuer les importations suivantes ? ? ? ? pbs syntaxe voir code :

import numpy as np

import pyplot.lib as plt

from numpy.Polynomial import Polynomial

(1) (a) On considère f et g définies sur [a,b] et σ une subdivision $a=t_0<t_1<\cdots<t_m=b$ de $[\mathrm{a},\mathrm{b}]$. Ecrire une fonction Python qui renvoie $\max\{|f(t_i)-g(t_i)|,\, i$ dans $[\![0,m]\!]\}$.

(b) On considère maintenant que f est continue et croissante sur [a,b]. Soit $\varepsilon>0$. Justifier qu'il existe $m\in\mathbb{N}^*$ et $a=t_0<t_1<\cdots<t_m=b$ tels que $\forall i\in[\![1,m]\!], f(t_i)-f(t_{i-1})\leqslant\varepsilon$.

Ecrire une fonction Python renvoyant une telle subdivision.

(2) On considère une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues et croissantes sur [a,b] et convergeant simplement sur $[\mathrm{a},\mathrm{b}]$ vers f cie.

(a) Montrer que f est croissante sur $[\mathrm{a},\mathrm{b}]$.

(b) Soit $x\in[a,b]$. Montrer que $\exists i\in[\![1,m]\!]$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, f_n\left(t_{i-1}\right) - f\left(t_{i-1}\right) - \varepsilon \leqslant f_n(x) - f(x) \leqslant f_n\left(t_i\right) - f\left(t_i\right) + \varepsilon$$

(c) Je ne sais plus.

(3) On considère une suite de polynômes $\left(P_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $P_0 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1} : t \mapsto \frac{1}{2}\left(P_n(t)^2 + t\right)$$

(a) Mq cette suite converge uniformément sur $[0,1]$ vers une fonction à déterminer.

(b) On considère Q vérifiant j'ai oublié cette partie.

Tracer la courbe de Q sur $[0,1]$ sur Python.

Sol : Je vais faire au mieux pour compléter.

Celui qui a crée cet exo est de ma génération, thm de Dini ds tous les coins...

1)b) f est cie sur un segment (Thm Heine) elle y est donc unift cie,

çà va resservir plus loin.

La phrase de cette unif cie pour ceux qui paniquent :

$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 / \forall (x,y) \in [a,b]^2, |x-y| < \eta, |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$

Il suffit donc de prendre une subdivision de pas inférieur à ce η(*).

Pour la fct on va procéder par dichtomie itérative car on est sûr que le procédé cv !

Les codes :

```
import numpy as np

import matplotlib.pyplot as plt

import numpy.polynomial as polyn

np.set_printoptions(precision=4)# inutile ici mais

#S=[-1.,0,0.5,1.]
```

```
def f(x):
    return x**2
def g(x):
    return x

# 3 trucs pour tester mes programmes !!

def dista(S,f,g):
    d=0
    for i in range (len(S)):
        if abs(f(S[i])-g(S[i]))>d:
            d=f(S[i])-g(S[i])
    return d
def distabis(S,f):# ressemblance avec ce qui précède
    d=0
    for i in range (1,len(S)):# attention à out of range
        if abs(f(S[i])-f(S[i-1]))>d:
            d=f(S[i])-f(S[i-1])
    return d
def sub(f,a,b,prec):# si la sudv n'est pas encore assez rapprochée, je rajoute les milie
    subd=[a,b]
    while distabis(subd,f)>prec: # pas assez rapprochéée
        sub=[]
        for j in range (len(subd)-1):
            sub.append(subd[j])
            sub.append((subd[j]+subd[1+j])/2)
        sub.append(subd[len(subd)-1])
        subd=sub
    return subd
```

2)a) f est croissante , $y > x$, $f(y) - f(x) =$

$f(y) - f_n(y) + (f_n(y) - f_n(x)) + f_n(x) - f(x) \geqslant f(y) - f_n(y) + (0) + f_n(x) - f(x)$.

Or à x et y fixé le côté droit tend vers 0 par cv simple.

Compatibilté de la limite avec les inégalités larges, $y > x$, $f(y) - f(x) \geqslant 0$.

b) Comme anticipé, on prend la subdivision(*).

Donc notre x est entre 2 pts de la sudivision notés $t_{i-1} \leqslant x \leqslant t_i$.

Par croissance des f_n, il vient $f_n(t_{i-1}) - f(x) \leqslant f_n(x) - f(x) \leqslant f_n(t_i) - f(x)$.

Puis le $f(x)$ est distant au plus de ε de f aux extrémités car (*) gagné.

c) Voilà Dini I !

La subdivision étant actée, il y cv en t_i et t_{i-1} par cv simple.

Donc les 2 morceaux des extrémités sont controlables (valeur absolue ...) par ε.

Donc pour n assez grand $-2\varepsilon \leqslant f_n(x) - f(x) \leqslant 2\varepsilon$.

La cv est donc uniforme ! !

3)a) Voilà Dini 2 ! Hors programme...

a) D'abord je remarque que par rec simple $\forall n \forall t \in [0,1], P_n(t) \leqslant t(***)$.

Je vous présente la solution comme je l'ai trouvée et pas version,

je ne vois pas d'où ça sort...

Je cherche à prouver que cette suite de polynômes est croissante ie

$\forall t \in [0,1], P_{n+1}(t) \geqslant P_n(t)$. Je pourrais alors appliquer Dini2, cv uniforme.

J'analyse cete inégalité : $P_n^2(t) + t \geqslant 2P_n(t)$.

En étudiant de trinome, je me rends compte que (***) ne me suffit pas pour le pver.

Cherchons d'abord la fonction Q qui serait notre limite (cf énoncé).

L'équation devient : $Q^2(t) + t \geqslant 2Q(t)$.

Je résout : $Q(t) = 1 \pm \sqrt{1-t}$ or par rec facile $P_n(0) = 0$.

Donc SI ça cv simplement vers Q sur $[0,1]$, $Q(t) = 1 - \sqrt{1-t}$.

Là il me vient l'idée de démontrer que $\forall n, \forall t \in [0,1], Q(t) \geqslant P_n(t)$!

Ce qui se démontre par une rec raisonnable. Oui, calculs faits.

Or le calcul qui prouve que $P_n^2(t) + t \geqslant 2P_n(t)$, est le même que la rec d'avant.

Reste à montrer que nos hypothèses ($P_{n+1} \geqslant P_n$, segment $[0, 1]$, cv simple vers Q),

entrainent la cv uniforme sur $[0, 1]$, Dini2.

La preuve :

Soit $g_n = Q - P_n$, suite décroissante de fcts cies cv simplement vers la fonction nulle.

Je note $\alpha_n = \|g_n\|_\infty = \sup\limits_{[0,1]} g_n(x)$. Tout ok car g_n positive, segment , cie...

Elle est positive décroissante donc cv vers $\alpha \geqslant 0$.

Par l'absurde $\alpha > 0$. $K_n = \{x \in [a, b], g_n(x) \geqslant \dfrac{\alpha}{2}\}$.

$\forall n, K_n \neq \emptyset$, bornée car inculse dans $[a, b]$ fermée comme image récirpoque de $\left[\dfrac{\alpha}{2}, +\infty\right[$

par g_n cie. Or $g_{n+1} \leqslant g_n$ donc $K_{n+1} \subset K_n$.

On applique le thm des segments emboités, $\bigcap\limits_{\mathbb{N}^*} K_n \neq \emptyset$.

Bref $\exists c / \forall n, c \in K_n$, et donc $g_n(c) \geqslant \dfrac{\alpha}{2}$.

Ce qui s'oppose à la cv simple en c.

Donc $\alpha = 0$ et la cv est donc uniforme.

3)b) La fonction Q est celle qui précède, j'en suis convaincu.

Le but est à mon avis de valoriser les import de départ et de pver visuelllement

que les P_n montent unift vers Q.

Bref on trace sur un même schéma Q , P_1 , P_5 , P_{20}, et c'est bô.

Tout ce qui est nécessaire , a été vu ailleurs dans Centrale 2 tout corrigés compris.

4) On pourrait dévier sur Stone-Weierstrass pour rester dans l'esprit, mais ...

Paul de Bouet . Info pipo.

Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$,on définit la suite u_k par $u_k(M) = \dfrac{\operatorname{tr}\left(M^{k+1}\right)}{\operatorname{tr}\left(M^k\right)}$.

Pour calculer les k premiers termes on a cet algorithme :

```
def quotrace( M, k) :
    u=[]
    for i in range(0,k+1):
        Mk=alg.matrixpower(M,i)
        Mkp1=Mk.dot(M)
        u.append(np.trace(Mkp1)/np.trace(Mk))
    return u
```

En quoi cet algorithme est-il maladroit ?

Refaites-le de manière à ce qu'il y ait au plus k produits matriciels.

2.a) On suppose que le polynôme caractéristique de M est scindé et ses racines sont $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. (on ne donnait pas d'information si complexes ou réelles, simples ou doubles).

On suppose de plus que $|\alpha_1| > \max\limits_{2 \leqslant k \leqslant n} (|\alpha_k|)$. Montrer que la suite u converge vers α_1

2.b) Qu'en est-il si $\alpha_1 = \alpha_2$ et $|\alpha_1| > \max\limits_{3 \leqslant k \leqslant \mathrm{n}} (|\alpha_k|)$?

3) Que peut-on dire quant à la convergence de u si M est la matrice d'une symétrie vectorielle par rapport à un plan dans $\mathbb{R}^3$?

Ensuite 2 matrices A et B dans $M_n(\mathbb{Z})$ dont je ne me souviens pas des coefficients.

4.a) Calculer $u_k(A+B), u_k(A), u_k(B)$ pour k variant de 5 à 20. Emettre une conjecture.

(La conjecture était : $u_k(A+B) = u_k(A) + u_k(B)$)

4.b) Montrez à la main que A et B possède un vecteur propre commun.

... d'autres questions, je m'en souviens plus

Démontrer la conjecture

Sol : 1) Classique de complexité mal gérée.

Il faut stocker ds une variable locale la valeur courante de M^k, pour éviter de recalculer les produits à chaque tours de boucles.

La commande Mk=alg.matrixpower(M,i) est très gourmande.

2) a) Ceci est un simple calcul de limite de sup.

Notre objet après tz (traces invariantes) devient $\dfrac{\displaystyle\sum_1^n \alpha_j^{k+1}}{\displaystyle\sum_1^n \alpha_j^k} = \dfrac{\alpha_1^{k+1} + \displaystyle\sum_2^n \alpha_j^{k+1}}{\alpha_1^k + \displaystyle\sum_2^n \alpha_j^k}$.

On met Raoul en facteur : $\dfrac{\alpha_1 + \displaystyle\sum_2^n \alpha_1.(\alpha_j/\alpha_1)^{k+1}}{1 + \displaystyle\sum_2^n (\alpha_j/\alpha_1)^k}$.

Les sommes sont finies d'objets tendant vers 0.

2)b) Ca ne change absolument rien, le calcul est le même, déstabilisant.

3) Ca ne cv pas car suivant la parité de la puissance, la trace vaut 3 ou 1.

Donc le quotient vaut 1/3 ou 3 en alternant.

4) Là c'est gênant ...

Mais j'ai une bonne idée, en b) vecteur propre en commun donc ça

sent les matrices qui commutent et ont donc un vecteur propre en commun.

Elles vont être cotz sur $\mathbb{C}$.

Si après tz l'une est $A' \begin{pmatrix} 2 & .. & .. \\ 0 & 2 & .. \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et l'autre dans la **même** base $B' = \begin{pmatrix} 3 & .. & .. \\ 0 & 3 & .. \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
alors traces inchangées et $u_k(A) = 2, u_k(B) = 3,\ u_k(A) + u_k(B) = 5 = u_k(A + B)$.

Pour les démos , c'est vu en cours et td exo 87 .

