RMS mines
PSI *
Année 2022

Année 3.

Comparer avec rms pdf...

Erreur j'ai mis des corrigés ds rms mines 2022...

Algèbre

672. Aujourd'hui, nous sommes le vendredi ler juillet. Quel jour sera t-on le 1er juin 2023 ?

Sol exo de dernière minute, congruence avec soustraction.

673. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique.

Soit $v_0 = \overrightarrow{0}$ de $\mathbb{R}^n$. Soient $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ tels que $\|v_i - v_j\| \in \mathbb{Q}$ pour tous $i, j \in [\![0, n]\!]$.

Montrer qu'il existe une relation de dépendance non triviale entre les v_i,

pour $i \geqslant 1$, et à coefficients rationnels.

Sol : D'abord énoncé faux, mal retranscrit ?

Contre exemple : $a = (3, 0), b = (3, 4)$.

Je modifie l'énoncé pour le rendre crédible :

On prend $n + 1$ vecteurs au lieu de n, la famille est liée car $n + 1$ vecteurs en dim n.

Maintenant on peut prouver qu'il y a une dépendance à coeff $\mathbb{Q}$.

Car tous les produits scalaires $< v_i, v_j >$ sont rationnels par polarisation.

Ainsi la matrice de Gram (qui a même rang que le syst) est de déterminant nul à coeff $\mathbb{Q}$.

Où est le lapin ?

674. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer $\exists! Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q(0) = 0$ et $Q(X + 1) - Q(X) = P(X)$

Sol (il y en a d'autres)

Soit $f : \mathbb{R}_{n+1}[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ linéaire définie par $f(Q) = Q(X+1) - Q(X)$.

Son noyau est $< 1 >$. Donc surjective par thm du rang.

L'ensemble des sol de $f(Q) = P$ est une vla dirigée par le noyau précédent.

La clause $Q(0) = 0$, entraine l'unicité.

675. Soit $P \in Q_n[X]$. Montrer l'équivalence entre les propriétés :

i) pour tout $k \in \mathbb{Z}, P(k) \in \mathbb{Z}$,

ii) pour tout $k \in [\![0, n]\!], P(k) \in \mathbb{Z}$,

iii) il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que, pour tout $k \in [\![m, m+n]\!], P(k) \in \mathbb{Z}$.

Ind. On pourra introduire les polynômes $H_k = \dfrac{1}{k!} X(X-1)\cdots(X-k+1)$.

Rq préalable , le produit de k entiers successifs est un multiple de $k!$ (*), car $\dbinom{n}{k}$ entier.

La famille $(H_k)_0^n$ est échelonnée en degrés, donc libre et base.

i) entraine ii) est évident.

Si ii) $P = \displaystyle\sum_0^n a_k H_k$, par rec immédiate en appliquant sur les entiers

de 0 à n on obtient que les $(a_k) \in \mathbb{Z}$. Donc iii) est établie (*).

Si iii) on change en décalant les H_k et rebelote.

676. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré au moins 2 .

a) On suppose que P est de la forme $P = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (X - \lambda_k)^{\alpha_k}$,

où les λ_k sont dans $\mathbb{R}$ et les α_k dans $\mathbb{N}^*$. Montrer que $\dfrac{P'}{P} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{X - \lambda_k}$.

b) On suppose que P est scindé sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $P'(x) = 0$ et $P(x) \neq 0$.

Montrer que $P''(x)P(x) < 0$.

c) Soient x_1 et x_2 deux racines consécutives de P. Montrer que $P'(x_1)\,P'(x_2) \leqslant 0$.

d) Soient a et b des réels distincts tels que $P-a$ et $P-b$ sont scindés sur $\mathbb{R}$.

Montrer que P' est scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples.

Sol : a) il suffit de connaitre la dérivée d'un produit de n fonctions.

b) On dérive a) on évalue en x et on utilise α_k positifs.

c) Le $\leqslant$ vient du fait qu'on peut avoir des racines multiples.

Plan , on raisonne si les racines sont 2 à 2 distinctes, on peut se ramener à ce cas.

Par Rolle , les $n-1$ racines de P' s'entrelacent avec celles de P.

Donc P' est scindé à racines distinctes, bref change de signe à chaque racine.

Faire un tableau de variations si besoin.

d) Voir Monnier, j'ai fait çà il y a qcq années.

Sol bis voir centrale mp 2019 944 corr RMs ? oui ? non !

677. Soit $E = \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{C})$. Pour $k \in \mathbb{N}$, soit $f_k : x \mapsto x^k e^{\frac{i}{x}}$.

Pour $f \in E$, soit $\varphi(f) : x \mapsto x^2 f'(x) - (2-i)f(x)$.

a) Calculer $\varphi(f_k)$ pour $k \in \mathbb{N}$. Vérifier que $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est libre.

L'endomorphisme φ est-il injectif ?

b) Pour $\ell \in \mathbb{N}$, soit $F_\ell = \operatorname{Vect}(f_0, f_1, \ldots, f_\ell)$.

Déterminer le rang de l'application $f \in F_\ell \mapsto \varphi(f) \in F_{\ell+1}$.

c) Montrer que f_n est prolongeable par continuité en 0 ssi $n \geqslant 1$.

Donner une cns pour que f_n soit dérivable en 0. Montrer que f_n est alors de classe $\mathcal{C}^1$.

Exo ss intérêt...

a) Libre car échelonné...Endo " évident " .

$\varphi(f_k) = [kx - 2]f_k$.

Pour le noyau, on résout l'équa diff, $\lambda.exp\left(\frac{i}{x} - \frac{2}{x}\right)$.

b) L'application linéaire découle du calcul du a).

$F_\ell \cap \ker(\varphi)$ réduit au nul donc injectif, thm du rang, rg $= n + 1$.

c) La seule chose à savoir est que $\cos(1/x)$ non cie en 0.

678. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Soient p, q, r trois projecteurs de E.

On suppose que $p + \sqrt{2}q + \sqrt{3}r$ est un projecteur.

a) Montrer que la trace d'un projecteur est un entier naturel.

b) Montrer que $q = r = 0$.

Sol : a) Pour un projecteur trace égal rang.

b) En notant p, q, r les rangs, on a $p + \sqrt{2}q + \sqrt{3}r \in \mathbb{N}$.

