VARIABLES ALÉATOIRES

Exercice 0 : Soient X, Y deux variables aléatoires réelles indépendantes,

suivant une loi géométrique de paramètre p. Déterminer $E(Max(X,Y))$.

Sol : Soit $Z = max(X,Y)$, $\{Z \geqslant n\} = \overline{\{Z < n\}}$.

Donc $\mathcal{P}(Z \geqslant n) = 1 - \mathcal{P}(\{X < n\} \cap \{Y < n\})$.

Par indépendance et géométrique :

$\mathcal{P}(Z \geqslant n) = 1 - (\mathcal{P}(X < n))^2 = 1 - (1 - q^{n-1})^2 = 2q^{n-1} - (q^{n-1})^2$.

Cette série est convergente, car somme de géométriques convergentes.

Donc par antirépartition, $E(Z) = \displaystyle\sum_1^{\infty} \mathcal{P}(Z \geqslant n) = \frac{2}{1-q} - \frac{1}{1-q^2} = \frac{1+2q}{1-q^2}$.

Voir aussi exo 23.

Exercice 1 : On dit qu'une variable aléatoire réelle X est quasi-certaine

lorsqu'il existe un réel a tel que $\mathcal{P}(X = a) = 1$.

Soit X une variable aléatoire réelle discrète.

Démontrer que X est quasi-certaine si et seulement si $V(X) = 0$.

Sol :

(1) Si X est quasi certaine égale à a, X^2 est quasi certaine égale à a^2 donc
$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = a^2 - a^2 = 0.$$

(2) Réciproquement supposons $V(X) = 0$. En notant $m = E(X)$ on a
$$V(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n (x_n - m)^2$$
en notant x_n les valeurs prises par X et $p_n = \mathcal{P}(X = x_n)$.

Donc $p_n(x_n - m) = 0$ pour tout n.

Comme les p_n ne peuvent être tous nuls $\left(\sum_{\mathbb{N}} p_n = 1\right)$ et que les x_n sont distincts, il existe un entier n_0 et un seul tel que $x_{n_0} = m$, et alors $p_n = 0$ pour $n \neq n_0$ puis $p_{n_0} = 1$. Ainsi $\mathcal{P}(X = m) = 1$ et X est quasi certaine.

Exercice 4 : Écart à la moyenne

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ désigne un espace probabilisé, et $X, Y, (X_i)_{i\geqslant 1}$ des

variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$.

(1) Soit $\lambda > 0$. On suppose que $E(\mathrm{e}^{\lambda Y})$ est finie. Démontrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$,
$$\mathcal{P}(Y \geqslant a) \leqslant \mathrm{e}^{-\lambda a}\, E\big(\,\mathrm{e}^{\lambda Y}\,\big).$$

(2) On suppose de plus que $E(\mathrm{e}^{-\lambda Y})$ est finie. Déduire de la question précédente que
$$\mathcal{P}(|Y| \geq a) \leqslant \mathrm{e}^{-\lambda a}\, E\big(\,\mathrm{e}^{\lambda Y}\,\big) + \mathrm{e}^{-\lambda a}\, E\big(\,\mathrm{e}^{-\lambda Y}\,\big).$$

(3) (a) Démontrer que si $\lambda \geqslant 0$ et $x \in [-1, 1]$, alors
$$\mathrm{e}^{\lambda x} \leqslant \operatorname{ch} \lambda + x \operatorname{sh} \lambda \leqslant \mathrm{e}^{\frac{\lambda^2}{2}} + x \operatorname{sh} \lambda.$$

(b) Démontrer que si la variable aléatoire X prend ses valeurs dans $[-1, 1]$ et est centrée (c'est-à-dire si $E(X) = 0$), alors on a pour tout $\lambda \geqslant 0$
$$E\left(\mathrm{e}^{\lambda X}\right) \leqslant \mathrm{e}^{\frac{\lambda^2}{2}} \quad \text{et} \quad E\left(\mathrm{e}^{-\lambda X}\right) \leqslant \mathrm{e}^{\frac{\lambda^2}{2}}.$$

(c) Montrer que si les variables aléatoires indépendantes X_i prennent leurs valeurs dans $[-1, 1]$ et sont centrées, alors on a
$$\mathcal{P}\left(\frac{\left|\sum\limits_{i=1}^{n} X_i\right|}{n} \geqslant a\right) \leqslant 2\,\mathrm{e}^{-\frac{na^2}{2}}$$
pour tout $n \geqslant 1$ et tout $a \geqslant 0$.

Sol :

(1) $(Y \geqslant a) \Longleftrightarrow \mathrm{e}^{\lambda Y} \geqslant (\mathrm{e}^{\lambda a})$ puis on applique l'inégalité de Markov

à la variable aléatoire $\mathrm{e}^{\lambda Y}$.

(2) $(|Y| \geqslant a) \Longleftrightarrow (Y \geqslant a)$ ou $(-Y \geqslant a)$ et ces deux évéments étant disjoints, on obtient :
$$\mathcal{P}(|Y| \geqslant a) = \mathcal{P}(Y \geqslant a) + \mathcal{P}(-Y \geqslant a)$$
et le résultat découle de la question précédente appliqué à Y et $-Y$.

(3) (a) – L'inégalité de gauche peut se démontrer en étudiant la fonction différence.

– Celle de droite équivaut à démontrer $\operatorname{sh}\lambda \leqslant \mathrm{e}^{\frac{\lambda^2}{2}}$ ce qui peut se faire en écrivant les développements en série entière de ces deux fonctions.

(b) Pour tout $\omega \in \Omega$ on a donc

$$\mathrm{e}^{\lambda X(\omega)} \leqslant \mathrm{e}^{\frac{\lambda^2}{2}} + X(\omega)\operatorname{sh}\lambda$$

donc en utilisant la croissance puis la linéarité de l'espérance et puisque X est centrée, on trouve $E(\mathrm{e}^{\lambda X}) \leqslant \mathrm{e}^{\frac{\lambda^2}{2}}$.

L'autre inégalité s'obtient en considérant $-X$.

(c) On applique le résultat de la 2ème question à $Y = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{n}$:

$$\mathcal{P}(|Y| \geqslant a) \leqslant \mathrm{e}^{-\lambda a}\ E\left(\mathrm{e}^{\frac{\lambda \sum_{i=1}^{n} X_i}{n}}\right) + \mathrm{e}^{-\lambda a}\ E\left(\mathrm{e}^{\frac{-\lambda \sum_{i=1}^{n} X_i}{n}}\right)$$

Or les X_i étant indépendantes, il en est de même des variables aléatoires $\frac{\lambda X_i}{b}$ donc :

$$E\left(\mathrm{e}^{\frac{\lambda \sum_{i=1}^{n} X_i}{n}}\right) = E\left(\prod_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{\frac{\lambda X_i}{n}}\right) = \prod_{i=1}^{n} E\left(\mathrm{e}^{\frac{\lambda X_i}{n}}\right)$$

D'après la question **c)ii)**, $E\left(\mathrm{e}^{\frac{\lambda X_i}{n}}\right) \leqslant \mathrm{e}^{\frac{\lambda^2}{2n^2}}$ donc finalement :

$$E\left(\mathrm{e}^{\frac{\lambda \sum_{i=1}^{n} X_i}{n}}\right) \leqslant \left(\mathrm{e}^{\frac{\lambda^2}{2n^2}}\right)^n = \mathrm{e}^{\frac{\lambda^2}{2n}}$$

On fait pareil avec l'autre quantité et l'on trouve :

$$\mathcal{P}(|Y| \geqslant a) \leqslant 2\,\mathrm{e}^{-\lambda a}\,\mathrm{e}^{\frac{\lambda^2}{2n}}$$

puis on obtient le résultat demandé en prenant $\lambda = na$.

Exercice 6 : Une urne contient 2 boules blanches et $n-2$ boules rouges.

On effectue des tirages sans remise dans cette urne.

On appelle X le rang de sortie de la première boule blanche et Y

le nombre de boules rouges restant à ce moment dans l'urne.

(1) Déterminer la loi de X et $E(X)$.
(2) Exprimer Y en fonction de X et calculer $E(Y)$.

Sol : Pour plus de clarté on note B_i l'événement « au i-ème tirage on obtient une boule blanche » et R_i l'événement « au i-ème tirage on obtient une boule rouge ».