Si t'es pas content tu demandes le num de Paul à un 5/2.

Pour rappel une matrice à coeff entiers admet un inverse du même type ssi det $= \pm 1$.

Pour le prog Python , en modulaire avec la première question.

Les matrices déclarées sous Numpy, on en fera en révisions.

J'ai concu un exemple recevable, mais on peut être bcp plus imaginatif...

Je propose $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Elles ont ttes les qualités nécessaires .

On cherche un vecteur associé à 2 pour A et 3 pour B.

On trouve facilement une seule dte vect recevable : $(1, 2, -1)^T$.

On cherche un plan stable pour attraper le 2 ème vecteur, voir B Vite, etc

Bien sûr, j'ai créer ça avec Python et en choisissant une matrice de passage de det ± 1.

Bourdon

$E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$.

Pour $f \in E$, $T(f) : x \mapsto \dfrac{1}{2}\left(f\left(\dfrac{x}{2}\right) + f\left(\dfrac{x+1}{2}\right)\right)$.

Pour $x \in]0,1[$, $h(x) = \left(\dfrac{\pi}{\sin(\pi.x)}\right)^2$, $g(x) = \displaystyle\sum_{\mathbb{Z}} \dfrac{1}{(n-x)^2}$.

On souhaite démontrer que $h = g$.

1) Avec Python montrer l'égalité sur $]\varepsilon, 1-\varepsilon[$, ε petit, utiliser une somme partielle.

2) Mq les valeurs propres de T sont dominées par 1.

3) Mq g est cie sur $]0,1[$.

Mq : $g - h$ est prolongeable par cie en 0 et 1 .

Utiliser un dévelop asymtotique de h en 0.

4) Calculer $T(g-h)$, conclure.

5) Avec Python, écrire un programme renvoyant $T^n(f)$, composition.

Sol :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
def S(n):
    def g(x):
        s=0.
        for k in range(-n,n+1):
            s+=1/(x-k)**2
        return s
    return g
def h(x):
    return (np.pi/np.sin(x*np.pi))**2
def krobar(f,eps):
    X=np.linspace(eps,1-eps,2000)
    Y=[f(elt) for elt in X]
    Z=[h(elt) for elt in X]
    plt.plot(X,Y)
    plt.plot(X,Z)
    plt.show
```

Les deux courbes sont quasi indiscernables,

il faudrait jouer sur eps et n pour avoir un tout petit écart.

Mais on peut faire plus malin en simplifiant les deux vilains qui perturbent le graphe.

```
def S(n):
    def g(x):
        s=0.
        for k in range(-n,0):
            s+=1/(x-k)**2
        for k in range(2,n+1):
            s+=1/(x-k)**2
        return s
    return g
def h(x):
    return (np.pi/np.sin(x*np.pi))**2-1/(x**2)-1/((x-1)**2)
#etc
```

Alors là les choses évoluent très bien quand on augmente n.

2) On clarifie les idées de départ...

La série définissant g est cvte à x fixé car en $\dfrac{1}{n^2}$.

Elle est 1 périodique, car en prenant une somme partielle et en décalant

les indices puis en faisant tendre n vers l'infini on arrive à $g(x+1) = g(x)$.

Elle est paire, elle est cie sur $]0,1[$, car cv uniforme sur tous les segments de $]0,1[$.

Car $\dfrac{1}{(n-x)^2} \leqslant \dfrac{1}{(n-a)^2}$, où a est l'extrémité la plus proche des bords.

Thm de transfert de cie des séries de fcts (caract local) et axe de sym en $X = \dfrac{1}{2}$.

Il se voit assez facilement que h a les mêmes propriétés.

La différence après simplification du vilain terme $\dfrac{1}{x^2}$ est $G - H$.

$$G(x) = \sum_1^\infty \frac{1}{(n-x)^2} + \sum_1^\infty \frac{1}{(n+x)^2}.$$

$$H(x) = \left(\frac{\pi}{\sin(\pi.x)}\right)^2 - \frac{1}{x^2}.$$

Toutes les 2 cies, H par DL, F vu plus haut.

2) Par l'absurde soit une vp c, $c > 1$ et f un vect propre non nul.

Soit $\alpha \geqslant 1$, $\forall x \in [-\alpha, \alpha]$, alors les abcisses $x/2$ et $(x+1)/2$ aussi.

Comme f est cie on nomme $M_\alpha = \|f\|_\infty$ sur $([-\alpha, \alpha])$,

La relation $f(x) = \dfrac{2}{c}\left(f\left(\dfrac{x}{2}\right) + f\left(\dfrac{x+1}{2}\right)\right)$ donne $|f(x)| \leqslant \dfrac{2}{c} M_\alpha$.

Ce qui donne $M_\alpha \leqslant \dfrac{2}{c} M_\alpha$, absurde , rq en cas d'étourderie

de calcul ou de frappe, je suis certain que le plan est le bon !

4) En remplaçant, il vient $T(g-h) = 2(g-h)$, donc $g - h$ nulle.

5) D'abord sur le papier voir 208 rms 23.

On calcule au brouillon T^2 et T^3, on conjecture le résultat puis rec facile.

$$T^n(f) = \frac{1}{2^n} \sum_{0}^{2^n-1} \left(f\left(\frac{x}{2^n} + \frac{k}{2^n} \right) \right).$$

Pour programmer ça, facile, c'est une boucle qui calcule une somme.

Mais je pense qu'ils ont une idée derrière la tête...

Si on fait tracer ces fcts , on remarque que le graphe cv.

Donc il y aurait cv simple sur $[0, 1]$.

Si on relit ce qui précède, ça ressemble bcp à une somme de Riemann.

Il y a cv simple vers la fct cste (qui sont invariantes par l'endo T),

$$\int_0^1 f(t)dt.$$

Lauschke

On note Σ l'ensemble des suites tq $\forall k \leqslant 2, u_k = \frac{1}{k}(2u_{k-1} + (k-2)u_{k-2})$.

1)a) $\sum$ ev ? b) Dimension ?

2)a) On note $u(a, b)$ la suite telle que $u_1 = a$ et $u_2 = b$.

Calculer $u_n(a, a)$.

Que manque-t-il pour caractériser Σ ?

3) On note $A_n = \displaystyle\sum_{1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

Sur Python :

a) Ecrire une fonction qui renvoie $u_n(a, b)$.

b) Ecrire une fonction qui renvoie A_n.

c) Pour $n \in [\![2, 20]\!]$, calculer $u_n\left(1, \dfrac{3}{2}\right) - 2A_n$, conjecture ?

4) Mq $u_n(a, b)$ est bornée.

II) On note $f_u(x) = \sum_{1}^{\infty} u_k x^k$.

1) Mq la série a un rayon strict positif.

2) Mq la série vérifie dans l'ouvert de cv :

$(1 - x^2) f_u'(x) + 2 f_u(x) = 2(u_1 - u_2)x - u_1$

Mq sans calcul $x \longmapsto \dfrac{x}{1-x}$ est sol de $(1 - x^2)y' + 2y = -1$ sur $]-1, 1[$.

3) On prend $u_n\left(1, \frac{3}{2}\right)$, calculer f_u .

En déduire u_n.

Sol :

1)a) Par thm de caractérisation des sev Σ sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

b) C'est clairement de dim 2, comme les suites rec de sup.

$u_n(1, 0), u_n(0, 1)$ est une base naturelle.

2)a) La suite $u_n(a, a)$ est cste égale à a par rec aisée.

b) Il nous manque une autre suite de Σ non cste, elle sera alors libre avec les cstes.

On aurait alors une base concrète.

3)

```
def u(a,b,n):
    L=[a,b]
    for k in range(3,n+1):#super facile de décaler les indices!
        L.append((1/k)*(2*L[k-2]+(k-2)*L[k-3]))
    return L[n-1]
def A(n):
    S=0
    for k in range(1,1+n):
```

```
        S=S+(-1)**(k-1)/k
    return S
def comp(N):
    R=[]
    for j in range(2,N+1):
        R.append(u(1,1.5,j)-2*A(j)-(-1)**j/j)
    return R
```

Attention à la remarque !

Le code contient la conjecture $\dfrac{(-1)^n}{n}$.

4) Le majorant naturel est $\sup(|a|,|b|)$. Rec facile.

II) 1) Le coeff de la dse est borné donc $R \geqslant 1$.

2) Faute dans le retour...

Moi je vois : $(1-x^2)f_u'(x) - 2f_u(x) = 2(u_2-u_1)x + u_1$

Pas très dur à prouver, tu remplaces la dse dans l'équa diff,

tu sors les termes de degré un et deux qui ne sont pas présents dans toutes les sommes,

puis tu décales les indices pour tout mettre en une somme,

il apparait alors la définition de Σ.

Pour le sans calcul : elle est dse $\displaystyle\sum_1^\infty x^k$ donc à u_k cst, donc dans Σ.

Elle vérifie l'ED précédente, c'est la nôtre , $(1-x^2)y' - 2y = 1$.

3) Idée pas difficile mais calculs piègeux.

On voit une sol part en $y_0 = -\dfrac{1}{2}$.

On en déduit pour E_H : $\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1+x}{2(1-x)}$, grâce à ss calcul.

Donc pour celle qui nous intéresse : $(1-x^2)y' - 2y = 1 + x$. (Car $u_1 = 1, u_2 = 3/2$).

On cherche une sol part par variation de la cste.

On fait gaffe aux calculs, $y_2 = \left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)\ln(1+x)$.

On ajoute les sol de E_H, les conditions initiales donnent que c'est $f_u = y_2$.

On développe f_u en dse par produit de Cauchy astucieux, fraction à gauche, ln à dte.

On fait attention à $k = 0$.

La somme de 0 à n du produit de Cauchy est facile, et bien sûr on trouve :

$u_n = 2A_n + \dfrac{(-1)^n}{n}$, ce qui prouve la conjecture du 3).

Ca m'a paru très long, calculs lourds.

Defresne

On admet que $< P; Q >= \displaystyle\int_0^1 PQ(t)dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

1) Montrer l'existence d'une BON $(P_k)_0^n$ telle que $\forall k, deg(P_k) = k$.

2) Mq $\forall k > 0$, $P_k \perp \mathbb{R}_{k-1}[X]$, .

3) Info : Calculer $P_0, ..., P_3$.

4) Mq $\forall k > 0, \displaystyle\int_0^1 P_k = 0$ en déduire l'existence d'une racine dans $[0, 1]$.

5) On pose Q_k tel que $P_k = Q_k \displaystyle\prod_1^p (X - \lambda_j)^{n_j}$.

Avec les λ_j racines d'ordres impaires.

a) Mq Q est de signe cst sur $[0, 1]$.

b) Calcul de $\displaystyle\int_0^1 P_k \prod_1^p (t - \lambda_j))$, conclure.

Les codes de Mattéo :

```
import scipy.integrate as integr
from numpy.polynomial import Polynomial
```

```
import numpy as np
np.set_printoptions(precision = 2)
def ps(u,v):
    P,Q = Polynomial(u),Polynomial(v)
    return integr.quad(P*Q,0,1)[0]

def norme(u):
    return np.sqrt(ps(u,u))

def GS(e): #e famille libre
    n = len(e)
    eps = e #future famille orthonormée
    for i in range(n):
        for j in range (i):
            eps[i] -= ps(eps[i],eps[j])*eps[j]
        eps[i] /= norme(eps[i])
    return eps

Base_ortho = GS(np.eye(4)) #l'identité représente la base canonique
print(Base_ortho)  # relire QR code les lignes les colonnes , bref ki kes ou?