Si $r \neq 0$, $(p + \sqrt{2}q)^2 = 3r^2$, donc $2p\sqrt{2}q \in \mathbb{N}$.

Or $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, donc $pq = 0$.

Si $q = 0$, on remplace rebelote et impossible.

Si $p = 0$, "pareil".

Si $r = 0$, "pareil".

Exo stupide et hors programme.

679. $n \in \mathbb{N}^*$, $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Mq $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), AMB = 0\}$ sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Dimension ?

L'ensemble est clairement stable par comb lin.

Par les matrices des endos associés à M, mais pas la $\widehat{m}$ base au départ et à l'arrivée.

Au départ, base adaptée à $Im(B) \oplus G$.

Arrivée, base adaptée à $ker(A) \oplus G"$.

Les matrices sont alors : $\left(\begin{array}{c|c} X & Y \\ \hline 0 & Z \end{array}\right)$

Par isom matriciel, la dimension est $n^2 - r_A.r_B$.

680. La relation $\cong$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $A \cong B$ s'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tq $A = PB$.

a) Montrer que $\cong$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b) Caractériser les classes d'équivalence de $\cong$.

Sol : a) réflexive avec $P = I_n$, transitive car le produit de deux inversibles est inversible.

Symétrique car l'inverse d'une inversible l'est aussi...

b) Une CN immédiate est l'égalité des noyaux.

La réciproque est vraie, on procède par blocs avec bases adaptées et on bidouille P.

Ou encore $E = S \bigoplus \text{ker}$.

Les endos sont nuls sur ker , on prend une base adaptée.

$B = P'J_rQ$, $A = P"J_rQ$, (inversibles) on peut forcer la même Q car même noyau.

Et ce Q est la matrice de passage de départ vers adaptée.

Notre pb revient à $A = P"J_rQ = PP'J_rQ$, il suffit de prendre $P = P"(P')^{-1}$.

681. Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

a) Soit A telle que $A^p = 0$ et $A^{p-1} \neq 0$. Montrer que A est semblable à J.

b) Soit A telle que $A^p = 0$ et rang $(A) = p - 1$. Montrer que A est semblable à J.

Sol hyper classique.

a) Soit f l'endo associé canoniquement, $\exists \overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$ tel que $f^{p-1}(\overrightarrow{a}) \neq \overrightarrow{0}$.

La famille $(\overrightarrow{a}, f(\overrightarrow{a}), ..., f^{p-1}(\overrightarrow{a}))$ est une base, (par l'absurde, pas par rec).

Pour avoir J , on range les vecteurs en sens inverse.

b) Pour débuter la dimension du noyau de f est 1 par thm du rang.

La suite des images est strictement décroissante, puis stagnantes (vu en cours).

On va se ramener au a), par absurde si $A^{p-1} = 0$, la suite des rangs part de $p - 1$

et est strictement décroissante jusqu'à 0.

Mais on devrait baisser à un moment de 2, c'est impossible car $\widetilde{A} : Im(A^s) \to Im(A^{s+1})$.

Possède pour noyau $\ker(A) \cap Im(A^s)$ de dimension au plus 1.

682.E un ev, $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice p et S un sev E stable par u avec $E = \operatorname{Im}(u)+S$.

a) Montrer que, pour tout $k \geqslant 1, E = \operatorname{Im}\left(u^k\right) + S$.

b) En déduire que $S = E$.

Sol Clair ?

683. a) Étudier $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}^*$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{1}{u_n}\right)$.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $N \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telle que $N^p = 0$. On pose $A = I_p + N$.

b) Montrer que A est inversible.

c) Justifier l'existence et étudier la suite de matrices $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$M_0 = A$ et $\forall n \in \mathbb{N}, M_{n+1} = \frac{1}{2}\left(M_n + M_n^{-1}\right)$.

Sol : a) Suite rec de première année, la fonction est impaire avec $\mathbb{R}_*^+$ et $\mathbb{R}_*^-$

stables par f, donc l'étude à droite est la même que à gauche.

Seul point fixes sur $\mathbb{R}_*^+$, $L = 1$, un tableau de variat prouve facilement que,

où que soit u_0, u_1 sera dans $[1, +\infty[$ qui est stable par f.

Sur cet intervalle, f est croissante (donc (u_n) monotone), mais f est dominée par $x \mapsto x$.

Suite décroissante minorée par 1, elle cv, f cie, donc la limite est un pt fixe $L = 1$.

b) On trigonalise N dans cette base (det inchangé) $\det(A) = 1$.

c) Attention à ne pas faire trop sourire le jury...

Le déterminnant n'est pas additif, les monotonies de matrices sont...

Bref on se méfie, classique : $A^{-1} = I - N + N^2 - ... + (-1)^{p-1}A^{p-1}$.

Donc $M_1 = I + N''$, avec $N" = (1/2)(N^2 - N^3 + ...)$ qui est elle même nilpotente.

Bref on est revenu au cas précédent, l'existence est avérée.

La suite cv vers I car à chaque étape $M_j = I + NN$, avec NN qui commence par $N^{(2^j)}$.

684. Soient $E = \mathbb{R}_3[X], A = X^4 - 1$ et $B = X^4 - X$.

Pour $P \in E$, on note $f(P)$ le reste de la division euclidienne de AP par B.

a) Montrer que f est un endomorphisme.

b) Déterminer Ker f et calculer le rang de f.

c) Étudier la diagonalisabilité de f.

Sol : exo technique et limite pour PCSI.

a) La linéarité n'est pas dur mais il faut respecter l'objet en prouvant

que le reste dû à une comb lin est la comb lin des restes.

L'aspect endo vient du degré du reste avec div euclidienne

b) On écrit $AP = QB + 0$, soit $(X^4 - 1)P = QX(X^3 - 1)$, on simplifie par $X-1$, on évalue en 0 et en j,

il vient $P \in < X(X^2+X+1) >$, thm rang , le rang vaut 3 car E de dim 4.

Rq : j'ai évité l'arithmétique des polynômes.

c) On écrit l'équation pour vp et vp $\lambda \neq 0$... :

$(X^4-1)P = X(X^3-1)Q + \lambda P$, soit $(X^4-1-\lambda)P = X(X^3-1)Q$.