(1) (a) La première boule blanche peut apparaitre au plus tôt au premier tirage et au plus tard au tirage numéro $n-1$, donc $X(\Omega) = [\![1; n-1]\!]$.
Soit $k \in X(\Omega)$.

- Si $k = 1$, $(X = 1) = B_1$ donc $\mathcal{P}(X = 1) = \dfrac{2}{n}$.
- Si $k \geqslant 2$, l'événement $(X = k)$ signifie que les $k-1$ premier tirages ont donnés des boules rouges et le k-ième a donné une boule blanche. Donc $(X = k) = R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_{k-1} \cap B_k$. D'après la formule des probabilités composées on a

$$\mathcal{P}(X = k) = \frac{n-2}{n} \times \frac{n-3}{n-1} \times \frac{n-4}{n-2} \times \cdots \times \frac{n-2-(k-2)}{n-k+2} \times \frac{2}{n-k+1} = \frac{2(n-k)}{n(n-1)}.$$

En conclusion pour tout $k \in X(\Omega)$, $\mathcal{P}(X = k) = \dfrac{2(n-k)}{n(n-1)}$.

(b) X est une variable aléatoire discrète finie donc elle admet une espérance et on a

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=1}^{n-1} k\mathcal{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2k(n-k)}{n(n-1)} \\
&= \frac{2}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} k - \frac{2}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \\
&= \frac{2}{n-1} \times \frac{(n-1)n}{2} - \frac{2}{n(n-1)} \times \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \\
&= \frac{n+1}{3}
\end{aligned}$$

(2) Lorsque la première boule blanche apparait au tirage numéro X cela signifie que tous les tirage précédents ont donné des boules rouges donc que l'on a retiré $X-1$ boules rouges de l'urne. Ainsi il reste $n-2-(X-1)$ boules rouges dans l'urne. Donc on a $Y = n-2-(X-1) = n-X-1$.
On en déduit donc que Y admet une espérance et que

$$E(Y) = n - E(X) - 1 = \frac{2n-4}{3}.$$

Exercice 7 : Une urne contient N boules numérotées de 1 à N.

On en tire n en effectuant des tirages avec remise.

On note X et Y les plus petit et le plus grand des nombres obtenus.

Déterminer les lois de X et de Y.

Sol : Déjà, X et Y prennent leurs valeurs dans $[\![1, N]\!]$.

Il est bien plus facile de calculer $\mathcal{P}(X \geqslant k)$. En effet, on a $X \geqslant k \Leftrightarrow$ tous les tirages ont donné un nombre $\geqslant k$. La proba qu'un tirage donne un nombre $\geqslant k$ est $\dfrac{N-k+1}{N}$ donc

$$\mathcal{P}(X \geqslant k) = \frac{(N-k+1)^n}{N^n}$$

D'où :

$$\mathcal{P}(X = k) = \mathcal{P}(X \geqslant k) - \mathcal{P}(X \geqslant k+1) = \cdots$$

Pour Y même démarche mais on calcule cette fois $\mathcal{P}(Y \leqslant k)$.

Exercice 8 : Loi triangulaire

X et Y sont 2 VAI qui suivent la même loi uniforme $\mathcal{U}[\![1, n]\!]$.

On pose $S = X + Y$.

Déterminer la loi de S, son espérance, sa variance.

Sol : Déjà, S est à valeurs dans $[\![2, 2n]\!]$.

(1) Pour tout $k \in [\![2, n+1]\!]$,

$$\mathcal{P}(S = k) = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{P}(X = i)\mathcal{P}(Y = k-i) = \sum_{i=1}^{k-1} \mathcal{P}(X = i)\mathcal{P}(Y = k-i) = \frac{k-1}{n^2}$$

et si $k \in [\![n+2, n2n]\!]$,

$$\mathcal{P}(S = k) = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{P}(X = i)\mathcal{P}(Y = k-i) = \sum_{i=k-n}^{n} \mathcal{P}(X = i)\mathcal{P}(Y = k-i) = \frac{2n-k+1}{n^2}$$

(on pouvait aussi utiliser la symétrie : si $k \in [\![2, n+2]\!]$, $\mathcal{P}(S = 2n+2-k) = \mathcal{P}(S = k)$, puisque à tout couple (i, j) tel que $i + j = k$ correspond le couple $(n-i+1, n-j+1)$ tel que $(n-i+1) + (n-j+1) = 2n+2-k$).

On peut remarquer que :

$$\sum_{k=1}^{2n} \mathcal{P}(S = k) = 2\sum_{k=1}^{n} \mathcal{P}(S = k) + \mathcal{P}(S = n+1) = 2\frac{\sum\limits_{k=2}^{n}(k-1)}{n^2} + \frac{n}{n^2} = \frac{n(n-1)+n}{n^2} = 1$$

ouf !

(2) Évidemment, pour calculer espérance et variance on ne calcule pas des sommes horribles mais on utilise les propriétés du cours.

Par linéarité :

$$E(S) = E(X) + E(Y) = 2\frac{n+1}{2} = n+1$$

et puisque X et Y sont indépendantes :

$$V(S) = V(X) + V(Y) = 2\frac{n^2-1}{12} = \frac{n^2-1}{6}$$

Exercice 9 : Loi hypergéométrique

Une urne contient N boules dont une proportion p de boules blanches

(ie . Np boules blanches).

On effectue un tirage sans remise de n boules dans l'urne,

et on désigne par X le nombre de boules blanches obtenues.

(1) Déterminer la loi de X.

Cette loi s'appelle la loi hypergéométrique, et on note $X \hookrightarrow \mathcal{H}(N, n, p)$.

(2) En utilisant, après l'avoir démontré, la formule de Vandermonde :

$$\forall (a, n) \in [\![0, N]\!]^2,\ \sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{N-a}{n-k} = \binom{N}{n},$$

déterminer $E(X)$ et $V(X)$.

Sol :

(1) $X(\Omega) \subset [\![0, n]\!]$; plus précisément, $X(\Omega) = [\![max(0, n - Nq), min(n, Np)]\!]$, et

$$\forall k \in X(\Omega),\ \mathcal{P}(X = k) = \frac{\binom{Np}{k}\binom{N(1-p)}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Très cohérent avec l'univers d'avant, de plus t'es obligé d'en prendre si tu

dépasses le stock de non blanches.

(avec les conventions habituelles pour les coefficients binomiaux). Il serait facile de vérifier, à l'aide de la formule de Vandermonde, que l'on a bien $\sum_{k=0}^{n} \mathcal{P}(X = k) = 1$.

(2) X ne prenant qu'un nombre fini de valeurs, son espérance existe et vaut :

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} k\mathcal{P}(X=k) = \frac{1}{\binom{N}{n}} \sum_{k=1}^{n} \underbrace{k\binom{Np}{k}} \binom{N-Np}{n-k}$$

$$= \frac{1}{\binom{N}{n}} \sum_{k=1}^{n} \overbrace{Np\binom{Np-1}{k-1}} \binom{N-Np}{n-k}$$

$$\underset{k'=k-1}{=} \frac{Np}{\binom{N}{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{Np-1}{k}\binom{(N-1)-(Np-1)}{n-1-k}$$

$$\underset{VDM}{=} \frac{Np}{\binom{N}{n}} \binom{N-1}{n-1} = np.$$

On calculerait de la même façon la variance de X, en calculant d'abord $E(X(X-1))$...

Exercice 10 : Loi de Pascal

On lance une pièce de monnaie où la probabilité de tomber sur Pile vaut $p \in]0,1[$.

On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de lancers nécessaires

pour obtenir r fois pile ($r \in \mathbb{N}^*$).

Quelle est la loi de X ? Calculer $E(X)$ (utiliser le dse de $x \mapsto \frac{1}{(1-x)^{r+1}}$).

Sol : $X(\Omega) = \{r, r+1, \dots\}$.