#Vérification de l'orthonormalité : on crée la matrice de Gram

def Mat_Gram(e):
    np.set_printoptions(precision = 0) #sinon on ne peut pas lire la matrice
    n = len(e)
    return np.array([[ps(e[i],e[j]) for i in range (n)] for j in range(n) ])

print(Mat_Gram(Base_ortho))
```

Le reste :

1) C'est tout simplement l'algorithme de G-S à partir de la base canonique.

2) Encore du cours : A chaque étape on a une bon de l'espace ambiant,

donc $< P_s >_0^{k-1}$ est une bon de $\mathbb{R}_{k-1}[X]$.

3) Codes

4) On a $< P; 1 >= 0$ car bon .

On va appliquer le tvi, si le poly est de signe cst,

c'est incompatible avec le thm de nullité de l'intégrale.

Cght de signe et continuité entraine racine.

5) a) Q_k ne possède que des racines d'ordre pairs ou des racines complexes conjuguées.

$Q_k = a_k \left(\prod_1^s (X-\lambda_i)^{2n_j} . \prod_1^r (X^2 + b_i X + c_i) \right)$. Rien ne change de signe.

b) Par l'absurde :

Si $p < k$ (nbre de racines impaires) , alors P_k est orthogonal à $\prod_1^p (t-\lambda_j)$.

Or son produit avec P_k, est de signe cst , pb nullité intégrale.

Donc $p = k$. Donc k racines distinctes entre 0 et 1, pas d'autres pour raisons de degré.

Heinrich

Soit (u_n) suite récurrente linéaire d'ordre p avec $u_{n+p} = \sum_0^{p-1} a_k u_{n+k} (1)$.

Soit $P = X^n - \sum_0^{p-1} a_k X^k$.

1) Soit (u_n) une suite réelle et L une suite de $N+1$ termes consécutifs de (u_n).

Ecrire une fonction qui permet de tester si $\forall n \in [\![0, N - deg(P)]\!]$ (1) est vérifiée

elle prendra en argument P et L.

2) Soit (u_n) une suite réelle récurrente d'ordre p, on dispose d'une liste L

de termes consécutifs de u d'indices p à $2p$ inclus.

Créer une fonction prenant en argument L et renvoyant le polynôme P associé à u.

On peut passer par résolution d'un système p équations et p inconnues.

3) Des tests...

Lucas Berr :

On donne une matrice A symétrique définie positive, soit v le seul vecteur tq $AX = b$.

$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 65 & -14 & 14 \\ -14 & 44 & 28 \\ 14 & 28 & 44 \end{pmatrix}$. $B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 17 \\ -14 \\ -10 \end{pmatrix}$

On note (u_p) la suite définie par $u_{p+1} = u_p - \rho(A.u_p - b)$.

1)a) Vérifier (Python) que A est défine positive .

b) Etudier (u_p) avec le u_0 de votre choix et $\rho = 0.2$ et $\rho = 0.25$.

c) Déterminer la valeur exacte de v.

Cas général :

2) Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Mq $\forall x \in \mathbb{R}^n, \|SX\| \leqslant \sup_{\lambda \in Sp(S)} |\lambda| \|x\|$.

3) Mq $\|u_{p+1} - v\| \leqslant K\|u_p - v\|$.

Avec K cste dépendant du spectre de A.

4) CNS pour la convergence des (u_p).

Codes :

```
import numpy as np

np.set_printoptions(precision=2)

AA=np.zeros((3,3))

AA[0,0]=65# etc

AA=1/9*AA

#np.linalg.eigvals(AA)

V=np.zeros((3,1))
```

```
V[0,0]=1

V[2,0]=-1

B=np.dot(AA,V)# pour se rassurer?

U=np.zeros((3,1))

U[0,0]=2

U[1,0]=0.5

U[2,0]=1

def g(U,n):
    R=U
    L=[R]
    for j in range(1,n):
        R=R-0.25*(np.dot(AA,R)-B)
        L.append(R)
    return R
```

Sol : 1) Il se voit que A est symétrique,

il suffit de faire calculer les vp par la bibliothèque numpy.

Tu dois savoir trouver hyper vite l'endroit où c'est rangé, voir codes.

Le spectre est $\{8, 8, 1\}$.

1) c) C'est la résolution d'un système élémentaire, voir codes, Python ou à la main ?

On peut passer par solve ou par AA^{-1}.

Exemple G=np.linalg.inv(AA), np.dot(G,B). V est ds les codes.

2) S est dz en bon, $S = P^T DP$, donc $\|SX\| = \|P^T DPX\| = \|DY\|$, avec $PX = Y$.

Or P et P^T sont orthogonales donc révèlent des isométries qui conservent la norme.

$\|DY\|^2 = \sum \lambda_i^2 y_i^2 \leqslant (\sup_{\lambda \in Sp(S)} |\lambda|)^2.\|Y\|^2$. (**) Or $\|Y\| = \|X\|$.

On peut aussi de manière décomposer $\overrightarrow{x}$ sur la bon de dz, (**) apparait.

3) $u_{p+1} - v = u_p - v - \rho(A.u_p - Av) = (Id - \rho A)(u_p - v)$.

On passe en norme et on applique 2). $(Id - \rho A)$ est symétrique.

$\|u_{p+1} - v\| = \|u_p - v\|.(\sup_{\lambda \in Sp(S)} |1 - \rho\lambda_j|)$. La voilà la cste K.

4) On a donc un phénomène géométrique de raison K.

Donc si $|K| < 1$, la suite rec converge vers v. (CS).

Mais la première question montre qu'elle est nécessaire, car après dz de $I - \rho A$ on arrive à :

$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 \end{pmatrix}$ dont la puissance n ne cv pas... , et pourtant $K = 1$.

Feliers

Le 992 (la chance pour la ...)

Baude

1. Soit $(a_n)_{n \geqslant 1}$ une suite telle que $a_1 = 1$ et pour tout $n > 1, a_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k}$.

a. Calculer les 10 premiers termes de la suite.

b. Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{4^k}$.

Tracer S_n en fonction de n pour $1 \leqslant n \leqslant 10$.

Que peut-on conjecturer ? On admettra la conjecture.

c. Que peut-on dire du rayon de la série entière $\sum a_n x^n$?

2. Soit la suite $(b_n)_{n \geqslant 1}$ telle que $b_1 = 1$ et pour tout $n > 1, b_n = \frac{-n}{2(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} b_k b_{n-k}$.

a. Calculer les 10 premiers termes de cette suite.

En comparant a_n et b_n faire une conjecture, la prouver.

Que peut-on dire du rayon R' de la série entière $B(x) = \sum b_n x^n$?

3. Mq B vérifie $xy'(1+y) - y = 0$ sur $]-R', R'[$.

4. $f(x) = x.e^x$ Tracer simult de f et B sur $]-1/4, 1/4[$, conjecture et preuve.

Sol : c'est du grand délire... Ai-je raté plus simple ?

1. Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite telle que $a_1 = 1$ et pour tout $n > 1$, $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k}$.

Plutôt que de créer une fonction qui calcule a_k (par exemple par récursivité),

je préfére écrire un script qui renvoie toute la liste des valeurs,

ce qui évite de recalculer plusieurs fois les termes qui servent à chaque cran.

On a préféré que le terme de rang i, soit directement a_i sans décalage,

et pour ce faire on a ajouté un premier terme fictif.

Calculer les 10 premiers termes de la suite.

La courbe semble asymptote à la dte d'équation $y = \dfrac{1}{2}$, ce qui sous-entendrait $S_n \sim \frac{1}{2}$.

c. Compte tenu de la conjecture, la série entière converge pour $x = \dfrac{1}{4}$,

donc le rayon de convergence $R \geqslant \frac{1}{4}$.

2. Soit la suite $(b_n)_{n\geqslant 1}$ telle que $b_1 = 1$ et pour tout $n > 1, b_n = \dfrac{-n}{2(n-1)} \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} b_k b_{n-k}$.

Note on a amélioré la fonction dessin, pour pouvoir prendre des entiers plus grands.

Sinon le re-calcul de tous les termes coute trop cher.

Je trouve la syntaxe de l'énoncé déstabilisante.

On voit que la suite $(|b_n|) \leqslant a_n$, le rayon est donc supérieur à 1/4.

La preuve est très simple par récurrence **forte**.

Rq : on peut calculer les a_n et la dse, le rayon 1/4...

et un équivalent des a_n si vous trouvez que c'est trop court.

Je trouve la syntaxe de l'énoncé déstabilisante.

3) Là ça pique.

Pour éviter les pbs d'indice 0 pour les séries entières (classique).

J'étudie $1 + B$ en posant $b_0 = 1$.

Je mène un calcul type méthode de la série entière en équa diff.

Le x en facteur remonte la puissance à n (calculs plus simples).

Il apparait un produit de Cauchy de dse de rayon supérieur à 1/4.

On arrive à $b_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k b_k b_{n-k}$.

Là on pourrait se dire que rien ne va plus, mais...

J'"élimine $k = 0$, je simplifie les b_n de chaque côté.

Il en sort $b_n = \dfrac{-1}{n-1} \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k b_k b_{n-k}$, là on pourrait se ...

On écrit la même somme par chgt indices $s = n - k$, le miracle a lieu !

4) L'orage continue.

Après avoir tracé les 2 courbes sur le même schéma,

on remarque une symétrie des 2 courbes par rapport à $Y = X$.

Elle serait donc réciproque l'une de l'autre...

Il est facile de vérifier que f est strictement croissante sur notre intervalle, cie , bij.

Dérivable à dérivée jamais nulle.

Donc f^{-1} est dérivable et $(f^{-1})' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$,

je sais que f est solution de $xy' - y(1+x) = 0$,

j'applique en $x = f^{-1}(u)$, tout se simplifie, le miracle a lieu.

Unicité de la solution par thm de Cauchy ($f^{-1}(0) = 1$) . $f^{-1} = B$.

Pour les codes qui manquent je vous les laisse :

Tu crée en modulaire une fonction qui utilise les 10 coeff de B déjà calculés.

Elle renvoie $B(x) = \sum_{1}^{1} 0 b_k x^k$.

On applique ce que j'ai écrit pour Bourdon (plus haut).

Ca roule tout seul, j'en suis profondément convaincu...

On peut aussi peaufiner pour impressionner l'ennemi, on inverse

les listes dans une des deux et les deux graphes se superposent !!

Le code :

```
from math import *
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from random import *
def liste_a(n):
    l=[0 ,1]
    for i in range(2,n+1):
        s=0
        for j in range(1,i):
            s+=l[j]*l[i-j]
        l.append(s)
    return(l)
def a(n):
```