Si on ouvre très bien les yeux, P colinéaire à X^3-1, on le teste, -1 est vp.

Mais le ss esp propre est une droite, donc non Dz sur $\mathbb{R}$.

Rq par des moyens inavouables, $\chi(f) = X^4+4X^3+6X^2+3X$, non scindé sur $\mathbb{R}$.

685. Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $A = \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta & \alpha\gamma \\ \alpha\beta & \beta^2 & \beta\gamma \\ \alpha\gamma & \beta\gamma & \gamma^2 \end{pmatrix}$ et f l'endo associé à A.

a) Montrer qu'il existe un vecteur colonne C tel que $A = CC^T$.

b) Déterminer le noyau et l'image de A.

c) Chercher les éléments propres de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?

d) Retrouver le résultat en remarquant que f est proportionnel à un projecteur.

Sol : a) $C = (\alpha, \beta, \gamma)^T$, non nul sinon tout est trivial.

b) Le rang vaut 1, colonne prop à C, noyau est un plan par thm rang.

$Im(A) = < C >$, $\ker(A) = (< C >)^{\perp}$, par inculsion et égalité dimensionnelle.

c) On a déjà 0 comme vp double, associée à un plan.

On regarde l'image de C , c'est $tr(A)C$.

Bref un nouvelle vp $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ avec sa droite propre, dz.

d) $A^2 = tr(A)A$ et hop.

686. Soit $f : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M + M^T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b) Montrer que f est diagonalisable et donner ses espaces propres.

Sol exo facile, somme directe des matrices sym et anti sym, vp 2 et 0.

687. Trouver l'image de $\varphi : M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mapsto M^3$.

Attention ce n'est pas linéaire.

On commence par des remarques :

Cet ensemble est stable par multiplication par un réel, il suffit de prendre la racine tierce de ce réel(*).

Cet ensemble est stable par similitude, car $A^3 = M = QBQ^{-1}$.

Entraine, $(B = Q^{-1}AQ)^3$.

Les DZ réelles ont des antécédents.

Les nilpotentes non, car par l'absurde $A^3 = N \neq 0$ donne A nilpotente d'indice supérieur à 3 en dim 3...

Pour le reste : il y a une vp réelle car dim impaire.

Si elle est simple, on peut réduire en $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & b & a \\ 0 & d & c \end{pmatrix}$.

Si $b = c, d = 0$, il est facile de tver un racine tierce, a qcq.

Sinon, on calcule le poly caract de la 2.2, si les racines sont complexes conjuguées,

On se ramène à 2 exp conjuguées grâce à (*).

On peut DZ ($\mathbb{C}$), il est alors facile de tver une racine tierce ($\mathbb{C}$),

en divisant les angles par 3.

Je garde les mêmes matrices de passages sur les côtés, les vect pro sont conjugués,

donc la nouvelle est tjs réelle, racine tierce, mais pas forcément diag.

688. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente et $P \in \mathbb{C}[X]$.

a) Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ et $M = A + \lambda I_n$. Mq $P(M)$ est dz ssi $P(M)$ est une matrice scalaire.

b) Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dz telle que $AB = BA$. On pose $M = A + B$.

Montrer que $P(M)$ est dz ssi $P(M)$ est un polynôme en B.

689. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^*$.

a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que A^2 soit dz à valeurs propres strictement positives.

Montrer que A est diagonalisable.

b) Diagonaliser $B = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, où $b_{i,i} = a$ et $b_{i,j} = b$ si $i \neq j$.

c) Diagonaliser $C = (c_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, où $c_{i,n+1-i} = a$ et $c_{i,j} = 0$ si $j \neq n + 1 - i$.

690. Soient $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $M^n = I_2$. Montrer que $M^{12} = I_2$.

Ind. Montrer que M est $\mathbb{C}$-diagonalisable et considérer $\mathrm{tr}(M)$.

691. Soient $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Pour $z \in \mathbb{C}$, soit $\Delta(z)$ le discriminant du polynôme χ_{A+zB}.

a) On suppose B diagonalisable et $\triangle$ de degré au plus 1 . Montrer que $AB = BA$.

b) Exhiber B telle que Δ soit de degré au plus 1 et $AB \neq BA$.

c) On suppose que, pour tout $z \in \mathbb{C}, A + zB$ est diagonalisable. A-t-on $AB = BA$?

692. E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie et f un endo de E tel que f^2 soit un projecteur.

a) Préciser un polynôme annulateur de f.

b) Mq il existe 2 sev supplémentaires F et G stables par f tels que l'endo induit

par f sur F soit inversible et l'endo induit par f sur G soit nilpotent.

c) Montrer que f est dz ssi $\mathrm{rg}\,(f^2) = \mathrm{rg}(f)$.

Sol a) $X^4 - X^2$.

b) Voir exo 48 feuille 2...

c) Voir exo 80, feuille 4.

693. E le $\mathbb{R}$-ev des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et p, q deux réels avec $p + q = 1$

et $p \in]-1, 0[\cup]0, 1[$. On pose $u(f) = g$ avec $g : x \mapsto f(px + q)$.

a) Montrer que u est un automorphisme de E.

b) Montrer que les valeurs propres de u sont dans $]-1, 1]$.

694. Soit E un ev euclidien muni d'une bon $(e_1, \dots, e_n)$.

On considère une famille $(u_1, \dots, u_n)$ de vecteurs de E tq, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\|u_k\| = \dfrac{1}{n}$.

Est-ce que la famille $(e_1 + u_1, \dots, e_n + u_n)$ est une base de E?

695. * a) Montrer qu'il existe une unique suite de polynômes $(H_n)_{n \in N}$ tq

$\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, e^{xt - t^2/2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} H_n(x) t^n$.

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, (n+1) H_{n+1} = X H_n - H_{n-1}$ et que $H_n' = H_{n-1}$.

c) On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t) Q(t) e^{-t^2/2} \, \mathrm{d}t$.

Montrer que $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille orthogonale de $\mathbb{R}[X]$.

696. Soit J_n la matrice carrée de taille n dont tous les coefficients valent 1 .

a) Mq J_n est dz et qu'il existe une matrice orthogonale $P_n \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tq : $J_n = P_n \,\mathrm{diag}(0, \dots, 0, n) P_n^{-1}$.

b) Calculér P_2 et P_3.

c) Montrer que l'ev des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ commutant avec J_3 est de dimension 5.