Soit $k \geqslant r$. Pour que $X = k$ il faut que l'on ait obtenu $r-1$ fois Pile dans les $k-1$ premiers

lancers et Pile au dernier. Donc

$$\mathcal{P}(X=k) = \binom{k-1}{r-1} p^{r-1}(1-p)^{(k-1)-(r-1)} \times p = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}.$$

Le dse indiqué s'obtient en dérivant r fois celui de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ et on obtient :

$$\forall x \in]-1,1[,\ \frac{1}{(1-x)^{r+1}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{r+k}{k} x^k.$$

Sous réserve (d'absolue) convergence on a, par définition :

$$E(X) = \sum_{k=r}^{+\infty} k\mathcal{P}(X=k) = \sum_{k=r}^{+\infty} k\binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}.$$

Or $k\binom{k-1}{r-1} = r\binom{k}{r}$ donc (toujours sous réserve de convergence) :

$$E(X) = rp^r \sum_{k=r}^{+\infty} \binom{k}{r}(1-p)^{k-r} = rp^r \sum_{i=0}^{+\infty} \binom{i+r}{r}(1-p)^i.$$

Puisque $1-p<1$, on reconnaît la série du dse précédent ; elle est donc effectivement convergente et :

$$E(X) = rp^r \times \frac{1}{(1-(1-p))^{r+1}} = \frac{r}{p}$$

Exercice 11 : Loi binomiale négative

On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi binomiale négative de paramètres n et p si

$$X(\Omega) = \{n, n+1, \dots\} \text{ et } \mathcal{P}(X=k) = \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}$$

(1) Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi géométrique de paramètre p.

Montrer que $X_1 + \cdots + X_n$ suit une loi binomiale négative de paramètres n et p.

(2) En déduire espérance et variance d'une loi binomiale négative de paramètres n et p.

Sol :

(1) On regarde les fonctions génératrices, $G_{\sum X_i}(t) = (G_X(t))^n$.

Soit $\left(\frac{pt}{1-qt}\right)^n = p^n t^n \sum_{s=0}^{\infty} \binom{s+n-1}{s} q^s t^s$.

Et la phrase magique : la fonction génératrice caractérise la loi.

Et la dérivation de la géométrique $n-1$ fois.

Et la symétrie des binomiaux avec $s+n=k$ oui oui...

(2) Raisonnons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^\star$.

Cas $n=1$. Si X suit une loi binomiale négative de paramètres 1 et p alors

$$\mathcal{P}(X=k)=\binom{k-1}{0}p(1-p)^{k-1}$$

On reconnaît une loi géométrique de paramètre p.

Supposons la propriété vraie au rang $n \geqslant 1$.

L'événement $X_1+\cdots+X_{n+1}=k$ peut se décomposer

en la réunion des événements incompatibles suivants :

$$(X_1+\cdots+X_n=\ell)\cap(X_{n+1}=k-\ell) \text{ pour } \ell \in [\![n,k-1]\!]$$

On en déduit par indépendance (lemme des coalitions) et en utilisant

l'hypothèse de récurrence :

$\mathcal{P}(X_1+\cdots+X_{n+1}=k)=\displaystyle\sum_{l=n}^{k-1}\binom{\ell-1}{n-1}p^n(1-p)^{l-n}p(1-p)^{k-l-1}$ puis :

$$P(X_1+\cdots+X_{n+1}=k)=p^n(1-p)^{k-(n+1)}\sum_{l=n}^{k-1}\binom{\ell-1}{n-1}$$

Or par la formule du triangle de Pascal

$$\sum_{l=n}^{k-1}\binom{\ell-1}{n-1}=\binom{k-1}{n}$$

et donc

$$\mathcal{P}(X_1+\cdots+X_{n+1}=k)=\binom{k-1}{n}p^n(1-p)^{k-(n+1)}$$

Cela achève la récurrence.

(3) Par linéarité de l'espérance : $E(X)=\dfrac{n}{p}$ et par indépendance des variables sommées : $V(X)=n\dfrac{1-p}{p^2}$

Exercice 12 : Soit $n \in \mathbb{N}$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$

telle qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ et $p \in]0,1[$ vérifiant

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(X=k)=a\binom{n+k}{k}p^k$$

Calculer l'espérance et la variance de X.

(*Indication :* commencer par déterminer le dse de $x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)^{n+1}}$)

Sol : En dérivant n fois : ou Produit de Cauchy...

avec rec pour la somme des binomiaux pénibles..

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k \quad \text{pour } x \in]-1,1[,$$

on obtient :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{n+k}{k} x^k = \frac{1}{(1-x)^{n+1}}$$

La propriété

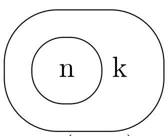
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathcal{P}(X=k) = 1$$

implique alors :

$$a = (1-p)^{n+1}$$

De plus, une nouvelle dérivation donne(ou la formule d'avant un cran au dessuspuis star Ac).

Attention c'est subtil ... $k\dbinom{n+k}{k} = (n+1)\dbinom{n+k}{n+1}$.

Faire dessin : 

que l'on compare avec , je prends (1+n) ds (n+k) puis je choisis l'exterieur parmi les (n+1).

$$Or, \quad \forall x \in]-1,1[, \ \sum_{k=0}^{+\infty} k\binom{n+k}{k} x^{k-1} = \frac{(n+1)}{(1-x)^{n+2}}$$

donc

$$E(X) = a\sum_{k=0}^{+\infty} k\binom{n+k}{k} p^k = a\frac{(n+1)p}{(1-p)^{n+2}} = \frac{(n+1)p}{1-p}$$

De même

$$E(X(X-1)) = \frac{(n+2)(n+1)p^2}{(1-p)^2}$$

puis

$$V(X) = E(X(X-1)) + E(X) - E(X)^2 = \frac{(n+1)p}{(1-p)^2}$$

Tout ok ...

Exercice 13 : Une usine fabrique des pièces dont une proportion inconnue p est défectueuse, et on souhaite trouver une valeur approchée de p. On effectue un prélèvement de n pièces. On suppose que le prélèvement se fait sur une population très grande, et donc qu'il peut s'apparenter à une suite de n tirages indépendants avec remise. On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de pièces défectueuses et on souhaite quantifier le fait que X_n/n approche p.

(1) Quelle est la loi de X_n ? Sa moyenne ? Sa variance ?

(2) Démontrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathcal{P}\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{1}{4n\varepsilon^2}$.

(3) En déduire une condition sur n pour que X_n/n soit une valeur approchée de p à 10^{-2} près avec une probabilité supérieure ou égale à 95%.

Sol :

(1) $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$. Donc $E(X_n) = np$ et $V(X_n) = np(1-p)$.

(2) On applique l'inégalité de B.T à X_n) :

$$\mathcal{P}(|X_n - E(X_n)| \geqslant a) \leqslant \frac{V(X_n)}{a^2}$$

Or :

$$\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon \Leftrightarrow |X_n - np| \geqslant n\varepsilon \Leftrightarrow |X_n - E(X_n)| \geqslant n\varepsilon$$

donc en prenant $a = n\varepsilon$ dans B.T on trouve :

$$P\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$$

et l'inégalité demandée résulte de l'inégalité « bien connue » :

$$\forall x \in]0,1[,\ x(1-x) \leqslant \frac{1}{4}$$

Remarque : c'est la démo de la loi faible des grands nombres !

(3) On cherche n tel que $\mathcal{P}\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| < 10^{-2}\right) \geqslant 0,95$ soit en prenant l'évènement contraire, $\mathcal{P}\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \geqslant 10^{-2}\right) \leqslant 0,05$.

Il suffit donc de choisir n tel que $\frac{1}{4n10^{-4}} \leqslant 0,05$ soit $n \geqslant 5.10^4$.

Exercice 14 : Une urne contient initialement une boule blanche et une boule rouge.

On effectue des tirages successifs d'une boule dans l'urne suivant le protocole suivant : après chaque tirage, la boule tirée est remise dans l'urne et on rajoute dans l'urne, avant le tirage suivant, une boule de la couleur de la boule qui vient d'être tirée.

Pour tout entier naturel n non nul,

on note X_n le nombre de boules blanches obtenues au cours des n premiers tirages.

(1) Déterminer la loi de X_1.

(2) Déterminer la loi de X_2.

(3) Conjecturer la loi de X_n et démontrer ce résultat par récurrence sur n.

Sol : On note B_i l'événement « on obtient une boule blanche au i-ième tirage » et R_i l'événement « on obtient une boule rouge au i-ième tirage ».

(1) $X_1(\Omega) = \{0; 1\}$, $\mathcal{P}(X_1 = 0) = \dfrac{1}{2}$ et $\mathcal{P}(X_1 = 1) = \dfrac{1}{2}$.