```
    l=liste_a(n)
    return(l[n])
print(a(10))
def S(n):
    l=liste_a(n)
    s=0
    p=4
    for k in range(1,n):
        s+=l[k]/p
        p=4*p
    return(s)

print(S(10))
def dessin(n):
    x=range(1,n)
    y=[S(xk) for xk in x]
    plt.plot(x,y)
    plt.show ()
dessin (200)
def liste_b(n):
    l=[0 ,1]
    for i in range(2,n+1):
        s=0
        for j in range(1,i):
            s+=l[j]*l[i-j]
        l.append(-i/(2*(i -1))*s)
    return(l)

def b(n):
    l=liste_b(n)
    return(l[n])

def dessin_b(n):
    x=range(0,n+1)
    y=liste_b(n)
    plt.plot(x,y)
    plt.show ()
```

Ref perso Centrale 37 du fichier centrale 2 tout corrigés compris et ddl 119 dse.

F6 exo 23

Vite Benjamin retour imparfait...

Voir centrale 2 tout corr compris 25

1) $f(x) = (1 + \cos(5\pi.x))x(1 - x)$, $M = \sup\limits_{[0,1]} f$.

a) Tracer f et donner une valeur approchée de M.

b) $I_n = \displaystyle\int_0^1 f^n(x)dx, S_n(x) = \sum_0^n I_k x^k$.

$a = 1/M + 0.1$

Tracer S_n sur $[-a, a]$, pour $n \in 10, 20, 30, 40, 50$, conjecture ?

2) $g(x) = -x.\ln(x)$ sur $]0, 1]$.

$\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, J_{n,p} = \displaystyle\int_0^1 x^n(\ln(x))^p dx$.

a) Mq pour $(n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, $J_{n,p} = -\dfrac{p}{n+1} J_{n,p-1}$.

b) Calcul de $J_{n,p}$.

c) La conjecture du 1 est-elle vérifiée pour g ?

3 Cas général :

Comportement de $u_n = \dfrac{I_{n+1}}{I_n}$.

Conclure .

LeGall Lucas.

Soit Y_i une suite de VA réelle ou complexe, iid.

On considère $\displaystyle\sum_0^{+\infty} Y_i(w)x^i$.

1) Tracer l'arc brisé $(k, \displaystyle\sum_0^k Y_i(w)x^i$ avec des VA usuelles.

Tester avec $x \in \{-1.1, -1, -0.9, -0.5, 0.5, 0.9, 1, 1.1\}$.

Conjecture sur le rayon de cv ?

Soit Z loi géométrique de param p.

2) Soit $x \leqslant 0$, mq $\mathcal{P}(Z > x) = (1-p)^{\lfloor x \rfloor}$.

3) Soit $\varphi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow I$ bij et strict croissante.

Mq $\forall x \in I$, $(1-p)^{\varphi^{-1}(x)} \leqslant \mathcal{P}(\varphi(Z) > x) \leqslant (1-p)^{\frac{\varphi^{-1}(x)}{1-p}}$.

On rappelle Borel Cantelli.

4) On suppose que $\exists c$ tq $\sum_{0}^{\infty}(|Y_i| > c^n)$ converge.

Mq $\mathcal{P}(\{w \in \Omega / \left(\frac{Y_n}{c^n}\right)_{\mathbb{N}} \, bornee\}) = 1$.

En déduire que si Y admet une espérance finie $\mathcal{P}(w \in \Omega | R(w) \geqslant 1) = 1$.

Il restait 4 questions...

Vincent Heynderickx

On pose $(a_n)_{\mathbb{N}^*}$ suite de réels strict positifs.

On définit aussi $v_0 = 1, v_1 = a_1, v_{n+1} = a_n v_n + v_{n-1}$.

1) Ecrire un script qui renvoie les $p+1$ premiers termes de (v_n) en fct de $(a_n)_1^p$.

2) On définit $S_n = \sum_{1}^{n} \frac{(-1)^k}{v_k . v_{k-1}}$.

Ecrire un script qui renvoie les $p+1$ premiers termes de $(S_n)_1^{p+1}$ en fct de $(a_n)_1^p$.

3) Tracer $S_n(n)$ pour $a_n = \frac{1}{n^2}, a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}, a_n = \frac{1}{2^n}, a_n = 1$.

Conjecture ?

4) Démonntrer les conjectures.

Lorsque (a_n) cv, lorsque (a_n) diverge.

Kdo Mq $v_n \leqslant \prod(1 + a_n)$.

5) Les résultats sont-ils tjs vrais avec la suite $S'_n = \sum_1^n \frac{1}{v_k . v_{k-1}}$?

L'énoncé est un peu bizarre puisque la suite (a_n) commence à a_0, mais a_0 ne sert à rien.

On va faire comme si on n'avait rien vu :

Les codes :

```
def U(a):
    p = len(a)
    U = [1,a [1]]
    for n in range (2,p):
        U. append ( a[n] * U[n -1] + U[n -2] )
    return U


def S(a):
    u = U(a)
    S = [ ( -1) / ( u [0] * u[1] ) ]
    for k in range (2, len (u)):
        S. append ( S[ -1] + ( -1)** k / ( u[k -1] * u[k] ) )
    return S

import matplotlib . pyplot as plt

a =[0] + [ 1/n**2 for n in range (1 ,21)]
les_Sn = S(a)
les_n = [n for n in range (1 ,21)]
plt . plot (les_n , les_Sn ,'*')
plt . show ()
```

Pour la première suite proposée :

On dirait que les suites extraites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) convergent,

mais vers des limites différentes, avec la deuxième suite on obtient :

Faire le schéma avec les codes !

Dans les deux derniers cas, la série semble converger.

Qualitativement, plus les a_n sont grands, plus les u_n seront grands

et plus la série des $\dfrac{(1)^k}{u_{k-1}u_k}$ aura des chances de converger.

Avec $a_n = 1$ et $a_n = 1/\sqrt{n}$, les a_n sont assez grands pour faire converger la série.

En revanche avec $a_n = 1/n^2$ les a_n sont devenus trop petits et la série diverge.

Essayons des suites de (a_n) intermédiaires pour mieux cerner le problème :

- Avec $a_n = 1/n$:

La série semble encore converger.

Avec $a_n = 1/n$:

Difficile de dire si ça converge lentement ou bien si ça diverge.

Essayons avec des valeurs de n plus grandes :

C'est pas super clair... La bascule semble tout de même se faire autour de $a_n = 1/n$.

Peut-être il a-t-il un lien avec la convergence de la série $\sum a_n$?

(oui, j'ai lu la suite de l'exo avant de courageusement avancer ma conjecture. . .)

5 Montrons le résultat par récurrence sur n :

- pour $n = 1$ on a $u_1 = a_1 \leqslant 1 + a_1$.

- pour $n = 2$ on a $u_2 = a_2a_1 + 1 \leqslant 1 + a_2a_2 + a_1 + a_2 = (1 + a_1)(1 + a_2)$

- Supposons la propriété vraie pour n et $n + 1$. Alors :

$$\begin{aligned}
u_{n+2} &= a_{n+2}u_{n+1} + u_n \\
&\leqslant a_{n+2}\prod_{k=1}^{n+1}(1+a_k) + \prod_{k=1}^{n}(1+a_k) \\
&\leqslant \prod_{k=1}^{n}(1+a_k)\left(a_{n+2}\left(1+a_{n+1}\right)+1\right) \\
&\leqslant \prod_{k=1}^{n}(1+a_k)\left(a_{n+2}+a_{n+2}a_{n+1}+1\right) \\
&\leqslant \prod_{k=1}^{n}(1+a_k)\left(\left(a_{n+1}+1\right)\left(a_{n+2}+1\right)\right) \\
&\leqslant \prod_{k=1}^{n+2}(1+a_k)
\end{aligned}$$

Et donc la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

u_n étant de plus clairement positif, on obtient l'encadrement :

$$0 \leqslant u_n \leqslant \exp\left(\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+a_k\right)\right)$$

Puisque la série $\sum a_n$ converge, son terme général tend vers 0 et alors $\ln\left(1+a_n\right) \sim a_n$.

De plus, les a_n sont positifs, et donc les $\ln\left(1+a_n\right)$ aussi.

La série de terme $\ln\left(1+a_n\right)$ est de $\widehat{m}$ nature que la série de terme a_n, cvte.

Notons donc S la somme de cette série.

Comme les $\ln\left(1+a_n\right) > 0$, ttes les sommes partielles de cette série sont majorées par S.

Il vient alors que :

$$0 \leqslant u_n \leqslant e^S$$

Et donc que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{u_{k-1}u_k} \geqslant e^{-2S} > 0$$

Et donc la série de terme général $\dfrac{(-1)^k}{u_{k-1}u_k}$ est grossièrement divergente.

6 Posons $v_n = u_{n-1}\left(u_n - u_{n-2}\right)$.

D'après la relation qui définit la suite u_n, on a $v_n = a_n u_{n-1}^2$.

La suite u_n est minorée par $m = \text{Min}\left(1, a_1\right) > 0$ (récurrence aisée).

On a donc $v_n \geqslant m^2 a_n$ et donc la série de terme général v_n diverge vers $+\infty$.

Mais d'autre part cette série est télescopique :

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n} v_k &= \sum_{k=2}^{n}\left(u_{k-1}u_k - u_{k-1}u_{k-2}\right)\\ &= \sum_{k=2}^{n} u_{k-1}u_k - \sum_{k=1}^{n-1} u_{k-1}u_k\\ &= u_{n-1}u_n - u_0 u_1\end{aligned}$$

Donc la suite $(u_{n-1}u_n)$ tend vers $+\infty$.

D 'autre part cette suite est croissante :

$$u_{n-1}u_n - u_{n-2}u_{n-1} = u_{n-1}\left(u_n - u_{n-2}\right) = a_n u_{n-1}^2 > 0$$

Donc la suite $\left(\dfrac{1}{u_{k-1}u_k}\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est positive, décroissante et tend vers 0 .

Le cssa assure alors que la série de terme général $\dfrac{(-1)^k}{u_{k-1}u_k}$ est convergente.

Thomas Debray : trop de trous...je vais en faire un très ressemblant.

Q1. Soit I intervalle de $\mathbb{R}$, et $f \in \mathcal{C}^1(I)$, I stable par f tq $\exists a \in I, f(a) = a, |f'(a)| < 1$.

Mq il existe un voisinage de a tq tte suite récurrente $y_{n+1} = f(y_n)$ cv vers a.

Q2. On considère (x_n) tq pour $P \in \mathbb{R}[X]$, $x_{n+1} = x_n - \dfrac{P(x_n)}{P'(x_n)}$.

Et $f_P : x \mapsto x - \dfrac{P(x)}{P'(x)}$.

On prend $U_t = X^3 - 3X - 2t$.

Info : Tracer U_t pour $t = 3$, dérterminer les 20 premiers termes de la suite

pour différentes valeurs de x_0, que remarque-t-on ?

Essayer $t = 1.8$.

Q3. On dit que (u, v) est un couple si $f_P(u) = v, f_P(v) = u$.

On dit qu'il est attracteur si $|f'_P(u)f'_P(v)| < 1$.

Soit (u, v) attracteur . Mq si V voisinage de v et pareil en U, et que si $x_N \in V \cup U$.

Alors les extraites paires et impaires cv vers (u, v) ou (v, u).

Q4. Application à $P = U_t$, mq (u, v) est attracteur ssi $\begin{cases} 2u^3 + uv + 3v^2 = 2t \\ 2u(??) = 3 \end{cases}$.

Sol !

Codes :

```
import numpy as np

from scipy import*

import scipy.optimize as resol


import matplotlib.pyplot as plt

def h(x):
    return x**3-4*x-6.

def f(x):
    return x**3-3*x-0.3
def df(x):
    return 3*x*x-3.
X=np.linspace(1.5,1.7,1500)
Y=[f(x) for x in X]
Z=[x for x in X]
YY=[ff(x) for x in X]
plt.plot(X,YY)
plt.plot(X,Z)
```