697. Soit $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $a_{i,i}=a_{1,n}=a_{n,1}=1$ pour $i\in\{1,\dots,n\}$,

les autres coefficients étant nuls.

a) Montrer que 1 est valeur propre de A puis déterminer le sous-espace propre associé.

b) En remarquant que A est symétrique, déterminer tous les éléments propres de A.

698. E ev euclidien. Un endo f de E est antisymétrique ssi $\forall x,y,E,(f(x),y\rangle=-\langle x,f(y)\rangle$.

a) Mq f est antisymétrique ssi $\forall x\in E,\langle f(x),x\rangle=0$.

b) Mq $\operatorname{Ker} f$ est orthogonal à $\operatorname{Im} f$.

c) Soit $s=f\circ f$: Montrer que s est un endomorphisme symétrique.

Mq toutes ses valeurs propres sont négatives ou nulles. Mq $\operatorname{Ker} s=\operatorname{Ker} f$.

d) On suppose $n=3$. Mq il existe une bon dans laquelle la matrice de f est de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix}.$$

699. Soient $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $(V_1,\dots,V_m)$ une famille libre de vecteurs propres

de A avec $m>0$. Soit Q la matrice de colonnes $V_1,\dots,V_m$ et $S=QQ^T$.

Montrer que $S\in\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, que S est de rang m et que $AS=SA^T$.

700. a) Prouver, pour toutes $A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ et $B\in\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$, l'égalite $\overline{AB}=\bar{A}\times\bar{B}$.

b) Soient $A\in\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et λ une valeur propre de A.

En utilisant la question précédente, montrer que $\bar{\lambda}=-\lambda$.

c) Soit $A\in\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

i) Donner la forme de χ_A.

ii) Que dire de $\chi_A(0)$ lorsque n est impair ?

iii) On suppose n pair et $0 \notin \mathrm{Sp}(A)$. Montrer que $\det(A) > 0$.

Sol :

a)b) Classique mais attention à $\mathbb{C}$...

$AX = \lambda X$, je conjugue et transpose, je multiplie à dte par X, je simplifie par $\sum |x_k|^2 \neq 0$

c) χ_A possède la parité de n par transposition et n-linéarité.

Si n impair $\chi_A(0) = -\chi_A(0)$, pas inversible.

Par b) on n'a que des vp imaginaires pures.

Les multiplicités sont les mêmes quand on conjugue, car poly caract à coeff réels ...

Donc on multiplie sur la diag des nombres et leurs conjugués.

701. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On dit que A est définie positive si $Sp(A) \subset \mathbb{R}^{+*}$.

a) Soit A définie positive. Mq il existe une unique matrice $\dot{B}$ sym def positive tq $B^2 = A$.

b) Soit $(c_1, \dots, c_n)$ une bon de vecteurs propres de A.

Exprimer $\langle AX, X \rangle$ en fonction de la décomposition de X dans cette base.

c) Montrer que, pour $X \in \mathbb{R}^n$, $\|X\|^4 \leqslant \langle AX, X \rangle \langle A^{-1}X, X \rangle$. Dans quel cas a t-on égalité ?

702. Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$.

a) Montrer que $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ si et seulement s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = B^T B$.

b) Montrer que $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ si et seulement s'il existe $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = B^T B$.

c) $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Mq l'application $X \mapsto \sqrt{X^T A X}$ est une norme sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Est-elle associée à un produit scalaire ?

703. Soit $q : (x_0, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^n \mapsto x_0^2 - \sum_{k=1}^{n-1} x_k^2$.

Soit $G = f \in GL(\mathbb{R}^n); \forall x \in \mathbb{R}^n, q(f(x)) = q(x)$.

a) Montrer que G est stable par composition et passage à l'inverse.

b) Soit $\beta : (x, y) \mapsto \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y))$.

Montrer que β est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^n$.

c) Soient $J = \mathrm{Diag}(-1, 1, \ldots, 1), f \in \mathrm{GL}\left(\mathbb{R}^n\right)$ et A la matrice de f

dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $f \in G$ si et seulement si $A^T J A = J$.

703 bis .Voir racines n-ième rotation, jmf ?

Analyse

704. a) Soient E un ev muni de deux normes équivalentes N_1 et N_2,

(u_n) une suite de E qui converge pour N_1. Montrer que (u_n) converge pour N_2.

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Soit, pour $a \in \mathbb{R}, N_a : P \mapsto |P(a)| + \|P'\|_{\infty,[0,1]}$.

b) Si $a \in \mathbb{R}$, montrer que N_a est une norme.

c) Soient $a, b \in [0, 1]$. Montrer que N_a et N_b sont des normes équivalentes.

d) Pour quelles valeurs de a, la suite $((X/2)^n)$ converge-t-elle pour N_a ?

705. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $N(A) = \mathrm{tr}\left(AA^T\right)$.

Montrer que, pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), N(AB) \leqslant N(A)N(B)$.

Sol : C'est Schur.

706. Soient E un espace vectoriel normé et F un sous-espace de E.

a) Montrer que l'adhérence de F est un sous-espace de E.

b) Que dire de l'adhérence de F lorsque F est un hyperplan de E ?

On commencera par le cas où E est de dimension finie.

707. a) Soit E un espace préhilbertien réel avec $\|\|$ sa norme euclidienne.

Montrer l'égalité du parallélogramme : $\forall x, y \in E, \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$.

b) Donner un exemple de norme non euclidienne en dimension finie puis infinie.

c) Soit $\|\|$ une norme vérifiant l'égalité du parallélogramme.

On pose, pour $x, y \in E, \varphi(x, y) = \alpha\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$.

Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ pour que $\|\|$ soit la norme associée à φ. En déduire l'unicité de φ.

Montrer que φ est un produit scalaire de norme associée $\|\|$.

708. $E = \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ et u une forme linéaire sur E tq, $\forall f \in E$ positive, $u(f) \geqslant 0$.

a) Montrer que, pour tout $f \in E, |u(f)| \leqslant u(|f|)$.

b) Soit e la fonction constante égale a 1.

Trouver la borne supérieure des $\dfrac{|u(f)|}{\|f\|_\infty}$ pour $f \in E$ non nulle à l'aide de $u(e)$.