(2) $X_2(\Omega) = \{0; 1; 2\}$.

$$\mathcal{P}(X_2 = 0) = \mathcal{P}(R_1 \cap R_2) = \mathcal{P}(R_1)\mathcal{P}_{R_1}(R_2) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\mathcal{P}(X_2 = 1) = \mathcal{P}(B_1 \cap R_2) + \mathcal{P}(R_1 \cap B_2) = \mathcal{P}(B_1)\mathcal{P}_{B_1}(R_2) + \mathcal{P}(R_1)\mathcal{P}_{R_1}(B_2) = \frac{1}{3}$$

$$\mathcal{P}(X_2 = 2) = \mathcal{P}(B_1 \cap B_2) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

(3) Montrons par récurrence que la propriété $\mathcal{P}(n)$: « $X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$ et $\mathcal{P}(X_n = k) = \dfrac{1}{n+1}$ »est vraie pour tout entier n non nul.

- La propriété est vraie pour $n = 1$ et $n = 2$.

- Soit n un entier non nul fixé. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Après le n-ième tirage, d'après le protocole de l'expérience il y a au plus $n+1$ boules blanches dans l'urne donc $X_{n+1}(\Omega) = [\![0, n+1]\!]$. (Au total il y a $n+2$ boules dans l'urne)

– $\mathcal{P}(X_{n+1} = 0) = \mathcal{P}((X_n = 0) \cap R_{n+1}) = \mathcal{P}(X_n = 0) \times \mathcal{P}_{(X_n=0)}(R_{n+1}) = \dfrac{1}{n+1} \times \dfrac{n+1}{n+2} = \dfrac{1}{n+2}$

– Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Pour que l'on obtienne k boules blanches au cours des $n+1$ premier tirages, il faut avoir obtenu soit $k-1$ soit k boules blanches au cours des n premier tirages. Donc :

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(X_{n+1}=k) &= \mathcal{P}((X_n = k-1) \cap B_{n+1}) + \mathcal{P}((X_n = k) \cap R_{n+1}) \\
&= \mathcal{P}(X_n = k-1) P_{[X_n=k-1]}(B_{n+1}) + \mathcal{P}(X_n = k)\mathcal{P}_{(X_n=k)}(R_{n+1}) \\
&= \frac{1}{n+1} \times \frac{k}{n+2} + \frac{1}{n+1} \times \frac{n+2-(k+1)}{n+2} \\
&= \frac{1}{n+1} \times \frac{n+1}{n+2} = \frac{1}{n+2}
\end{aligned}$$

– $P(X_{n+1} = n+1) = \mathcal{P}((X_n = n) \cap B_{n+1}) = \mathcal{P}(X_n = n) \times \mathcal{P}_{(X_n=n)}(B_{n+1}) = \frac{1}{n+1} \times \frac{n+1}{n+2} = \frac{1}{n+2}$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

• Grâce au principe de récurrence on a montré que pour tout entier n non nul, $X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$ et $P(X_n = k) = \frac{1}{n+1}$: X_n suit la loi uniforme sur $[\![0, n]\!]$.

Exercice 15 : On suppose qu'à la roulette d'un Casino, on obtient la couleur noire avec la probabilité $1/2$, la couleur rouge sinon (on suppose donc qu'il n'y a pas de 0...).

Un joueur fortuné joue selon le protocole suivant :

– il mise initialement 1 brouzouf sur la couleur noire ;

– s'il gagne, il arrête de jouer et empoche le double de sa mise.

– s'il perd, il double sa mise et rejoue.

(1) On suppose la fortune du joueur infinie.

Montrer que le jeu s'arrête presque sûrement.

Déterminer l'espérance de gain du joueur.

(2) On suppose toujours la fortune du joueur infinie.

Que se passe-t-il si au lieu de doubler, il décide de tripler sa mise lorsqu'il rejoue ?

(3) Le joueur n'est en fait pas si fortuné qu'il le prétend : il ne possède que $2^n - 1$ brouzoufs ce qui l'autorise à ne pouvoir jouer que n parties.

Que devient son espérance de gain ?

Sol :

(1) Notons A_n l'événement « le jeu dure au moins n parties ».

Oui $A_{n+1} \subset A_n$.

$\mathcal{P}(A_n) = 1/2^{n-1}$.

A_{n+1} est la conjonction des événements indépendants A_n et « le rouge sort au $n+1$-ième tirage ».

Par continuité décroissante on obtient :

$$\mathcal{P}(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^\star} A_n) = \lim_{n\to+\infty} \mathcal{P}(A_n) = 0$$

L'arrêt du jeu est donc presque sûr.

Lorsque la partie s'arrête à la n-ième tentative, le joueur a perdu $1+2+\cdots+2^{n-1} = 2^n - 1$ brouzoufs et vient de gagner 2^n brouzoufs. Au total, il gagne 1 brouzouf. Son gain étant presque sûrement constant égal à 1 brouzoufs, son espérance de gain vaut 1 brouzouf.

(2) Avec ce nouveau protocole, lorsque la partie s'arrête à la n-ième tentative, le gain du joueur vaut

$$3^n - (1 + 3 + \cdots + 3^{n-1}) = \frac{3^n + 1}{2}$$

L'espérance de gain est (B_n arrêt au rang exactement n...) :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n+1}{2}\mathcal{P}(B_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n+1}{2^{n+1}} = +\infty(\text{écriture abusive !})$$

(3) Puisque le joueur ne peut disputer que n parties, son espérance de gain devient

$$\sum_{k=1}^{n} 1 \times \mathcal{P}(B_n) - (2^n - 1)\mathcal{P}(\bigcup_{k=n+1}^{+\infty} B_k) = 1 - \frac{1}{2^n} - (2^n - 1) \times \frac{1}{2^n} = 0.$$

Oui .

Exercice 16 : Une piste rectiligne est divisée en cases, numérotées 0, 1, 2, ... de gauche à droite. Une puce se déplace vers la droite, de 1 ou 2 cases au hasard à chaque saut. Au départ elle est sur la case 0. Soit X_n la variable aléatoire égale au numéro de la case occupée par la puce après n sauts.

(1) Déterminer la loi de probabilité de X_1, et calculer $E(X_1)$ et $V(X_1)$.

(2) On appelle Y_n la variable aléatoire égale au nombre de fois où la puce a sauté d'une case au cours des n premiers sauts. Déterminer la loi de Y_n, puis $E(Y_n)$ et $V(Y_n)$.

(3) Exprimer X_n en fonction de Y_n et en déduire la loi de probabilité de X_n,

puis $E(X_n)$ et $V(X_n)$.

Sol :

(1) Après 1 saut, la puce est soit sur la case 1 soit sur la case 2, donc $X_1(\Omega) = \{1, 2\}$. De plus d'après l'énoncé $\mathcal{P}(X_1 = 1) = \mathcal{P}(X_1 = 2) = \frac{1}{2}$.

Donc X_1 suite la loi uniforme sur $[\![1; 2]\!]$ et ainsi $E(X_1) = \frac{3}{2}$ et $V(X_1) = \frac{4-1}{12} = \frac{1}{4}$.

(2) Y_n est la variable aléatoire qui compte le nombre de réalisations de l'événement « la puce saute d'une case »(qui est de probabilité $\frac{1}{2}$) au cours de n expériences (n sauts) qui se réalisent dans des conditions identiques. Y_n suit donc une loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{2}$.

On a donc $Y_n(\Omega) = [\![0; n]\!]$ et pour tout $k \in Y_n(\Omega)$, $\mathcal{P}(Y_n = k) = \binom{n}{k}\frac{1}{2^n}$.

De plus d'après le cours $E(Y_n) = \frac{n}{2}$ et $V(Y_n) = \frac{n}{4}$

(3) Lorsque $Y_n = k$ cela signifie qu'au cours de ses n sauts la puce a fait k sauts d'une case et $n-k$ sauts de 2 cases donc elle est arrivée à la case numéro $k+2(n-k)$ c'est-à-dire $X_n = k + 2(n-k) = 2n - k$.

On a donc $X_n = 2n - Y_n$ et on peut en déduire que $X_n(\Omega) = [\![n; 2n]\!]$ et pour tout $k \in X_n(\Omega)$,

$$\mathcal{P}(X_n = k) = \mathcal{P}(Y_n = 2n - k) = \frac{1}{2^n}\binom{n}{2n-k}$$

De plus $E(X_n) = 2n - E(Y_n) = \frac{3n}{2}$ et $V(X_n) = (-1)^2 V(Y_n) = \frac{n}{4}$.