```
plt.grid()
plt.show()
#resol.fsolve(h,2.)
def newton(f,df,u):

    v=u-f(u)/df(u)
    R=[u,v]
    for j in range (18):
        u,v=v,v-f(v)/df(v)
        R.append(v)
    return R,len(R)

def ff(x):
    return f(f(x))
```

Sol : Q1 prendre un voisinage (boule centrée en a de rayon R) tq $M_V = |f'| < 1$, IAF.

C'est possible car f' est cie.

Si on part de ce voisinage : $|f(u_0) - f(a)| = |f(u_0) - a| \leqslant M_V |u_0 - a| \leqslant M_V.R.$

Donc on reste dedans et par rec $|f(u_n) - f(a)| \leqslant (M_V)^n |u_0 - a|$.

Phénomène de contraction, on cv vers a.

Le point a attire .

Q2. Ceci est la méthode de Newton, faire un dessin est **Obligatoire** ,

le pt suivant est l'intersection de la tgte à la courbe avec l'axe des abcisses.

Rq1 : les termes pairs de la suite sont associés à la suite récurrente de $f \circ f$, impairs aussi.

Q3. $x_{2n+2} = f_P^2(x_{2n})$, on applique Q1 pour f_P^2...

Car la dérivée de $f \circ f$ est $f'.(f' \circ f)$

si on applique en u c'est exactement la clause de l'énoncé !

Si on part de l'un des 2 voisinages, les pairs convergeront et les

impairs aussi mais pas vers la même limite, dessin au tableau.

A partir de là (voir codes) le retour de Thomas est trop flou.

Je donne une situation que je connais qui amène à ça.

$f(x) = x^2 + cste$ avec la constante dans $\left]-\dfrac{3}{4}, -1\right[$.

Tout cela est facile à tracer en Python , j'en parle au tableau.

Marie Léo

Soient (n, p) entiers naturels non nuls.

On définit ε_n par -1 si p divise n, 1 sinon.

Et $\alpha_n = \dfrac{1}{n}\sum_1^n \varepsilon_k$.

Q1. Ecrire un programme prenant (n, p) en argument et renvoyant la liste ε_k.

Q2. Pareil avec α_k.

Q3. $p = 2$, Tracer $\left(\sum_1^n \dfrac{\varepsilon_k}{k}\right)_{1\leqslant n\leqslant 300}$. Puis Tracer $\left(\sum_1^n \dfrac{\alpha_{k-1}}{k}\right)_{1\leqslant n\leqslant 300}$.

Conjecture ?

Q4. Prouver les conjectures.

$p > 2$:

Q5. Montrer qu'il existe K_p telle que $\forall n, \alpha_n \geqslant K_p$.

Q6. Ecrire $\sum_1^n \dfrac{\varepsilon_k}{k}$ en fonction des (α_k).

Q7. Natures de $\sum_2 \dfrac{\alpha_{k-1}}{n}$? ? et $\sum_1 \dfrac{\varepsilon_n}{n}$.

Q8 ? ?

Maintenant Centrale 2 extérieur Beos

Centrale 1 extérieur

Exo 8 feuille 12 béton...

Clavaudbis

```
# Pg qui compte à chaque fois que la somme des dés = nb étudié (en passant par les encad
def f(x,y): # x le nb étudié, y le nb de dés
    a=[]
    c=0 # compteur
    for i in range(y-1):
        a.append(1) # liste de longeur y-1 (modif de boucle), correspondant à la combina
    while a[0]!=7:
        # quand le dé num 0 arrive à 7 le pg est fini car le pg a balayé tts les combina
        m=0 # somme des dés
        for j in range(y-1):
            m+=a[j]
        if m>=x-6 and m<=x-1: #modif comme vous l'avez demandé pour faire baisser le nb
            c+=1
        a[y-2]+=1 # on augmente de 1 le dernier dé
        for k in range(1,y-1):
            # dès que l'on arrive à 7 pour un dé, on le %6, et on ajoute la retenue au p
            if a[y-k-1]==7:
                a[y-k-1]=1
                a[y-k-2]+=1
    return(c,6**y) # le deuxième terme est le nb de combinaisons totales

# Pour 5 dés et 13 :
# au premier tour : a=[1,1,1,1] ; m=4 ; on ne pourra pas atteindre x avec le dernier dé
# au second tour : a=[1,1,1,2] ; m=5 ; ...
# au 6ème tour : a=[1,1,1,6] ; m=9 ; on pourra atteindre x avec le dernier =à 4 ; c++
# au 7ème tour : a=[1,1,2,1] ; m=5 ; ...
# ...
# au dernier tour : a=[6,6,6,6] ; m=24 ; ...
# en ajoutant 1 on a : a=[7,1,1,1] ==> pg stop

# à chaque fois on ajoute 1 à a (initialisé par [1,1,1,1]) qui pourrait être assimilé à
```

Des nouveaux de l'an dernier : Mr Schweitzer.

Centrale 2.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Donner la déf d'une matrice orthogonale, la caractérisation par les vect colonnes.

2. Pour A orthogonale, montrer que $|\det(A)| = \|C_1\| \times \cdots \times \|C_n\|$

(où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne, et C_k la k-ième colonne de A).

3. On donne une fonction determ(M) qui calcule le déterminant de M, et une fonction mathalea(n) qui renvoie une matrice de taille (n, n) avec des coefficients dans $]0,1[$.

Rq : c'est très maladroit de la part de l'interrogateur.

a. Écrire une fonction diff qui à A associe $|\det(A)| - \|C_1\| \times \cdots \times \|C_n\|$.

b. Tester avec 100 matrices (pour un certain $n \neq 1$).

c. Conjecturer le signe de cette différence.

Dans la suite, on considère, pour $n \geqslant 2$, une matrice $H_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telle que

(1) tous les coefficients de H_n sont ± 1

(2) $|\det(H_n)| = \|C_1\| \times \cdots \times \|C_n\|$

4. Mq pour une matrice vérifiant (1), (2) découle de (3) $H_n^\top H_n = nI_n$.

5. Donner toutes les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant (1) et (2).

6. a. Soit A une matrice de taille n vérifiant (1).

À l'aide d'opérations sur les colonnes, justifier que $\det(A)$ est un multiple de 2^{n-1}.

b. En déduire que si n est impair $\geqslant 3$ alors il n'existe aucune matrice vérifiant (1) et (2).

7. Mq si H_n vérifie (1) et (3) alors la matrice par blocs $H_{2n} = \begin{pmatrix} H_n & H_n \\ H_n & -H_n \end{pmatrix}$ aussi .

En déduire que si n est une puissance de 2 alors il existe une matrice vérifiant (1) et (3).

8. a. Écrire une fonction doublage (H) qui prend en argument une matrice carrée H et retourne la matrice par blocs ci-dessus. On pourra utiliser np.concatenate.

b. Construire une matrice d'ordre 16 vérifiant (1) et (3).

9. Soit A une matrice inversible.

a. Justifier que $(C_1, \ldots, C_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Soit $(F_1, \ldots, F_n)$ la base orthonormée obtenue à partir de $(C_1, \ldots, C_n)$ par le procédé de Gram-Schmidt, et P la matrice de passage de $(F_1, \ldots, F_n)$ vers $(C_1, \ldots, C_n)$

b. Justifier que P est triangulaire $\forall i$, son i-ième coeffdiagonal vérifie $|p_{ii}| \leqslant \|C_i\|$.

c. Justifier que AP^{-1} est une matrice orthogonale.

d. Démontrer la conjecture du 3 .

e. Montrer de plus qu'il y a égalité ssi la famille $(C_1, \ldots, C_n)$ est orthogonale.

9. Mq pour une matrice H_n vérifiant (1), la condition (2) équivaut à la condition (3).

Les codes :

```
import numpy as np
import numpy.linalg as alg
import numpy.random as rd

A=rd.random((3,3))

def diff(A):
    n=len(A)
    p=1
    for k in range(n):
        C=A[:,k]
        NC=sum(C*C)**0.5
        p*=NC
    return(alg.det(A)-p)

n=4
L=[diff(rd.random((n,n))) for k in range(100)]

def test(n):
    for k in range(10000):
        A=2*rd.randint(0,2,(n,n))-1
        if abs(alg.det(A))>=n**(n/2)-1:
            print(A)
```

```
def doublage(A):
    B=np.concatenate((A,A),axis=0)
    C=np.concatenate((A,-A),axis=0)
    D=np.concatenate((B,C),axis=1)
    return(D)

A=np.ones((1,1))
for k in range(4):
    A=doublage(A)
    print(A)
```

Corrigé.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ ssi $A^\top A = I_n$, pareil que la famille des colonnes $(C_1, \ldots, C_n)$ forme une b.o.n. de $\mathbb{R}^n = \mathcal{M}_{n,1}(R)$.

2. Si $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ alors $\det(A) \in \{1, 1\}$ et chaque colonne est normée donc $\|C_k\| = 1$ pour tout k : on a bien l'égalité demandée.

3. On conjecture que cette différence est toujours négative, autrement dit que pour toute matrice A on a $|\det(A)| \leqslant \|C_1\| \times \cdots \times \|C_n\|$.

4. Si (3) est là alors $\det\left(H_n^\top H_n\right) = \det\left(I_n\right) \Leftrightarrow \left(\det\left(H_n\right)\right)^2 = n^n \Leftrightarrow \left|\det\left(H_n\right)\right| = n^{n/2}$

et d'autre part le fait que tous les coefficients de H_n soient ± 1 implique que $\|C_k\| = \sqrt{n}$ pour tout k, d'où $\|C_1\| \times \cdots \times \|C_n\| = (\sqrt{n})^n = n^{n/2}$ et la condition (2) est vérifiée.

5 . Pour $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant (1), les deux colonnes sont soit colinéaires (auquel cas (2) n'est pas vérifiée) soit orthogonales (auquel cas (3) et donc (2) est vérifiée).

Il y en a 8 en tout, de la forme $\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 & \varepsilon_4 \end{pmatrix}$ avec $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \in \{-1, 1\}$ qcqs et $\varepsilon_4 = -\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$.

6. a. $\forall k \in [\![2, n]\!]$, effectuons l'opération $C_k \leftarrow C_k + C_1$, qui ne change pas le déterminant.

On obtient une matrice A' dont les colonnes $C_2', \ldots, C_n'$ one des coefficients appartenant à $\{-2, 0, 2\}$. Par linéarité du déterminant par rapport à chaque colonne, on obtient donc que $\det(A) = \det\left(A'\right) = 2^{n-1} \det\left(A''\right)$ où A'' est une matrice à coefficients entiers, et donc dont le déterminant est un nombre entier. Ainsi $\det(A)$ est un multiple de 2^{n-1}.

b. En particulier si A vérifie (1) avec $n \geqslant 2$ alors son déterminant est pair ; or si elle vérifie (2) son déterminant vaut $n^{n/2}$ qui ne peut être un nombre pair si n est impair (si n

n'est pas un carré parfait on n'obtient pas un entier ; si c'est un carré parfait on obitent un entier impair).

7. La matrice H_{2n} a bien tous ses coeff égaux à 1 ou -1. Un calcul direct par blocs donne

$$H_{2n}^{\top} H_{2n} = \begin{pmatrix} H_n^{\top} & H_n^{\top} \\ H_n^{\top} & -H_n^{\top} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_n & H_n \\ H_n & -H_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2H_n^{\top} H_n & 0 \\ 0 & 2H_n^{\top} H_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2nI_n & 0 \\ 0 & 2nI_n \end{pmatrix} = 2nI_{2n}$$

donc H_{2n} vérifie bien (1) et (3).

Rq : Ce serait très étonnant qu'on ne fasse pas démontrer Hadamard à moment donné...

En partant d'une matrice H_2 vérifiant (1) et (3) (par ex $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$) et en itérant cette construction $p-1$ fois on obtient une matrice d'ordre 2^p vérifiant (1) et (3), $\forall p \in \mathbb{N}$.

9. a. L'inversibilité de A se traduit par le fait que ses colonnes forment une base.

b. Par construction de Gram-Schmidt on a, pour tout $k_1[\![1, n]\!]$, Vect $(C_1, \ldots, C_k) =$ Vect $(F_1, \ldots, F_k)$ donc en particulier $C_k \in$ Vect $(F_1, \ldots, F_k)$, et donc la matrice de passage est triangulaire supérieure. De plus puisque $(F_1, \ldots, F_n)$ est orthonormée, le coefficient p_{ij} est donné par le produit scalaire $\langle F_i, C_j \rangle$. En particulier pour tout i, et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $|p_{ii}| = |\langle F_i, C_i \rangle| \leqslant \|F_i\| \, \|C_i\| = \|C_i\|$.

c. La matrice AP^{-1} est la matrice de la famille $(F_1, \ldots, F_n)$ dans la base canonique.

C'est donc une matrice de passage entre 2 bon, et ainsi $AP^{-1} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

d. On en déduit que $|\det(AP^{-1})| = 1$ et donc

$$|\det(A)| = |\det(P)| = \prod_{i=1}^{n} |p_{ii}| \leqslant \prod_{i=1}^{n} \|C_i\|$$

e. Aucun des facteurs n'est nul puisque A est inversible, on en déduit qu'il y a géalité dans l'égalité ci-dessus, si et seulement si pour tout i il y égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz $|\langle F_i, C_i \rangle| \leqslant \|F_i\| \, \|C_i\|$, ce qui équivaut à ce que C_i soit colinéaire à F_i pour tout i et donc que la famille $(C_1, \ldots, C_n)$ soit orthogonale (la réciproque est directe).

9. On a déjà pouvé que (3) implique (2). Si (2) est vérifié les colonnes sont orthogonales, ce qui mène à la relation $|\det(H_n)| = \|C_1\| \times \cdots \times \|C_n\|$.

Centrale 2.

$E=\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. on pose $\phi:\quad E^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(A,B)\longmapsto \operatorname{tr}\left(A^\top B\right)$$

1. Donner la définition d'une matrice orthogonale.

2. Montrer que ϕ est un produit scalaire. On pose $\|\cdot\|$ la norme associée.

3. Écrire une fonction moy (A, p) qui prend en argument une matrice orthogonale A générée aléatoirement par la fonction ortho(n), et qui calcule $\displaystyle\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1}A^k$.

4. Représenter graphiquement la suite $\displaystyle\left(\left\|\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1}A^k\right\|\right)_p$ pour $p\in[\![1,50]\!]$ et renvoyer les valeurs propres de A. Que conjecture-t-on ?

5. Donner la limite de la suite $\displaystyle\left((I_n-A)\left(\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1}A^k\right)\right)_p$.

Montrer alors la conjecture faite au 4), pour $A\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $1\notin\operatorname{Sp}(A)$.

6. Montrer que $\mathbb{R}^n=\ker(A-I_n)\overset{\perp}{\operatorname{Im}}(A-I_n)$.

7. Soit $X\in\mathbb{R}^n$. Donner la limite de la suite $\displaystyle\left(\left(\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1}A^k\right)X\right)$:

a. lorsque $X\in\ker(A-I_n)$;

b. lorsque $X\in\operatorname{Im}(A-I_n)$.

8. En déduire que $\displaystyle\left(\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1}A^k\right)$ converge vers la matrice d'une projection orthogonale dont on précisera le sous-espace sur lequel on projette. Démontrer la conjecture du 4 .

Les codes :