709. Soient H un espace préhilbertien réel et $(e_k)_{k\in N}$ une famille orthonormée de H.

Pour $f \in H$ on pose $c_k(f) = \langle f, e_k\rangle$.

On note $\ell^2(\mathbb{N})$, l'ensemble des suites $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tq la série de terme général u_n^2 converge.

a) Mq $\ell^2(\mathbb{N})$ est un ev et que $(u, v) \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$ est un produit scalaire sur cet eve .

b) Justifier la définition de l'application $\Phi : H \to \ell^2(\mathbb{N})$ definie par $\Phi(f) = (c_k(f))_k$.

Montrer que Φ est continue.

710. Soit E un espace préhilbertien réel.

a) Soient (u_n) une suite à valeurs dans E qui converge vers $u \in E$ et (λ_n)

une suite réelle qui converge vers $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que la suite $(\lambda_n u_n)$ converge vers λu.

b) On suppose, dans cette question, que E de dimension finie.

Soient $(u_n), (v_n)$ deux suites à valeurs dans E qui convergent vers $u, v \in E$.

On suppose que, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n$ et v_n sont colinéaires. Mq u et v sont colinéaires.

c) Le résultat précédent demeure-t-il vrai si l'on ne suppose plus E de dim finie ?

711. Soit, pour $n \geqslant 4, f_n : x \mapsto x^{3n} - \sqrt{n}x + 1$.

a) Montrer qu'il existe un unique $x_n \in [1, 2]$ tel que $f_n(x_n) = 0$.

b) Étudier la convergence de la suite de terme général $\varepsilon_n = x_n - 1$.

c) Trouver un equivalent de ε_n.

d) Donner un développement asymptotique à trois termes de x_n.

712. Soient $\alpha > 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*, u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha n}$. Trouver un équivalent de u_n.

713. Soit (u_n) une suite de $\mathbb{R}^{+*}$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*, v_n = \dfrac{u_n}{u_1 + \cdots + u_n}$.

Comparer les natures des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$.

714. * a) Étudier la convergence et calculer la somme éventuelle de la série

de terme général u_n définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(e^{u_n} - u_n)$.

b) Etudier la convergence et calculer la somme éventuelle de la série de terme

genéral v_n définie par $v_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = e^{v_n} - 1$

Sol Rms.

a) Grâce à l'inégalité $e^x \geqslant x + 1 > x(1)$, on voit que la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ est bien définie,

et par récurrence que $u_n > 0$, pour tout n.

On a aussi :

$$e^{u_{n+1}} - e^{u_n} = -u_n < 0$$

La suite u est donc décroissante ; elle est minorée par 0 et donc converge.

Par passage à la limite dans l'égalité du dessus, cette limite est nulle.

En outre,

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} \left(e^{u_k} - e^{u_{k+1}}\right) = e^{u_0} - e^{u_{n+1}} \longrightarrow e - 1$$

b) On va traiter trois cas :

-Si $v_0 = 0$, alors $v_n = 0$ pour tout n. La série est donc convergente de somme nulle.

- Si $v_0 > 0$, on démontre facilement, en utilisant l'inégalité (1), que la suite $(v_n)_{n\in\mathrm{N}}$ est croissante ; elle ne peut converger vers 0 , la série est donc grossièrement divergente.

- Si $v_0 < 0$, la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est à nouveau croissante, majorée par 0 , donc convergente, de limite l qui vérifie : $e^l = l + 1$, dont la seule solution est 0 .

De plus, $v_{n+1} = e^{v_n} - 1 = v_n + \dfrac{1}{2}v_n^2 + o\left(v_n^2\right)$ et donc

$$\frac{1}{v_{n+1}} = \frac{1}{v_n}\frac{1}{1+\frac{1}{2}v_n + o\left(v_n\right)} = \frac{1}{v_n} - \frac{1}{2} + o(1) \Longrightarrow \frac{1}{v_n} - \frac{1}{v_{n+1}} \sim \frac{1}{2}.$$

Comme la série de terme général constant $\frac{1}{2}$ est divergente, la série $\sum\left(\dfrac{1}{v_n} - \dfrac{1}{v_{n+1}}\right)$ est divergente, et on a l'équivalence des sommes partielles :

$$\frac{1}{v_0} - \frac{1}{v_n} = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{v_k} - \frac{1}{v_{k+1}}\right) \sim \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2} = \frac{n}{2} \Longrightarrow v_n \sim -\frac{2}{n} \leqslant 0.$$

La série de terme général v_n est donc divergente.

715. Soit $f : [0,1] \to [0,1]$.

a) On suppose f continue. Montrer que f admet un point fixe.

b) On suppose f croissante. Montrer que f admet un point fixe.

Ind. Considérer $\sup\{x \in [0,1], f(x) \geqslant x\}$.

716. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

a) Montrer que $\displaystyle\int_a^b f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t$ tend vers 0 , quand n tend vers $+\infty$.

On admet que le résultat est encore vrai si f est seulement continue par morceaux.

b) Calculer $\displaystyle\int_0^\pi \left(-x + \frac{x^2}{2\pi}\right) \cos(nx)\mathrm{d}x$.

c) En déduire la somme de la série de terme géneral $\dfrac{1}{n^2}$

717. a) Montrer que la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x (\pi|\sin t| - 2)\mathrm{d}t$ est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

b) Déterminer la nature de la série de terme général $\displaystyle\int_{n\pi}^{+\infty} \frac{\pi|\sin t| - 2}{t}\, \mathrm{d}t$.

718. Soient $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^{+*}$ distincts et, pour $i \in [\![0, n]\!], P_i = \displaystyle\prod_{1 \leqslant k \leqslant n, k \neq i} (X + a_k)$.

a) Montrer que $(P_0, \ldots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Donner les coordonnées d'un poly $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ dans cette base en fct des $Q(-a_i)$ et P_i.

b) Montrer la convergence et calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t + a_0)(t + a_1) \cdots (t + a_n)} \mathrm{d}t$.

719. Soit $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t = f(n) + \int_n^{n+1} (n + 1 - t)f'(t)\mathrm{d}t$.

b) On suppose f' intégrable sur $[1, +\infty[$. On note, pour $n \in \mathbb{N}^*, u_n = f(n)$.