Exercice 17 : Trois joueurs lancent, chacun leur tour, un dé, puis recommencent dans le même ordre, jusqu'à ce qu'un joueur amène un 6. La partie s'arrête alors, le joueur qui a amené un 6 a gagné. Le dé est truqué et la probabilité d'obtenir 6 est p, avec $0 < p < 1$.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de lancers effectués lors de la partie.

(1) Quelle est la loi de X ?

(2) En déduire la probabilité de gagner de chacun des joueurs.

Sol :

(1) X correspond au rang du 1er succès dans une suite d'épreuves de Bernoulli,

donc $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.

(2) L'événement A=« le 1er joueur gagne »est la réunion disjointe

des événements $(X = 3k+1)$ pour $k \in \mathbb{N}$.

Donc $\mathcal{P}(A) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} p(1-p)^{3k} = \frac{p}{1-q^3} = \frac{1}{1+q+q^2}$ en notant $q = 1-p$.

On trouve de la même manière $\mathcal{P}(B) = \dfrac{q}{1+q+q^2}$ et $\mathcal{P}(C) = \dfrac{q^2}{1+q+q^2}$.

On remarque que $\mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B) + \mathcal{P}(C) = 1$, ce qui signifie que, presque sûrement, l'un des trois joueurs gagne, ou encore qu'il est quasi certain que la partie se termine.

Exercice 18 : On tire un nombre entier naturel X au hasard, et on suppose que X suit la loi de Poisson de paramètre $a > 0$. Si X est impair, Pierre gagne et reçoit X brouzoufs de Paul. Si X est pair supérieur ou égal à 2, Paul gagne et reçoit X brouzoufs de Pierre. Si $X = 0$, la partie est nulle.

On note p la probabilité que Pierre gagne et q la probabilité que Paul gagne.

(1) En calculant $p + q$ et $p - q$, déterminer la valeur de p et de q.

(2) Déterminer l'espérance des gains de chacun.

Sol :

(1) Si r est la probabilité que la partie soit nulle,

on a $p + q + r = 1$ donc $p + q = 1 - r = 1 - \mathcal{P}(X = 0) = 1 - \mathrm{e}^{-a}$.

D'autre part :

$$\begin{aligned} p - q &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{P}(X = 2n+1) - \sum_{n=1}^{+\infty} \mathcal{P}(X = 2n) \\ &= \mathrm{e}^{-a} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^{2n}}{(2n)!} \right) \\ &= \mathrm{e}^{-a} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1} a^k}{k!} = \mathrm{e}^{-a}(1 - \mathrm{e}^{-a}). \end{aligned}$$

On en déduit :

$$p = \frac{1 - \mathrm{e}^{-2a}}{2} \quad , \quad q = \frac{(1 - \mathrm{e}^{-a})^2}{2}$$

(2) Notons G le gain de Pierre. Si X est pair non nul alors $G = -X$ sinon $G = X$.

G admet une espérance si la série de terme général $n\mathcal{P}(G = n)$ est absolument convergente, ce qui équivaut à dire que la série de terme général $n\mathcal{P}(X = n)$ l'est ce qui est le cas puisque X suit la loi de Poisson donc son espérance existe. On a donc :

$$\begin{aligned} E(G) &= (\sum_{n=0}^{+\infty} (-2n) \frac{a^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1) \frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!}) \, \mathrm{e}^{-a} \\ &= -e^{-a} \sum_{n=0}^{+\infty} n \frac{(-1)^n a^n}{n!} \\ &= -e^{-a} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-a)^n}{(n-1)!} = -e^{-a}(-a) \, \mathrm{e}^{-a} = a \, \mathrm{e}^{-2a} . \end{aligned}$$

L'espérance de gain de Paul est évidemment égale à -$E(G)$.

Exercice 19 : Soients $p]0,1[$ et $r \in \mathbb{N}^*$. Pascal.

Une bactérie se trouve dans une enceinte fermée à l'instant $t = 0$.

À chaque instant à partir de $t = 1$ on envoie un rayon laser dans l'enceinte qui,

à chaque tir et de façon indépendante, a une probabilité p de toucher la bactérie.

La bactérie meurt lorsqu'elle a été touchée r fois.

On note X sa durée de vie.

Déterminer la loi de X puis calculer son espérance si elle existe.

Sol : $X(\Omega)=\{r,r+1,\dots\}\cup\{+\infty\}$.

Pour $n\geqslant r$, l'évènement $(X=n)$ correspond au fait que la bactérie a été touchée $r-1$ fois lors des $n-1$ premiers tirs et a été touchée au n-ième.

Donc : $\mathcal{P}(X=n)=\left(\binom{n-1}{r-1}p^{r-1}q^{n-r}\right)p=\binom{n-1}{r-1}p^rq^{n-r}$ en posant $q=1-p$.

On a alors :

$$\sum_{n=r}^{+\infty}\mathcal{P}(X=n)=\frac{p^r}{(r-1)!}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(k+r-1)!}{k!}q^k.$$

Cette dernière somme s'obtient en dérivant $r-1$ fois la série entière $\sum x^n$ (classique) et permet de trouver $\sum_{n=r}^{+\infty}\mathcal{P}(X=n)=1$ d'où l'on déduit $\mathcal{P}(X=+\infty)=0$.

La série de terme général $n\mathcal{P}(X=n)$ converge car son terme général est un $o(\frac{1}{n^2})$ et

$$E(X)=\sum_{n=r}^{+\infty}n\binom{n-1}{r-1}p^rq^{n-r}=\frac{p^r}{(r-1)!}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(k+r)!}{k!}q^k=\frac{p^r}{(r-1)!}\frac{r!}{q^{r+1}}=\frac{r}{p}$$

Exercice 20 : Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda>0$.

Déterminer la probabilité que la valeur de X soit paire.

Sol : L'événement X est pair est la réunion dénombrable des évènements $(X=2k)$

pour $k\in\mathbb{N}$.

Sa probabilité vaut

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\mathcal{P}(X=2k)=\sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^{2k}}{(2k)!}=\mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{ch}(\lambda)=\frac{1+\mathrm{e}^{-2\lambda}}{2}$$

Exercice 21 : Soit X une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p.

Calculer $E\left(\dfrac{1}{X}\right)$.

Sol : Par le théorème de transfert

$$E\left(\frac{1}{X}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}(1-p)^{k-1}p = \frac{p}{1-p}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(1-p)^k}{k}$$

Or pour $x \in]-1,1[$: Savoir reonnaitre les dse du cours.

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}x^k = -\ln(1-x)$$

donc : $E\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{p}{p-1}\ln p$.

Exercice 22 : Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

Calculer $E\left(\frac{1}{X+1}\right)$

Sol : Par le théorème de Transfert

$$E\left(\frac{1}{X+1}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k+1}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{(k+1)!}$$

Or

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{(k+1)!} = \frac{1}{\lambda}(\mathrm{e}^{\lambda}-1)$$

donc : $E\left(\frac{1}{X+1}\right) = \frac{1-\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda}$

Exercice 23 :

Soient X et Y 2 VAI suivant les lois géométriques de paramètres p et q respectivement.

Calculer l'espérance de $Z = \max(X, Y)$.

Cohérent avec exo 0, attention aux rôles de p et q.

Rappel de cours $\mathcal{P}(X \geqslant n) = q^{n-1}$. Attention aux inégalités strictes...

Sol : On a

$$(Z > n) = (X > n) \cup (Y > n)$$

donc

$$\mathcal{P}(Z > n) = \mathcal{P}(X > n) + \mathcal{P}(Y > n) - \mathcal{P}(X > n,\ Y > n)$$

Par indépendance :

$$\mathcal{P}(Z > n) = \mathcal{P}(X > n) + \mathcal{P}(Y > n) - \mathcal{P}(X > n)\mathcal{P}(Y > n)$$

Puisque les lois de X et Y sont géométriques

$$\mathcal{P}(Z > n) = (1-p)^n + (1-q)^n - (1-p)^n(1-q)^n.$$

Or par antirépartition (oui).

$$E(Z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{P}(Z > n)$$

donc :

$$E(Z) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{p+q-pq}$$

Exercice 24 :

Soient X et Y 2 VAI suivant les lois géométriques de paramètres p et q respectivement.