```
import numpy as np
import numpy.linalg as alg
import numpy.random as rd
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
def pscal(A,i,j):
    #calcule le produit scalaire des colonnes $i$ et $j$ de A
    return(sum(A[:,i]*A[:,j]))


def ortho(n):
    A=rd.random((n,n))
    for k in range(n):
        for j in range(k):
            A[:,k]=A[:,k]-pscal(A,k,j)*A[:,j]
        normec=pscal(A,k,k)**0.5
        A[:,k]=A[:,k]/normec
    return(A)

def moy(A,p):
    n=len(A)
    B=np.eye(n)
    C=np.eye(n)
    for k in range(1,p):
        B=np.dot(B,A)
        C=C+B
    return(C/p)

def test(A):
    vp=alg.eigvals(A)
    L=[]
    for p in range(1,51):
        B=moy(A,p)
        L.append(np.trace(np.dot(B.T,B))**0.5)
    return(vp,L)

A=ortho(5)
vp,L=test(A)
print(vp)
plt.plot(range(1,51),L)
plt.show()
```

Corrigé.

1.2 C'est du cours

5. Pour tout p on a

$$B_p = (I_n - A)\left(\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} A^k\right) = \frac{1}{p}\left(\sum_{k=0}^{p-1} A^k - \sum_{k=0}^{p-1} A^{k+1}\right) = \frac{1}{p}(I_n - A^p)$$

7.

Or $\forall p$ la matrice A^p est orthogonale donc $\|A^p\|^2 = \mathrm{tr}\left((A^p)^\top A^p\right) = \mathrm{tr}(I_n) = n$ et donc

$$\forall p^{\in}\mathbb{N}^*, \quad \|B_p\| \leqslant \frac{1}{p}(\|I_n\| + \|A^p\|) \leqslant \frac{2\sqrt{n}}{p}$$

et ainsi $\|B_p\| \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc la suite (B_p) converge vers la matrice nulle.

Si 1 n'est pas valeur prorpe de A alors $(I_n - A)$ est inversible et en considérant $(I_n - 1)^{-1} B_p$ on en déduit que $\left(\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} A^k\right)$ converge vers la matrice nulle.

6. Immédiatement $\dim\ker(A - I_n) + \dim\mathrm{Im}(A - I_n) = n$ par théorème du rang,

montrons que ces espaces sont orthogonaux : soit $X \in \mathrm{Ker}(A - I_n)$ (donc $X + AX$)

et $Y \in \mathrm{Im}(A - I_n)$, il existe Z tel que $Y = AZ - Z$. On a alors

$$\langle X, Y\rangle = \langle X, AZ - Z\rangle = \langle X, AZ\rangle - \langle X, Z\rangle = \langle AX, AZ\rangle - \langle X, Z\rangle = \langle X, Z\rangle - \langle X, Z\rangle = 0$$

où on a utilisé $\langle AX, AZ\rangle = \langle X, Z\rangle$ car A est orthogonale. Ainsi ces espaces sont orthogonaux et donc en somme directe, et on a bien $\mathbb{R}^n = \ker(A - I_n) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}(A - I_n)$.

7. Soit $X \in \mathbb{R}^n$.

a. Si $X \in \ker(A - I_n)$ alors $AX = X$ donc $A^k X = X$ pour tout X et la suite $\left(\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} A^k\right) X$ est constante égale à X, et donc convergente vers X.

b. Si $X \in \mathrm{Im}(A - I_n)$ il existe Y tel que $X = (A - I_n)Y$. Deux matrices qui sont des polynômes en A commutent, donc on obtient, pour tout p,

$$\left(\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} A^k\right) X = \left(\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} A^k\right)(A - I_n)Y = -(I_n - A)\left(\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} A^k\right) Y$$

qui converge vers le vecteur nul d'après la question 5 .

8. Soit $X \in \mathbb{R}^n$ que l'on écrit sous la forme $X = X_1 + X_2$ avec $X_1 \in \ker(A - I_n)$ et $X_2 \in \operatorname{Im}(A - I_n)$, alors par linéarité la suite $\left(\left(\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} A^k\right) X\right)$ converge vers X_1, et ainsi $\left(\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} A^k\right)$ converge vers la matrice de la projection orthogonale sur $\ker(A - I_n)$

La norme de cette matrice de projection est égale à la dimension de l'espace sur lequel on projette, c'est-à-dire le nombre de valeurs propres égales à 1 .

Centrale 2.

Soit $r \in \mathcal{C}^\infty([0,1], \mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On note

$$\mathcal{S}_\lambda = \left\{f \in \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R}) / \forall x \in [0,1], f''(x) + (\lambda - r(x)) f(x) = 0\right\}$$

On admet que pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ il existe une unique $f \in \mathcal{S}_\lambda$ tq $f(0) = \alpha$ et $f'(0) = \beta$, et on note y_λ la fonction telle que $y_\lambda(0) = 0$ et $y'_\lambda(0) = 1$.

1. Montrer que $\mathcal{S}_\lambda$ est un sev de $\mathcal{C}^2([0,1]\mathbb{R})$. On note $\phi : f \in \mathcal{S}_\lambda \mapsto (f(0), f'(0))$.

Montrer que ϕ est un isomorphisme et en déduire $\dim \mathcal{S}_\lambda$.

2. Soit $F_\lambda = \{f \in \mathcal{S}_\lambda / f(0) = f(1) = 0\}$.

Montrer que F_λ est de dimension finie, quelles informations a-t-on sur sa dimension ?

3. On dit que λ est valeur propre si $F_\lambda \neq \{0\}$. Montrer que λ est vp ssi $y_\lambda(1) = 0$.

4. En important les modules indiqués, on avait la fonction Phi(r, λ) qui renvoie $y_\lambda(1)$.

Tracer $\lambda \mapsto y_\lambda(1)$ sur $[1, 200]$ pour $r_1 = 0, r_2 : x \mapsto 10x$ et $r_3 : x \mapsto e^x$.

En déduire une conjecture sur les vp pour chaque r.

5. Tracer le graphe de $g : \mu \mapsto y_{\mu\pi^2}(1)$ sur $[1, 20]$ avec $r = 0$. Conjecture sur val prop ?

6. Démontrer la conjecture de la question 5 .

Les codes :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
import scipy.integrate as integr

def Phi(r,lb):
    def f(x,t):
        return(np.array([x[1],(r(t)-lb)*x[0]]))
    T=np.linspace(0,1,101)
    X=integr.odeint(f,np.array([0,1]),T)
    return(X[-1,0])

r1 = lambda t : 0
r2 = lambda t : 10*t
r3 = lambda t : np.exp(t)

f1 = lambda lb : Phi(r1,lb)
f1=np.vectorize(f1)
f2 = lambda lb : Phi(r2,lb)
f2=np.vectorize(f2)
f3 = lambda lb : Phi(r3,lb)
f3=np.vectorize(f3)

L=np.linspace(1,200,200)
plt.plot(L,f1(L),'r',L,f2(L),'b',L,f3(L),'g')
plt.show()

# M=np.linspace(1,20,10)
# plt.plot(M,f1(M*np.pi**2))
# plt.show()
```

Corrigé.

1. La fonction nulle est là. $\forall f, g \in \mathcal{S}_\lambda$ et $\alpha, \mu \in \mathbb{R}$, alors $\alpha f + \mu g$ est de classe $\mathcal{C}^2$ et vérifie l'équation différentielle, $\mathcal{S}_\lambda$ est un sev.

ϕ est clairt linéaire. Le réusltat admis (théorème de Cauchy linéaire) se traduit par le fait que ϕ est bijective. Ainsi ϕ est un isomorphisme, et donc $\dim \mathcal{S}_\lambda = \dim \mathbb{R}^2 = 2$.

2. Il est immédiat que F_λ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}_\lambda$. Il n'est pas égal à $\mathcal{S}_\lambda$ puisqu'il existe des éléments tels que $f(0) \neq 0$. Ainsi F_λ est de dimension 0 ou 1 .

3. Si $y_\lambda(1) = 0$ alors $y_\lambda \in F_\lambda$ (pas la fonction nulle) puisque $y'_\lambda(0) \neq 0$, et ainsi $F_\lambda \neq \{0\}$.

Réciproquement, s'il existe $z \in F_\lambda \backslash \{0\}$ alors $z'(0) \neq 0$

(car le seul élément de $\mathcal{S}_\lambda$ vérifiant $f(0) = f'(0) = 0$ est la fonction nulle)

et en posant $w = \frac{z}{z'(0)}$ on a $w(0) = 0$ et $w'(0) = 1$ donc $w = y_\lambda$ et $y_\lambda \in F$, et $y_\lambda(1) = 0$.

6. On conjecture que les valeurs propres sont les carrés des entiers.

Les solutions de $f''(x) + \lambda f(x) = 0$ dépendent du signe de λ :

si $\lambda = 0$, les solutions sont $x \mapsto \alpha x + \beta$, on a $y_\lambda : x \mapsto x$ n'apartient pas à F_0.

si $\lambda > 0$, on pose $\omega = \sqrt{\lambda}$, les sol sont $x \mapsto \alpha \cos(\omega x) + \beta \sin(\omega x)$ et on trouve $y_\lambda : x \mapsto \dfrac{\sin(\omega x)}{\omega}$, qui appartient à F_λ ssi ω est de la forme $k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, soit $\lambda = k^2\pi^2$.

si $\lambda < 0$, on pose $\omega = \sqrt{-\lambda}$, les sol sont $x \mapsto \alpha \operatorname{ch}(\omega x) + \beta \operatorname{sh}(\omega x)$ et on trouve $y_\lambda : x \mapsto \dfrac{\operatorname{sh}(\omega x)}{\omega}$, qui n'appartient pas à F_λ.