Mq la série de terme général u_n converge ssi la suite $\displaystyle\int_1^n f(t)\mathrm{d}t$ converge.

c) Soit $\alpha > 1/2$. Étudier la convergence de la série de terme général $\dfrac{\cos(\sqrt{n})}{n^\alpha}$.

720. Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, T], \mathbb{C})$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\varphi_n : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^T f(t)e^{-nk(x-t)}\mathrm{d}t$.

a) Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}, \varphi_n$ est définie sur $\mathbb{R}$.

b) Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (φ_n).

721. Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière à termes positifs telle que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1$.

a) Montrer que f est continue et dérivable sur $[0, 1[$.

b) Montrer que f 'est continue sur $[0,1]$.

On suppose maintenant que f est derivable en 1 .

c) Montrer que f' est croissante sur $[0,1[$ et bornée sur $[0,1]$.

d) Soit $N \geqslant 1$. Montrer que $\sum_{n=0}^{N} n a_n \leqslant f'(1)$.

e) En déduire que $f'(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n$.

722. On cherche à dénombrer les n-uplets $(a_1, \ldots, a_n)$ à valeurs dans $\{\pm 1\}$

vérifiant les conditions : $\forall p \in [\![1, n]\!], \sum_{k=1}^{p} a_k \geqslant 0$ et $\sum_{k=1}^{n} a_k = 0$.

a) Montrer qu'il n'existe pas de tels n-uplets si n est impair.

b) Soit u_n le nombre de $(2n)$-uplets satisfaisant ces conditions

(avec la convention $u_0 = 1$). Déterminer u_1, u_2 et u_3.

c) Trouver une relation de récurrence entre u_n et $u_0, \ldots, u_{n-1}$.

d) Déterminer u_n. Ind. Considérer la somme de la série entière $\sum u_n x^n$.

723. Soit, pour $n \in \mathbb{N}, f_n : x \mapsto \dfrac{x^n}{n!} e^{-x}$.

a) Étudier la convergence simple et uniforme de (f_n) sur $\mathbb{R}^+$.

b) Montrer que, pour tout n, f_n est intégrable sur $\mathbb{R}^+$et calculer son intégrale.

c) Déterminer $\lim \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t) \mathrm{d}t$. Commentaire ?

724. Soient $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ et, pour $n \in \mathbb{N}, I_n = \displaystyle\int_0^1 f\left(t^n\right) \mathrm{d}t$. Limite de (I_n) ?

Sol $f(0)$ par cv dominée.

725. Soit $\alpha > 0$.

a) Montrer que, pour n assez grand, l'intégrale $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^\alpha)^n}\, \mathrm{d}t$. est bien définie.

b) Trouver une relation entre u_n et u_{n+1}.

c) Trouver un equivalent de u_n.

d) Montrer que la série $\sum (-1)^n u_n$ converge.

Sol voir 1028 ...

726. Soit, pour $n \in \mathbb{N}, u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\sin(nt)\mathrm{d}t$.

a) Montrer que (u_n) converge.

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - u_n$.

c) Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?

Donner un équivalent de la somme partielle de cette série.

b) Enoncé faux mais facile à recadrer en calculant $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - u_{n+1}$.

a) Cvd

b) Plan ipp sur u_{n+1}.

Puis formule trigo voir échanges avec Diane, Lyssia, Vani.

Lien séries intégrales, on est en $\ln(n)$.

727. Soient, pour $n \in \mathbb{N}^*, u_n = \int_0^{1/2} \frac{\sin^2(n\pi x)}{\tan(\pi x)}\mathrm{d}x$ et $v_n = \int_0^{1/2} \frac{\sin^2(n\pi x)}{\pi x}\, \mathrm{d}x$.

a) Montrer que $\int_\pi^{+\infty} \frac{\cos(2u)}{u}\, \mathrm{d}u$ converge.

b) Montrer que $v_n \sim \frac{\ln(n)}{2\pi}$.

c) Soit $f : x \in]0, 1/2[\mapsto \frac{1}{\tan(\pi x)} - \frac{1}{\pi x}$. Montrer que f se prolonge par continuité.

d) Trouver un équivalent de u_n.

Sol :

a) Ipp du cours pour revenir en l'infini à $\mathcal{O}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

c) Classe $\mathcal{C}^1$? ? sinon c'est pas gentil...

b) Oui équivalent recevable, car je coupe la borne du bas en $1/n$.

Le morceau éliminé (0,1/n) est controlable par $\mathcal{O}(1)$ grâce à $|\sin(t)| \leqslant t$.

L'autre , cght affine $t = n\pi x$, on linéarise, on utilise a), il sort $\dfrac{\ln(n)}{2\pi} + \mathcal{O}(1)$.

d) Le même équivalent , car la différence tend vers 0 par le lemme de Lebesgue.

728. Soit, pour $\alpha > 0$ et $n \in \mathbb{N}, u_n(\alpha) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha(t)\cos^n(t)\mathrm{d}t$.

a) Déterminer la nature de la série de terme général $u_n(\alpha)$ selon les valeurs de α.

b) Calculer les sommes des séries de terme général $u_n(2)$ et $u_n(3)$.

729. a) Soit $\varphi \in \mathcal{C}^1([0,\pi/2],\mathbb{R})$. Mq $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t)\sin((2n+1)t)\mathrm{d}t \underset{n++\infty}{\longrightarrow} 0$.

b) Justifier la convergence des intégrales suivantes :

$I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t, I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin t}\,\mathrm{d}t$ et $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{t}\,\mathrm{d}t$, pour $n \in \mathbb{N}$.

c) Calculer $I_n - I_{n-1}$, puis I_n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

d) Montrer que $I = \dfrac{\pi}{2}$.

Sol voir feuille exo intégration.

730. Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t(t-2)(t-x)}}\mathrm{d}t$

a) Déterminer le domaine de définition de f.

b) Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0 .

731. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et T-périodique. On pose $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-tx}\varphi(t)\mathrm{d}t$.

a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.

b) Etudier la limite de f en $+\infty$.

c) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

d) Mq,$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, f(x) = \dfrac{1}{1-e^{Tx}} \displaystyle\int_0^T e^{-tx}\varphi(t)\mathrm{d}t$. En déduire un équivalent de f en 0 .