Calculer $\mathcal{P}(Y > X)$.

Sol : L'événement $(Y > X)$ est la réunion disjointe des évènements $(X = k) \cap (Y > k)$

lorsque k décrit $\mathbb{N}^*$.

Par indépendance, $\mathcal{P}(X = k) \cap (Y > k) = \mathcal{P}(X = k)\mathcal{P}(Y > k) = p(1-p)^{k-1}(1-q)^k$.

On somme et on trouve que la probabilité demandée vaut $\dfrac{p(1-q)}{p+q-pq}$.

Exercice 25 : On considère une variable aléatoire X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$. On définit la variable aléatoire Y par :

$$\forall \omega \in \Omega,\ Y(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } X(\omega) \text{ impair} \\ \frac{X(\omega)}{2} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Déterminer la loi de Y et son espérance dans les deux cas suivants :

(1) X suit la loi géométrique de paramètre $p \in]-1, 1[$.

(2) X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

Sol :

(1) $Y(\Omega) = \mathbb{N}$.

L'événement $(Y = 0)$ est la réunion disjointe des évènements $(X = 2k + 1)$ donc

$$\mathcal{P}(Y = 0) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathcal{P}(X = 2k + 1) = \sum_{k=0}^{+\infty} p(1 - p)^{2k} = \frac{1}{2 - p}$$

Puis

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{P}(Y = n) = \mathcal{P}(X = 2n) = p(1 - p)^{2n-1}.$$

On trouve ensuite que l'espérance de Y existe et vaut

$$E(Y) = \frac{1 - p}{p(2 - p)^2}$$

à l'aide de la dérivée de la série géométrique $\sum x^n$.

(2) On trouve ici :

$$\mathcal{P}(Y = 0) = \frac{1 + 2\,\mathrm{e}^{-\lambda} - \mathrm{e}^{-2\lambda}}{2} \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{P}(X = n) = \mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{\lambda^{2n}}{(2n)!}$$

puis $E(Y) = \dfrac{\lambda(1 - \mathrm{e}^{-2\lambda})}{4}$.

Exercice 26 : Chez un marchand de journaux,

on peut acheter des pochettes contenant chacune une image.

La collection complète comporte en tout N images distinctes. On note X_k le nombre d'achats ayant permis l'obtention de k images distinctes. En particulier, $X_1 = 1$ et X_N est le nombre d'achats nécessaires à l'obtention de la collection complète.

(1) Par quelle loi peut-on modéliser la variable $X_{k+1} - X_k$?

(2) En déduire l'espérance de X_N.

Sol :

(1) On a $X_{k+1} - X_k = n$ ssi on tire $n - 1$ images déjà obtenues puis une image nouvelle.

La proportion du nombre d'images déjà obtenues est k/N et donc

$$\mathcal{P}(X_{k+1} - X_k = n) = \left(\frac{k}{N}\right)^{n-1} \frac{N - k}{N} = \frac{k^{n-1}(N - k)}{N^n}$$

On identifie une loi $\mathcal{G}(p)$ avec, $p = (N-k)/N$ et d'espérance $N/(N-k)$.

(2) Par télescopage

$$E(X_N) = \sum_{k=1}^{N-1} E(X_{k+1} - X_k) + E(X_1) = N \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}$$

On remarque que $E(X_N) \underset{N \to +\infty}{\sim} N \ln N$...

Les voleurs...

Couples de variables aléatoires

Exercice 27 : .Une urne contient 2 boules blanches et $n-2$ boules rouges. On effectue n tirages sans remise de cette urne. On appelle X le rang de sortie de la première boule blanche et Z le rang de sortie de la deuxième boule blanche.

(1) Déterminer la loi du couple (X, Z).

(2) En déduire la loi de Z.

Sol :

(1) On a ici $X(\Omega) = [\![1; n-1]\!]$ et $Z(\Omega) = [\![2; n]\!]$. Soit $k \in X(\Omega)$ et $j \in Z(\Omega)$.

- Si $k \geqslant j$ alors $\mathcal{P}((X = k) \cap (Z = j)) = 0$.

- Si $k < j$ alors on peut écrire $(X = k) \cap (Z = j) = R_1 \cap \cdots R_{k-1} \cap B_k \cap R_{k+1} \cap \cdots \cap R_{j-1} \cap B_j$ et donc d'après la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}((X = k) \cap (Z = j)) &= \frac{n-2}{n} \times \frac{n-3}{n-1} \times \cdots \times \frac{n-2-(k-2)}{n-(k-2)} \times \frac{2}{n-(k-1)} \\
&\quad \times \frac{n-2-(k-1)}{n-k} \times \cdots \times \frac{n-2-(j-3)}{n-(j-2)} \times \frac{1}{n-(j-1)} \\
&= \frac{(n-2)(n-3)\cdots(n-k) \times 2 \times (n-k-1)\cdots(n-j+1)}{n(n-1)(n-2)\cdots(n-j+1)} \\
&= \frac{2}{n(n-1)}
\end{aligned}$$

(2) D'après la formule des probabilités totales utilisée avec le SCE

$((X=k))_{k\in X(\Omega)}$, on a pour tout $j \in Z(\Omega)$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(Z=j) &= \sum_{k=1}^{n-1} \mathcal{P}((X=k)\cap(Z=j)) \\
&= \sum_{k=1}^{j-1} \mathcal{P}((X=k)\cap(Z=j) + \sum_{k=j}^{n-1} \mathcal{P}((X=k)\cap(Z=j)) \\
&= \sum_{k=1}^{j-1} \frac{2}{n(n-1)} + \sum_{k=j}^{n-1} 0 = \frac{2(j-1)}{n(n-1)}
\end{aligned}$$

Exercice 28 : On dispose de n boîtes numérotées de 1 à n.

La boîte k contient k boules numérotées de 1 à k.

On choisit au hasard une boîte puis une boule dans cette boîte.

Soit X le numéro de la boîte et Y le numéro de la boule.

(1) Déterminer la loi du couple (X,Y).

(2) Calculer $\mathcal{P}(X=Y)$.

(3) Déterminer la loi de Y et $E(Y)$.

Sol :

(1) On a $X(\Omega) = [\![1;n]\!]$ et $Y(\Omega) = [\![1;n]\!]$. Soit $k \in X(\Omega)$ et $j \in Y(\Omega)$.

- Si $j > k$ alors $\mathcal{P}((X=k)\cap(Y=j)) = 0$ car il est impossible de tirer une boule numérotée j dans l'urne k lorsque $j > k$.

- Si $j \leqslant k$ alors $\mathcal{P}((X=k)\cap(Y=j)) = \mathcal{P}(X=k)\mathcal{P}_{(X=k)}(Y=j) = \dfrac{1}{n} \times \dfrac{1}{k} = \dfrac{1}{nk}$.

(2) $\mathcal{P}(X=Y) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathcal{P}((X=k)\cap(Y=k)) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{nk} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

(3) D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements

$((X=k))_{k\in[\![1;n]\!]}$ on a :

$$\mathcal{P}(Y=j) = \sum_{k=1}^{n} \mathcal{P}((X=k)\cap(Y=j)) = \sum_{k=j}^{n} \frac{1}{nk} = \frac{1}{n}\sum_{k=j}^{n}\frac{1}{k}$$

Y est une variable aléatoire discrète finie donc elle admet une espérance et on a :

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{j=1}^{n} j\mathcal{P}(Y=j) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=j}^{n} \frac{j}{kn} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} \frac{j}{kn} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{kn} \times \frac{k(k+1)}{2} \\ &= \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}(k+1) = \frac{1}{2n} \times \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1\right) = \frac{n+3}{4} \end{aligned}$$

Exercice 29 : Soit un dé équilibré comprenant 1 face blanche et 5 faces rouges. On lance ce dé indéfiniment et on s'intéresse aux longueurs des séries successives de B ou R : par exemple si les lancers donnent les résultats $BBRRRRRRBBBRR\dots$ alors la première série (BB) est de longueur 2 et la deuxième $(RRRRRR)$ est de longueur 6.

Soient X_1 et X_2 les variables aléatoires égales aux longueurs de la première et deuxième série.

(1) Déterminer la loi de X_1. Montrer que X_1 admet une espérance et la calculer.