Ainsi les valeurs propres sont bien de la forme $k^2\pi^2$ avec $k \in \mathbb{N}^*$.

Centrale 2.

Soit, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, V(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ x_1 & \cdots & \cdots & x_n \\ \vdots & & & \vdots \\ x_1^{n-1} & \cdots & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on note $\alpha_k = V(1, 2, \dots, k)$.

Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un n-uplet de variables aléatoires i.i.d. sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$, et pour tout $\omega \in \Omega, \Delta_n(\omega) = (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$.

1. Donner l'expression de $V(x_1, \dots, x_n)$, donner une CNS pour que $V(x_1, \dots, x_n) \neq 0$.

2. Pour $n = 2$, donner la loi de Δ_2.

3. Écrire une fonction $V(L)$ renvoyant la valeur de V avec L une liste d'entiers.

4. Écrire une fct P(n) estimant la valeur de $P(V(\Delta_n) \neq 0\ )$ aves $N = 1000$ simulations.

5. Représenter les suites $\left(\frac{\sqrt{2\pi n}}{e^n}\right)_{n \in [\![2,12]\!]}$ et l'estimation de $(P(\Delta_n \neq 0))_{n \in [\![2,12]\!]}$.

Faire une conjecture.

6. Calculer $P\left(\Delta_n \neq 0\right)$ et prouver la conjecture.

7. Maintenant les variables i.i.d. X_k suivent une loi géom de param$p \in]0,1[$.

Écrire une fct Q(n, p) estimant la valeur de $P\left(V\left(\Delta_n\right) \neq 0\right)$ avec $N = 1000$ simulations.

8. Représenter $P\left(\Delta_2 \neq 0\right))$ pour $p \in [0,1;0,9]$.

Qu'observe-t-on lorsque le param$p$ devient proche de 0 ou de 1 ? Interpréter le résultat.

9. Calculer $P\left(X_1 = X_2\right)$ et en déduire $P\left(V\left(\Delta_2\right) \neq 0\right.$ en fonction de p.

Les codes :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
import matplotlib.pyplot as plt

def V(L):
    n=len(L)
    P=1
    for j in range(n):
        for i in range(j):
            P*=(L[j]-L[i])
    return(P)

def P(n):
    N=1000
    cpt=0
    for k in range(N):
        L=rd.randint(1,n+1,n)
        if V(L)!=0:
            cpt+=1
    return(cpt/N)

L1=np.arange(2,13)
L2=[P(n) for n in L1]
L3=(2*np.pi*L1)**0.5*np.exp(-L1)
# plt.plot(L1,L2,'r',L1,L3,'b')
```

```
# plt.show()

def Q(n,p):
    N=1000
    cpt=0
    for k in range(N):
        L=rd.geometric(p,n)
        if V(L)!=0:
            cpt+=1
    return(cpt/N)

f = lambda p: (2-2*p)/(2-p)
Lp=np.linspace(0.1,0.9,50)
Q2=[Q(2,p) for p in Lp]

# plt.plot(Lp,f(Lp),Lp,Q2)
# plt.show()

g = lambda p: 1-3*p/(2-p)+2*p**2/(3-3*p+p**2)
Q3=[Q(3,p) for p in Lp]

# plt.plot(Lp,g(Lp),Lp,Q3)
# plt.show()
```

Corrigé.

1. Pour tout $(x_1,\ldots,x_n)$ on a $V(x_1,\ldots,x_n)=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)$.

Ce déterminant est non nul ssi les (x_i) sont deux à deux distincts.

2. On a $\Delta_2(\Omega)=\{((1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$ et Δ_2 suit une loi uniforme, chaque couple est atteint avec une probabilité $\frac{1}{4}$.

6. Soit n fixé, pour tout $k\geqslant 1$, on note A_k l'événement : $X_1,\ldots,X_k$ sont tous distincts, de sorte que A_n coïncide avec l'événement $V(\Delta_n)\neq 0$, et on cherche obtenir une formule de

récurrence : pour tout $k\in [\![1,n-1]\!]$, on a $P(A_{k+1})=P(A_k)P(A_{k+1}\mid A_k)$, avec

$$P(A_{k+1}\mid A_k)=P(X_{k+1}\notin\{X_1,\ldots,X_k\}\mid X_1,\ldots,X_k\text{ tous distincts })=\frac{n-k}{n}$$

Ainsi

$$P(A_n) = \frac{1}{n} P(A_{n-1}) = \frac{1}{n}\frac{2}{n} P(A_{n-2}) = \cdots = \frac{(n-1)!}{n^{n-1}} P(A_1) = \frac{n!}{n^n}$$

et donc par formule de Stirling on a bien $P(V(\Delta_n) \neq 0) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2\pi n}}{e^n}$.

8. On observe que lorsque $p \to 1$, la probabilité tend vers 0 .

En effet, il devient presque sûr que X_1 et X_2 vont valoir 1 et seront donc égales.

Lorsque $p \to 0$, la probabilité se rapproche de 1. En effet dans ce cas les variables X_1 et X_2 vont prendre des valeurs très grandes, et dont il est peu probable qu'elles soient égales.

9. Notons $q = 1 - p$. On a

$$P(X_1 = X_2) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X_1 = k, X_2 = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X_1 = k) P(X_2 = k)$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X_1 = k, X_2 = k) \left(pq^{k-1}\right)^2 = p^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \left(q^2\right)^{k-1} = \frac{p^2}{1-q^2} = \frac{p}{1+q} = \frac{p}{2-p}$$

et donc $P(V(\Delta_2) \neq 0) = 1 - \frac{p}{2-p} = \frac{2-2p}{2-p}$.

On retrouve les résultats conjecturés et on peut tracer le graphe de $p \mapsto \frac{2-2p}{2-p}$.

Centrale 2.

Soit $r > 0$, $\mathcal{F}_r$ l'ens des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ n'ayant aucune racine sur le cercle $\mathcal{C}(0, r)$.

Pour $f \in \mathcal{F}_r$ on définit $N_r(f) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{f'(re^{it})}{f(re^{it})} re^{it} \, \mathrm{d}t$.

1. Montrer que si $f, g \in \mathcal{F}_r$ alors $fg \in \mathcal{F}_r$ et $N_r(fg) = N_r(f) + N_r(g)$.

2. Soit $h \in \mathcal{F}_r$ de degré 1 , montrer que $\overline{N_r(h)} = N_r(h)$ (on donne le changement de variable $s = 2\alpha - t$, où α est un argument de la racine de $h, \alpha = 0$ si la racine est nulle).

En déduire que pour tout $f \in \mathcal{F}_r, N_r(f) \in \mathbb{R}$.

3. Écrire une fonction Nb(f, r) donnant le nombre de racines du polynôme f étant en dehors du disque fermé $D(0, r) = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leqslant r\}$. Tester avec Polynomial([0,1,2,2]).

4. On dispose d'une fonction N(r, f) qui renvoie $N_r(f)$. Écrire une fonction d'argument r qui calcule un polynôme aléatoire (on le prendra de degré $d \in [\![1, 10]\!]$ et de coefficients

entiers appartenant à $[\![-9,9]\!]$), vérifie s'il appartient à $\mathcal{F}(r)$ et renvoie son degré et les nombres $N_r(f)$ et $Nb(r,f)$. Conjecturer un résultat.

5. On suppose que $\omega \notin D(0,r)$, montrer que sur $D(0,r), f : z \mapsto \dfrac{z}{z-\omega}$ coïncide avec la somme d'une série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$.

6. Soit $\omega \notin D(0,r), \varphi : z \mapsto z-\omega$. Calculer $N_r(\varphi)$.

7. On suppose maintenant que $\omega \in D^\circ(0,r) = D(0,r)\backslash\mathcal{C}(0,r)$, montrer que $f : z \mapsto \frac{z}{z-\omega}$ coïncide, pour z tel que $|z| \geqslant r$, avec la somme d'une série du type $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{a_n}{z^n}$.

8. Soit $\omega \in D^\circ(0,r), \varphi : z \mapsto z-\omega$. Calculer $N_r(\varphi)$.

9. Démontrer finalement la conjecture du 4 .

Les codes :

```
import numpy as np
from numpy.polynomial import Polynomial
import scipy.integrate as integr
import numpy.random as rd

def N(r,f):
    f1=f.deriv()
    g = lambda t : (f1(r*np.exp(1j*t))/f(r*np.exp(1j*t))*r*np.exp(1j*t)).real
    return(1/(2*np.pi)*integr.quad(g,0,2*np.pi)[0])

f=Polynomial([0,1,2,2])

def Nb(f,r):
    L=f.roots()
    s=0
    for k in L:
        if abs(k)>r:
            s+=1
    return(s)

def F(r):
    correct=False
    while not correct:
```

```
        d=rd.randint(1,11)
        L=rd.randint(-10,10,d+1)
        p=Polynomial(L)
        racines=p.roots()
        correct=True
        for z in racines:
            if abs(z)==r:
                correct=False
    return(p)