732. Soient $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t, g : x \mapsto \cos(x)\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t - \sin(x)\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$.

a) Justifier que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$ convergent.

b) Montrer que f et g sont solutions de l'équation différentielle $y'' + y = \dfrac{1}{x}$.

c) En déduire que $f = g$, puis en déduire les valeurs de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

Voir feuille 11 exo equa diff le même.

733. Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{2\pi} \ln(1 + x\sin t)\mathrm{d}t$.

a) Déterminer le domaine de définition de f.

b) Montrer que f est paire.

c) Étudier la dérivabilité de f.

d) Calculer f' à l'aide d'un développement en série entière.

734. Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que f est dérivable sur $]-1, +\infty[$. Trouver une relation entre f et f'.

b) En déduire que f est dse au voisinage de 0 et trouver son développement.

735. Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}e^{-x/t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}^+$.

b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ et solution de l'équation différentielle $2xy'' - y' - 2y = 0$.

c) Résoudre l'équation en posant $y(x) = z(\sqrt{x})$.

736 On pose, pour $k \in \mathbb{N}^*, F_k(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-kt} \sin\left(xe^t\right) \mathrm{d}t$.

a) Montrer que F_k est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que, pour $k \geqslant 2, F_k$ est solution de $xy' - ky = -\sin x$.

737. a) Donner le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$.

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}, \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{4^k} \binom{2k}{k} = \frac{2n+1}{4^n} \binom{2n}{n}$.

738. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge puis qu'elle vaut $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.

739. a) Montrer que, pour $x \in \mathbb{R}, \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{xe^{it}}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{int}\,\mathrm{d}t$.

b) Montrer que, pour $x \in \mathbb{R}, \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{x\cos t} \cos(x \sin t) \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^{2k+1}}{(2k+1)(2k+1)!}$.

c) En déduire, pour $x \in \mathbb{R}, \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{x\cos t} \cos(x \sin t) \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} + \int_0^x \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)!} t^{2k}\,\mathrm{d}t$.

d) En déduire, pour $x \in \mathbb{R}, \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{x\cos t} \cos(x \sin t) \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} - \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

e) Donner la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$.

740. a) Mq l'équation $(E) : x^2y' + y = x^2$ n'admet pas de solution dse.

b) Donner les sol de (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$ puis préciser celles avec une limite finie en 0.

741. a) Montrer que l'équation $(E) : 4xy'' + 2y' - y = 0$ admet une solution dse.

b) En déduire les solutions de (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sur $\mathbb{R}^{-*}$.

c) L'équation (E) admet-elle des solutions sur $\mathbb{R}$?

742. Considérons l'équation différentielle $(E) : y'' = (x^2 - 1)\, y$.

a) Mq si y sol de (E) avec $y(0) = 0$ (resp. $y'(0) = 0$) alors y impaire (resp. paire).

b) Trouver le réel $a \in \mathbb{R}$ pour lequel la fonction $x \mapsto e^{ax^2}$ est solution de (E).

c) $f : x \mapsto u(x)e^{-x^2/2}$. Mq f est solde (E) ssi u est sold'une équa diff à préciser.

d) Exprimer l'ensemble des solutions de (E) à l'aide de $v : x \mapsto \displaystyle\int_0^x e^{t^2}\, \mathrm{d}t$

743. $a, b \in \mathbb{R}$. Mq il existe une unique sol à $y'' - 4y = a|x| + b$ avec des asymptotes en $\pm\infty$.

744. Déterminer les extrema sur $\mathbb{R}^2$ de $f : (x, y) \mapsto (x^2 - 4y^2)(x^2 - 4y^2 - 8)$.

745. Soient $D = \left\{(x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2, x + y \leqslant 1\right\}$ et $a, b, c \in \mathbb{R}^+$.

Mq la fonction $f : (x, y) \mapsto x^a y^b (1 - x - y)^c$ admet des extrema sur D et les calculer.

746. Soit $f : (x, y) \mapsto x^3 + xy^2 - x^2 y - y^3$.

a) La fonction f admet-elle des extrema sur $\mathbb{R}^2$?

b) La fonction f admet-elle des extrema dans le triangle délimité par les droites

d'équations $x = 1, y = 1$ et $y = 1 - x$? Le cas échéant les trouver.

Probabilités

747. Soient X_1 et X_2 des variables aléatoires indépendantes suivant les lois de Poisson de paramètres respectifs λ_1 et λ_2. Soit Y une variable aléatoire indépendante des deux autres telle que $Y(\Omega) = \{-1, 1\}$ et $\mathbf{P}(Y = 1) = p \in]0; 1[$. On pose $M = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ YX_2 & X_1 \end{pmatrix}$.

a) Probabilité que M soit inversible ?

b) Probabilité que les valeurs propres de M soient réelles ?

c) Probabilité que M soit diagonalisable sur $\mathbb{R}$?

748. a) Mq le polynôme $P = X^3 - X^2 - X - 1$ admet une unique racine réelle dans $]1, 2[$

et 2 racines complexes non rélles de module strictement inférieur à 1.

b) On lance une pièce équilibrée et on note, pour $n \geqslant 3, A_n$ l'événement « obtenir trois pile consécutifs pour la première fois aux lancers $n - 2, n - 1$ et n ». Montrer que la suite définie par $u_n = \mathbf{P}(A_n)$ verifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 3.

c) Déterminer la nature de la série de terme général $2^n u_n$.

749. Soient X et Y deux varia aléatoires ind de même loi géométrique de paramètre p.

a) Déterminer la loi de la var $T=\min(X,Y)$; espérance et fonction génératrice.

b) Montrer que la variable $\dfrac{1}{T(T+1)}$ admet une espérance finie puis la calculer.

750. X, Y des var aléa ind avec des lois géom de param p_1 et p_2. On pose $M=\max(X,Y)$.

a) Justifier que M est une variable aléatoire.

b) Déterminer la loi de M.

c) Déterminer l'espérance et la variance de M en utilisant $m=\min(X,Y)$.

751. a) Soit X une variable aléatoire finie à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Montrer que $\mathbf{E}(X)=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbf{P}(X>k)$ et $\mathbf{E}\left(X^2\right)=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(2k+1)\mathrm{P}(X>k)$.