(2) Déterminer la loi du couple (X_1, X_2).

(3) En déduire la loi de X_2.

(4) En considérant $\mathcal{P}((X_1=1)\cap(X_2=1))$ mq X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

Sol :

(1) On a $X_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$ car on lance le dé indéfiniment donc la première série peut être de n'importe quelle longueur non nulle.

De plus soit $k \in \mathbb{N}^*$, on a $[X_1 = k] = (B_1 \cap \dots \cap B_k \cap R_{k+1}) \cup (R_1 \cap \dots \cap R_k \cap B_{k+1})$ donc comme on a une union d'événements incompatibles et que les lancers sont indépendants, on a

$$\mathcal{P}(X_1 = k) = \left(\frac{1}{6}\right)^k \times \frac{5}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^k \times \frac{1}{6}$$

Si la série $\sum k\mathcal{P}(X_1 = k)$ est absolument convergente, X_1 admettra une espérance.

En cas de convergence on aura :

$$\begin{aligned} E(X_1) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k \times \frac{5}{6} \times \left(\frac{1}{6}\right)^k + \sum_{k=1}^{+\infty} k \times \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^k \\ &= \frac{5}{6} \times \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{1}{6}\right)^{k-1} + \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \end{aligned}$$

On voit ici deux séries dérivées premières de série géométrique de raison $\frac{1}{6}$ et $\frac{5}{6}$ donc ce sont deux séries convergentes.

Ainsi X_1 admet une espérance et

$$E(X_1) = \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} \frac{1}{(1-1/6)^2} + \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \frac{1}{(1-5/6)^2} = \frac{26}{5}$$

(2) On a $X_2(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Soit $k \in X_1(\Omega)$ et $j \in X_2(\Omega)$. On peut écrire :

$$\begin{aligned}[X_1 = k] \cap [X_2 = j] = &(B_1 \cap \cdots \cap B_k \cap R_{k+1} \cap \cdots \cap R_{k+j} \cap B_{k+j+1}) \\ &\cup (R_1 \cap \cdots \cap R_k \cap B_{k+1} \cap \cdots \cap B_{k+j} \cap R_{k+j+1})\end{aligned}$$

donc comme on a une union d'événements incompatibles et que les lancers sont indépendants :

$$\mathcal{P}((X_1 = k) \cap (X_2 = j)) = \frac{1}{6^k} \times \frac{5^j}{6^j} \times \frac{1}{6} + \frac{5^k}{6^k} \times \frac{1}{6^j} \times \frac{5}{6} = \left(\frac{1}{6}\right)^{k+1} \left(\frac{5}{6}\right)^j + \left(\frac{5}{6}\right)^{k+1} \left(\frac{1}{6}\right)^j.$$

(3) D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $((X_1 = k))_{k \in \mathbb{N}^*}$ on a :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(X_2 = j) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathcal{P}((X_1 = k) \cap (X_2 = j)) \\ &= \left(\frac{5}{6}\right)^j \times \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^k + \frac{5}{6} \times \left(\frac{1}{6}\right)^j \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^k \\ &= \left(\frac{5}{6}\right)^j \times \frac{1}{6} \times \frac{1/6}{1-1/6} + \frac{5}{6} \times \left(\frac{1}{6}\right)^j \times \frac{5/6}{1-5/6} \\ &= \left(\frac{5}{6}\right)^{j-1} \times \frac{1}{36} + \frac{25}{36} \times \left(\frac{1}{6}\right)^{j-1}\end{aligned}$$

(4) On a $\mathcal{P}((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1)) = \frac{30}{6^3} = \frac{5}{36}$ et $\mathcal{P}(X_1 = 1) \times \mathcal{P}(X_2 = 1) = \frac{5}{18} \times \frac{13}{18} = \frac{65}{324}$

On a donc $\mathcal{P}((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1)) \neq \mathcal{P}(X_1 = 1) \times \mathcal{P}(X_2 = 1)$

donc les variables ne sont pas indépendantes.

Exercice 30 : X_1 et X_2 2 VAI qui suivent la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Soit

$$A = \begin{pmatrix} X_1 & 1 \\ 0 & X_2 \end{pmatrix}.$$

Quelle est la probabilité que A soit diagonalisable ?

Sol : La matrice étant triangulaire, ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux

à savoir X_1 et X_2.

Si $X_1 \neq X_2$, elle est diagonalisable, sinon elle ne l'est pas car sinon elle devrait être

semblable donc égale à un matrice scalaire.

Or :

$$\mathcal{P}(X_1 = X_2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathcal{P}((X_1 = k) \cap (X_2 = k)) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathcal{P}((X_1 = k)\mathcal{P}(X_2 = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} p^2(1-p)^{2k-2} = \frac{p}{2-p}$$

La probabilité cherchée est donc

$$1 - \frac{p}{2-p} = \frac{2(1-p)}{2-p}$$

Exercice 31 : Un insecte pond des œufs.

Le nombre d'œufs pondus est une variable aléatoire X suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

Chaque œuf a une probabilité p d'éclore, indépendante des autres œufs.

Soit Z le nombre d'œufs qui ont éclos.

(1) Pour $(k,n) \in \mathbb{N}^2$, calculer $\mathcal{P}(Z = k | X = n)$.

(2) En déduire la loi de Z ?

(3) Quelle est l'espérance de Z ?

Sol :

(1) Si l'on sait que $X = n$, le nombre d'œufs qui ont éclos suit la loi binomiale

de paramètre p donc

$$\mathcal{P}(Z = k \mid X = n) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} & \text{si } 0 \leqslant k \leq n \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

(2) On applique la formule des probabilités totales (SCE$X = n$)conditionnement :

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(Z=k) &= \sum_{n=k}^{+\infty} \mathcal{P}(Z=k \mid X=n)\mathcal{P}(X=n) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\,\lambda^n}{n!} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\,p^k\lambda^k}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{(\lambda(1-p))^{n-k}}{(n-k)!} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\,p^k\lambda^k}{k!} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(\lambda(1-p))^{i}}{i!} = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\,p^k\lambda^k}{k!}\ \mathrm{e}^{\lambda(1-p)} = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda p}(\lambda p)^k}{k!}
\end{aligned}$$

Z suit donc la loi de Poisson de paramètre λp.

(3) Formule du cours : $E(Z) = \lambda p$.

Exercice 32 : Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires de Bernoulli de paramètre p, indépendantes. Soit $Y_i = X_i X_{i+1}$.

(1) Quelle est la loi de Y_i ?

(2) Soit $S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$. Calculer $E(S_n)$ et $V(S_n)$.

Sol :

(1) On a $Y_i(\Omega) = \{0;1\}$ et $\mathcal{P}(Y_i = 1) = \mathcal{P}((X_i = 1) \cap (X_{i+1} = 1)) = p \times p = p^2$

car les variables X_i sont indépendantes. Donc on a $\mathcal{P}(Y_i = 0) = 1 - p^2$.

Y_i suit une loi de Bernoulli de paramètre p^2.

(2) D'après la linéarité de l'espérance, $E(S_n) = \sum_{i=1}^{n} E(Y_i) = np^2$.

On sait aussi que $V(S_n) = \sum_{i=1}^{n} V(Y_i) + 2 \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \mathrm{cov}(Y_i, Y_j)$.

Or $E(Y_iY_j) = \mathcal{P}(Y_iY_j = 1) = \mathcal{P}((X_i = 1) \cap (X_{i+1} = 1) \cap (X_j = 1) \cap (X_{j+1} = 1))$.

Donc si $j \neq i+1$ alors $E(Y_iY_j) = p^4$ et si $j = i+1$, $E(Y_iY_j) = p^3$.

Donc si $j \neq i+1$ alors $\operatorname{cov}(Y_i, Y_j) = 0$ et si $j = i+1$, $\operatorname{cov}(Y_i, Y_{i+1}) = p^3(1-p)$.

On a donc $V(S_n) = np^2(1-p^2) + 2(n-1)p^3(1-p) = p^2(1-p)(n+3np-2p)$.

Exercice 33 : Soit (X, Y) un couple de VAD à valeurs dans $\mathbb{N}^2$, de loi conjointe :

$$\mathcal{P}((X=i)\cap(Y=j)) = \frac{a}{2^{i+1}j!}$$

(1) Déterminer toutes les valeurs possibles de a.