def testpolynome(r):
    f=F(r)
    return(f.degree(),Nb(f,r),N(r,f))
```

Corrigé.

1. Si $f, g \in \mathcal{F}_r$ alors pour tout $z \in \mathcal{C}(0,r)$ on a $f(z) \neq 0$ et $g(z) \neq 0$ donc $fg(z) \neq 0$ et ainsi fg $\in \mathcal{F}_r$. De plus pour tout $z \notin \mathcal{C}(0,r)$ on a

$$\frac{(fg)'(z)}{fg(z)} = \frac{f'(z)g(z) + f(z)g'(z)}{f(z)g(z)} = \frac{f'(z)}{f(z)} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

donc par linéarité de l'intégrale on obtient bien $N_r(fg) = N_r(f) + N_r(g)$.

2. On écrit $h = aX + b = a(X - c)$ avec $(a,c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$, et $c = \rho e^{i\alpha}$ où $\rho \in \mathbb{R}_+$. On obtient alors

$$N_r(h) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a}{a\left(re^{it} - \rho e^{i\alpha}\right)} re^{it}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{re^{it}}{re^{it} - \rho e^{i\alpha}} \mathrm{d}t$$

Suivons l'indication et posons $s = 2\alpha - t$, on obtient

$$N_r(h) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\alpha}^{2\alpha-2\pi} \frac{re^{i(2\alpha-s)}}{re^{i(2\alpha-s)} - \rho e^{i\alpha}} (-\mathrm{d}s) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\alpha-2\pi}^{2\alpha} \frac{re^{-is}}{re^{-is} - \rho e^{-i\alpha}} \mathrm{d}s$$

La fonction étant 2π-périodique et intégrée sur une période, on peut ramener à une intégrale sur $[0, 2\pi]$ et on obtient

$$N_r(h) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{re^{-is}}{re^{-is} - \rho e^{-i\alpha}} \mathrm{d}s = \overline{N_r(h)}$$

et ainsi $N_r(h)$ est réel.

Soit $f \in \mathcal{F}(r)$. Si f est constant on a $N_r(f) = 0 \in \mathbb{R}$. Si f est de degré $d \geqslant 1$ on peut écrire $f = \prod_{k=1}^{d} h_k$ où les h_k sont de degré 1 (éventuellement identiques), on obtient par récurrence à

partir de la question 1 que $N_r(f) = \sum_{k=1}^{d} N_r\left(h_k\right) \in \mathbb{R}$ puisque $N_r\left(h_k\right) \in \mathbb{R}$ pour tout k.

5. Pour tout $z \neq \omega$ on a $f(z) = \frac{z}{z-\omega} = \frac{-z}{\omega} \frac{1}{1-\frac{z}{\omega}}$. Pour tout z tel que $|z| < |\omega|$, et donc en particulier sur $D(0, r)$ on a

$$f(z) = \frac{-z}{\omega} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z}{\omega}\right)^k = -\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z}{\omega}\right)^{k+1} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^k}{\omega^k}$$

6. On voit que dans la calcul de $N_r(\varphi)$, la fonction intégrée est $f\left(re^{it}\right)$ où f est la fonction ci-dessus.

Or la série entière ci-dessus a pour rayon de convergence $|\omega|$ et donc converge normalement sur $D(0, r)$.

On en déduit qu'il y a convergence normale sur $[0, 2\pi]$ de la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \frac{\left(re^{it}\right)^n}{\omega^n}$ et on peut donc intervertir somme et intégrale (remarque : c'est bien le thm du premier chapitre ici, pas le théorème d'intégration terme à terme ou le TCD) et on obtient

$$N_r(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(re^{it}\right)^n}{\omega^n} = -\frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n}{\omega^n} \int_0^{2\pi} e^{int} \, \mathrm{d}t$$

Or pour tout entier n non nul on a $\int_0^{2\pi} e^{int} \, \mathrm{d}t = 0$ (vrai aussi si $n < 0$; si $n = 0$ on obtient 2π) et ainsi $N_r(\varphi) = 0$.

7. On écrit cette fois, pour tout z tel que $|z| > |\omega|$,

$$f(z) = \frac{z}{z-\omega} = \frac{1}{1-\frac{\omega}{z}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\omega^n}{z^n}$$

8. Puisque $|\omega| < r$ il y a convergence de $\sum_{n \geqslant 0} \frac{\omega^n}{r^n}$ et donc convergence normale sur $[0, 2\pi]$ de $\sum_{n \geqslant 0} \frac{\omega^n}{\left(re^{i\theta}\right)^n}$ et donc par interversion on obtient

$$N_r(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\omega^n}{\left(re^{i\theta}\right)^n} \int_0^{2\pi} \frac{r^n}{\omega^n} \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{int} \, \mathrm{d}t = 1$$

puisque tous les termes s'annulent sauf celui pour $n = 0$.

9. Soit $f \in \mathcal{F}(r)$ de degré d, que l'on écrit sous la forme $f = c\prod_{k=1}^{d}\varphi_k$ avec $\varphi_k = X - \omega_k$. On a déjà remarqué que $N_r(f) = \sum_{k=1}^{d} N_r(\varphi_k)$ et pour tout k on a $N_r(\varphi_k) = 0$ si $|\omega_k| > r$ et 1 si $|\omega_k| < r$.

Ainsi $N_r(f)$ donne le nombre de racines (comptées avec multiplicité) de module $|r|$.

Maintenant Centrale 2 extérieur Beos

Centrale 1 extérieur

Exo 8 feuille 12 béton...

Centrale 2 extérieur

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $(u_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_0(a) = a$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1}(a) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{u_n(a)}{1+\sqrt{1+u_n(a)^2}}\right)$$

1-Coder la fonction Suite (a, N) qui renvoie la liste des N premiers termes de $(u_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$.

Calculer Suite(0,5) et Suite(4,10).

2-Calculer : Suite(-1,10), Suite(6,10), Suite(10,10).

Émettre une conjecture (C_1) sur la suite $(u_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$.

3-Calculer les 10 premiers termes de $(2^n u_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ pour différentes valeurs de $a \in \mathbb{R}$.

Émettre une conjecture (C_2) sur la suite $(2^n u_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$.

4-Tracer la fonction $a \mapsto 22^{10} u_{10}(a)$ pour $a \in [-30, 30]$.

5-Montrer l'assertion suivante : $\forall x \in \mathbb{R}, |\operatorname{Arctan}(x)| \leqslant |x|$, démontrer (C_2).

6-Préciser la nature des séries suivantes :

$$\sum u_n(a), \sum u_n^2(a), \sum \ln\left(\frac{2u_{n+1}(a)}{u_n(a)}\right)$$

7-En déduire une preuve de la conjecture (C_2).

Sol : peut-être...

Clavaudbis

```
# Pg qui compte à chaque fois que la somme des dés = nb étudié (en passant par les encad
def f(x,y): # x le nb étudié, y le nb de dés
    a=[]
    c=0 # compteur
    for i in range(y-1):
        a.append(1) # liste de longeur y-1 (modif de boucle), correspondant à la combina
    while a[0]!=7:
        # quand le dé num 0 arrive à 7 le pg est fini car le pg a balayé tts les combina
        m=0 # somme des dés
        for j in range(y-1):
            m+=a[j]
        if m>=x-6 and m<=x-1: #modif comme vous l'avez demandé pour faire baisser le nb
            c+=1
        a[y-2]+=1 # on augmente de 1 le dernier dé
        for k in range(1,y-1):
            # dès que l'on arrive à 7 pour un dé, on le %6, et on ajoute la retenue au p
            if a[y-k-1]==7:
                a[y-k-1]=1
                a[y-k-2]+=1
    return(c,6**y) # le deuxième terme est le nb de combinaisons totales

# Pour 5 dés et 13 :
# au premier tour : a=[1,1,1,1] ; m=4 ; on ne pourra pas atteindre x avec le dernier dé
# au second tour : a=[1,1,1,2] ; m=5 ; ...
# au 6ème tour : a=[1,1,1,6] ; m=9 ; on pourra atteindre x avec le dernier =à 4 ; c++
# au 7ème tour : a=[1,1,2,1] ; m=5 ; ...
# ...
# au dernier tour : a=[6,6,6,6] ; m=24 ; ...
# en ajoutant 1 on a : a=[7,1,1,1] ==> pg stop

# à chaque fois on ajoute 1 à a (initialisé par [1,1,1,1]) qui pourrait être assimilé à
```

Exo equa diff relevés Centrale... :

Exercice (oral Centrale/Supélec) :

Soit $q : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^{-*}$ continue strictement négative.

On s'intéresse aux solutions sur $\mathbb{R}^+$de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_q) : y'' + q(x)y = 0$.

Soit $y_1 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ la solution vérifiant $\begin{cases} y_1(0) = 1 \\ y_1'(0) = 1 \end{cases}$

Question 1 :

Mq la fonction y_1 est strictement positive, strictement croissante et convexe sur $\mathbb{R}^+$.

Question 2 :

Démontrer que la fonction $\dfrac{1}{y_1^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Question 3 :

Montrer que la fonction

$$y_2 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, x \mapsto y_1(x) \int_x^{+\infty} \frac{dt}{y_1^2(t)}$$

est une solution de $(\mathcal{E}_q)$.

Question 4 :

Les fonctions y_1 et y_2 forment-elles un sytème fondamental de solutions de $(\mathcal{E}_q)$?

Question 5 :

Étudier le sens de variation de y_2. En déduire que y_2 possède une limite finie en $+\infty$.

Question 6 :

Parmi les solutions de $(\mathcal{E}_q)$ sur $\mathbb{R}^+$, quelles sont celles qui sont bornées sur $\mathbb{R}^+$?

Question 7 :

On supppose que q est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que $y_2'(x) \xrightarrow{+\infty} 0$.

Sol : On pose $z = y_1 y_1'$. On a donc :

$$z' = (y_1')^2 + y_1 y_1'' = (y_1')^2 - q y_1^2 \geqslant 0$$

Q1 Ainsi z est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

On en déduit : $\forall x \geqslant 0, y_1(x) y_1'(x) \geqslant 1$.

Ainsi y_1 et y_1' ne peuvent pas s'annuler sur $\mathbb{R}^+$.

Étant continues, elles restent strictement positives.

Ainsi y_1 est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

Comme $y_1'' = -qy_1 > 0$, la fonction y_1 est convexe.

Q2 Comme la fonction y_1 est convexe :

$$\forall x \geqslant 0, y_1(x) \geqslant y_1'(0)x + y_1(0) = x + 1 > 0$$

Donc : $\forall x \geqslant 0, 0 < \dfrac{1}{y_1^2(x)} \leqslant \dfrac{1}{(1+x)^2}$

Q3 FACILE

Q4 Réponse oui. La fonction y_2 ne peut en effet être colinéaire à y_1 car

$$\int_x^{+\infty} \frac{dt}{y_1^2(t)} \overset{x \to +\infty}{\to} 0.$$

Q5 On sait que $y_2 > 0$ et $y_2'' > 0$.

Donc la fonction y_2' est croissante et :

$$\begin{aligned} y_2'(x) &= y_1'(x) \int_x^{+\infty} \frac{dt}{y_1^2(t)} - \frac{1}{y_1(x)} \\ &= \int_x^{+\infty} \frac{y_1'(x)dt}{y_1^2(t)} - \frac{1}{y_1(x)} \\ &\leqslant \int_x^{+\infty} \frac{y_1'(t)dt}{y_1^2(t)} - \frac{1}{y_1(x)} \\ &= \left[\frac{1}{y_1(t)}\right]_x^{+\infty} - \frac{1}{y_1(x)} = 0 \end{aligned}$$

Conclusion : y_2 est décroissante (et positive) sur $\mathbb{R}^+$;

elle possède donc une limite finie en $+\infty$.

Q6 Il est clair que la fonction y_2 est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

En revanche la fonction y_1 ne l'est pas car elle tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

Les solutions bornées de $(\mathcal{E}_q)$ sont les fonctions proportionnelles à y_2.

Q7 On a l'égalité $y_2'' = -qy_2$.

Ensuite q est intégrable sur $\mathbb{R}^+$et y_2 est bornée.

On peut donc conclure que y_2'' est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Donc y_2' possède une limite finie L en $+\infty$.

Si L était non nulle, alors y_2 aurait $\pm\infty$ comme limite en $+\infty$ et ce n'est pas le cas.

Soit f, continue et intégrable sur $\mathbb{R}$.

Soit $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des solutions de $\mathbb{R}$ de $(E) : y'' + f(x)y = 0$.

1. Montrer que si y_1, y_2 sont dans $\mathcal{S}(E)$ alors $z = y_1'y_2 - y_1y_2'$ est constante.

2. On suppose que (E) admet une solution $x \mapsto y(x)$ bornée sur $\mathbb{R}$.

Montrer alors $\lim\limits_{x\to+\infty} y'(x) = 0$.

3. Montrer que (E) admet une solution non bornée.

Sol :

1. La fonction z est constante sur $\mathbb{R}$. En effet :

$$z' = (y_1''y_2 - y_1y_2'') = -fy_1y_2 + y_1fy_2 = 0$$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} y'(x) &= y'(0) + \int_0^x y''(t)\mathrm{d}t \\ &= y'(0) - \int_0^x f(t)y(t)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Mais $t \mapsto y(t)$ est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

De plus $t \mapsto f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Ainsi $t \mapsto f(t)y(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

On en déduit l'existence de la limite finie :

$$\ell = \lim_{+\infty} y'(x) = y'(0) - \int_0^{+\infty} f(t)y(t)\mathrm{d}t$$

Par l'absurde, supposons $\ell \neq 0$, par exemple $\ell > 0$.

Alors : $\exists A \in \mathbb{R}^+, \forall x \geqslant A, y'(x) \geqslant \frac{\ell}{2}$.

Alors, pour tout $x \geqslant A$:

$$\begin{aligned} y(x) &= y(A) + \int_A^x y'(t)\mathrm{d}t \\ &\geqslant y(A) + (x - A)\frac{\ell}{2} \end{aligned}$$

ce qui contredit le caractère borné de y.

3. Par l'absurde, on suppose que toutes les fonctions $y \mapsto y(t)$ de $\mathcal{S}(E)$ sont bornées.

Ainsi, d'après ce qui précède, toutes ces solutions tendent vers 0 en $+\infty$.

Pour toutes y_1, y_2 dans $\mathcal{S}(E)$, on sait que $z = y_1'y_2 - y_1y_2'$ est constante.

De plus z tend vers 0 en $+\infty$.

Il en résulte que z est identiquement nulle.

Si $y_2 \neq 0$, tous les éléments y_1 de $\mathcal{S}(E)$ sont alors proportionnels à y_2 sur $\mathbb{R}$.

Mais cela contredit le fait que $\mathcal{S}(E)$ est un plan vectoriel.