On considère une urne composée de N boules numérotees de 1 a N. On effectue n tirages avec remise et on note X_n la variable aléatoire égale au maximum des numéros obtenus lors de ces n tirages.

b) Calculer $\mathbf{E}\left(X_n\right)$ et en donner un équivalent.

c) Calculer $\mathrm{V}\left(X_n\right)$ et en donner un équivalent.

752. Une puce se déplace sur n points du plan numérotés de 0 a $n-1$. Lorsqu'elle est sur le point k, elle peut aller sur les points $k+1$ et $k-1$ avec probabilité $1/2$ (en considérant les numéros modulo n). On note X_m la position de la puce au temps m sachant qu'en $m=0$, la puce se trouve au point 0 , puis $U_m \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ le vecteur des probabilités $\mathbf{P}\left(X_m=k\right)$ pour k allant de 0 a $n-1$.

a) Déterminer la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $U_{m+1}=AU_m$ pour tout $m \in \mathbb{N}$.

b) La matrice A est elle diagonalisable ? Préciser ses elements propres.

c) On suppose n impair. Calculer la limite de $\mathrm{P}\left(X_m=k\right)$ quand m tend vers $+\infty$.

753. Considérons un immeuble a 7 étages où l'on cherche une personne. Cette personne est dans l'immeuble avec probabilité $p \in]0,1[$ et, si elle est dans l'immeuble, elle se trouve

dans chaque étage avec la même probabilité. On a cherché dans les 6 premiers étages en vain. Quelle est la probabilité qu'elle soit dans le dernier étage ?

754. Soit une infinité de lancers indé avec une pièce qui fait pile avec proba $p \in]0, 1]$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'événement « on obtient au moins n pile est certain.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit X_n la variable aléatoire correspondant au nombre de lancers

nécessaires pour obtenir n piles. On pose $Y_1 = X_1$ et, pour $n \geqslant 2, Y_n = X_n - X_{n-1}$.

b) Déterminer la loi de la variable Y_n et préciser sa fonction génératrice.

c) En déduire la fonction génératrice de X_n puis la loi de X_n.

755. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme

sur $[\![1, n]\!]$. Soit $m \in [1, n]$. Soit Z telle que $Z = X$ si $Y \leqslant m$, et $Z = Y$ sinon.

a) Déterminer la loi de Z.

b) Calculer les espérances de X, Y et Z.

c) Pour quels entiers $m \in [1, n]$ l'espérance $\mathrm{E}(Z)$ est-elle maximale ?

756. Soit (X_n) une suite i.i.d. de variables aleatoires suivant la loi uniforme sur $[\![1, r]\!]$.

Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*, A_n$ l'événement « les valeurs prises par les nr premières variables de la suite comptent n fois chaque entier $k \in [\![1, r]\!]$.

a) Calculer $P(A_n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

b) On suppose $r \geqslant 4$. Déterminer la probabilité de $\displaystyle\bigcap_{n \geqslant 1} \bigcup_{p \geqslant n} A_p$.

757. On effectue une infinité de lancers indépendants avec une pièce qui donne pile avec probabilité $p \in]0, 1[$. Soit X la longueur de la première suite identique et Y de la seconde ; par exemple, pour le tirage $PPPFFP$... (ou $FFFPPF\ldots$), on a $X = 3$ et $Y = 2$.

a) Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$. Mq $(X = m, Y = n)$ est un événement et calculer sa proba.

On pourra utiliser les événements P_n : «le n-ième tirage donne pile %.

b) Montrer que X est une variable aléatoire et préciser sa loi.

c) Montrer que la variable X admet une esperance et la calculer.

d) Déterminer la loi de Y et calculer son espérance.

Comparer les espérances de X et Y selon la valeur de p.

758. On munit l'ensemble S_n des permutations de $[1, n]$ de la distribution uniforme de probabilité P.

a) Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Déterminer $\mathrm{P}(\{\sigma\})$.

b) Pour $i \in [\![1, n]\!]$, soit X_i la variable aleatoire définie sur S_n

par $X_i(\sigma) = 1$ si $\sigma(i) = i$ et $X_i(\sigma) = 0$ sinon. Déterminer $\mathbf{E}(X_i)$.

c) Calculer l'espérance de la variable aléatoire N égale au nombre de points fixes.

d) Soient $i, j \in [1, n]\!]$. Calculer la covariance de X_i et X_j.

e) En déduire la variance de N.

759. Notons, pour $n \in \mathbb{N}^*, D_n$ le nombre de permutations de $[\![1, n]\!]$ sans point fixe et p_n la probabilité qu'une permutation de $[\![1, n]\!]$ choisie au hasard soit sans point fixe. Par convention, $p_0 = 1$.

a) Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}, \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{p_k}{(n-k)!} = 1$.

b) En déduire que, pour $x \in]-1, 1\left[, \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} p_n x^n = \frac{e^{-x}}{1-x}\right.$.

c) Montrer que $p_n \to 1/e$

760. Soit $\zeta : s \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$.

Soit $\mathbf{P}$ une probabilité sur $\mathbb{N}^*$ definie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbf{P}(\{n\}) = \dfrac{c}{n^s}$.

a) Déterminer les valeurs de s pour lesquelles il existe une telle probabilité.

Préciser la valeur de c dans ce cas.

b) Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers.

Pour $p \in \mathcal{P}$, soit Λ_p l'ensemble des entiers naturels non nuls multiples de p.

Montrer que les $(\Lambda_p)_{p\in\mathcal{P}}$ sont mutuellement indépendants.

761. Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramère $\lambda > 0$.

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbf{P}(X \leqslant n) = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_\lambda^{+\infty} e^{-t}t^n \, \mathrm{d}t$.

b) Déterminer un équivalent de $\displaystyle\int_\lambda^{+\infty} e^{-t}t^n \, \mathrm{d}t$ quand $n \to +\infty$.

c) Déterminer la probabilité que X soit paire.

762. a) Soit $S : t \mapsto \displaystyle\sum_0^\infty \frac{t^2+t+1}{n!}t^n$.

Déterminer le rayon et une expression de S.

b) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ de fonction génératrice $G_X = \lambda S$.

Déterminer λ et la loi de X.

c) Calculer $\mathrm{E}(X)$ et $\mathrm{V}(X)$