(2) Déterminer les lois marginales.

(3) X et Y sont-elle indépendantes ?

Sol :

(1) Il faut choisir a pour que $\displaystyle\sum_{i,j} \mathcal{P}((X=i)\cap(Y=j)) = 1$.

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} \mathcal{P}((X=i)\cap(Y=j)) = \sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{a}{2^{i+1}j!} = \sum_{j=0}^{+\infty}\left(\frac{a}{2j!}\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{1}{2^i}\right) = \sum_{j=0}^{+\infty}\left(\frac{a}{2j!}\times 2\right) = \sum_{j=0}^{+\infty}\frac{a}{j!} = a\,\mathrm{e}$$

Donc il faut prendre $a = e^{-1}$.

(2) • $\forall i \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(X=i) = \dfrac{1}{2^{i+1}}$

• $\forall j \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(Y=j) = \dfrac{\mathrm{e}^{-1}}{j!}$

(3) On a $\mathcal{P}((X=i)\cap(Y=j)) = \mathcal{P}(X=i)\mathcal{P}(Y=j)$

donc les variables sont indépendantes.

Exercice 34 : Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ et $p \in]0,1[$.

On suppose que la loi conjointe de X et Y vérifie

$$P(X=k, Y=n) = \begin{cases} \dbinom{n}{k} a^n p(1-p)^n & \text{si } k \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{avec } a \in \mathbb{R}$$

(1) Déterminer la valeur de a.

(2) Déterminer la loi marginale de Y.

(3) Démontrer que :

$$\forall x \in]-1,1[\,,\ \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}},$$

puis reconnaître la loi de X.

(4) Les variables X et Y sont elle indépendantes ?

Sol : a) La loi conjointe de X et Y déterminant une probabilité :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{P}(X=k,\ Y=n) = 1.$$

En réordonnant les sommes et en simplifiant les zéros

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} \mathcal{P}(X=k,\ Y=n) = \sum_{n=0}^{+\infty} p(2a(1-p))^n = p\frac{1}{1-(2a(1-p))}$$

On est donc amené à résoudre l'équation

$$1-2a(1-p) = p$$

ce qui conduit à la solution $a = 1/2$.

b) Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{P}(Y=n) = \sum_{k=0}^{n} \mathcal{P}(X=k,\ Y=n) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} p(1-p)^n = p(1-p)^n = pq^n$$

Le nombre d'échecs avant ... Géom décalée, on compte les échecs avant ...

c) Pour $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{P}(X=k) = \sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k} p \left(\frac{1-p}{2}\right)^n = p\left(\frac{1-p}{2}\right)^k \frac{1}{\left(1-\frac{1-p}{2}\right)^{k+1}}$$

En simplifiant

$$\mathcal{P}(X=k)=\left(1-\frac{1-p}{1+p}\right)\left(\frac{1-p}{1+p}\right)^k$$

d) Les variables ne sont par indépendantes car l'on vérifie aisément

$\mathcal{P}(X=k,\ Y=n)\neq\mathcal{P}(X=k)\mathcal{P}(Y=n)$ pour $k=n=0$.

C'était limpide...Car $n=0$ ramène à $k=0$.

Fonctions génératrices

Exercice 35 : Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les réels a et k pour que la suite (p_n) définie, pour $n\geqslant 0$, par $p_n=k\left(\dfrac{a}{a+1}\right)^n$ soit la loi de probabilité d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Donner alors la fonction génératrice d'une telle variable aléatoire et le rayon.

Sol : On écrit que $p_n\geqslant 0$ pour tout n et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}p_n=1$. Cela équivaut à : $a\geqslant 0$ et $k=\dfrac{1}{a+1}$.

On trouve ensuite que la fonction génératrice est l'application $t\mapsto\dfrac{1}{a+1-at}$

(banals calculs sur les séries géométriques).

$R=\dfrac{a+1}{a}>1$, ouf.

Exercice 36 : Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda>0$.

(1) Calculer
$$E\big(X(X-1)\dots(X-r+1)\big).$$
(2) Retrouver ce résultat par les fonctions génératrices.

Sol :

(1) Par la formule de transfert

$$E(X(X-1)\dots(X-r+1))=\sum_{k=r}^{+\infty}\frac{k!}{(k-r)!}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}=\lambda^r$$

(2) La fonction génératrice de X est
$$G_X(t)=E(t^X)=\mathrm{e}^{\lambda(t-1)}$$
Celle-ci est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$G_X^{(r)}(t) = E(X(X-1)\dots(X-r+1)t) = \lambda^r \mathrm{e}^{\lambda(t-1)}$$

En particulier

$$G_X^{(r)}(1) = E(X(X-1)\dots(X-r+1)) = \lambda^r.$$

Exercice 37 :

Soit X une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.

(1) Calculer

$$E\big(X(X-1)\dots(X-r+1)\big).$$

(2) Retrouver ce résultat par les fonctions génératrices.

Sol :

(1) Par la formule de transfert

$$E(X(X-1)\dots(X-r+1)) = \sum_{k=r}^{+\infty} k(k-1)\dots(k-r+1)(1-p)^{k-1}p$$

Or

$$\sum_{k=r}^{+\infty} k(k-1)\dots(k-r+1)x^{k-r} = \frac{\mathrm{d}^r}{\mathrm{d}x^r}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{r!}{(1-x)^{r+1}}$$

donc

$$E(X(X-1)\dots(X-r+1)) = (1-p)^{r-1}\frac{r!}{p^r}$$

(2) La fonction génératrice de X est

$$G_X(t) = E(t^X) = \frac{pt}{1-(1-p)t} = \frac{p}{p-1} + \frac{1}{1-(1-p)t}\frac{p}{1-p}$$

Celle-ci est indéfiniment dérivable sur $\left]-\frac{1}{q}, \frac{1}{q}\right[$ et

$$G_X^{(r)}(t) = E(X(X-1)\dots(X-r+1)t^X) = \frac{p}{1-p}\frac{r!(1-p)^r}{(1-(1-p)t)^{r+1}}$$

En particulier

$$G_X^{(r)}(1) = E(X(X-1)\dots(X-r+1)) = r!\frac{(1-p)^{r-1}}{p^r}.$$

Exercice 38 : Soit une expérience aléatoire ayant la proba p de réussir et $1-p$ d'échouer.

On répète l'expérience indépendamment jusqu'à obtention de m succès et on note

X le nombre d'essais nécessaires à l'obtention de ces m succès.

(1) Reconnaître la loi de X lorsque $m = 1$.

(2) Déterminer la loi de X dans le cas général $m \in \mathbb{N}^\star$.

(3) Exprimer le développement en série entière de $\dfrac{1}{(1-t)^m}$.

(4) Déterminer la fonction génératrice de X et en déduire l'espérance de X.

Sol :

(1) X suit la loi géométrique de paramètre p.

(2) Notons $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite des variables de Bernoulli testant la réussite

de chaque expérience.

L'événement $(X = n)$ est la réunion des événements $(X_1+\ldots+X_n = m)$ et $(X_n = 1)$

soit encore $(X_1 + \ldots + X_{n-1} = m - 1)$ et $(X_n = 1)$.

Par indépendance

$$\mathcal{P}(X = n) = \mathcal{P}(X_1 + \ldots + X_{n-1} = m - 1)\mathcal{P}(X_n = 1).$$

Puisque $X_1 + \ldots + X_{n-1} \hookrightarrow \mathcal{B}(n - 1, p)$ et $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, on obtient

$$\mathcal{P}(X = n) = \binom{n-1}{m-1} p^m (1-p)^{n-m}.$$

et cette écriture vaut aussi quand $n \leqslant m$ car le coefficient binomial est alors nul.

(3) En exploitant le développement connu de $(1 + u)^\alpha$, on obtient

$$\frac{1}{(1t-)^m} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{m-1}{n+m-1} \text{ pour } t \in]-1, 1[$$

(4) Par définition
$$G_X(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n-1}{m-1}p^m(1-p)^{n-m}t^n.$$
d'où après chgt d'indices
$$G_X(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n+m-1}{m-1}(pt)^m((1-p)t)^n=\frac{(pt)^m}{(1-(1-p)t)^m}.$$
On en déduit
$$E(X)=G'_X(1)=\frac{m}{p}$$

Exercice 41 : On considère une expérience aléatoire ayant la probabilité p de réussir et $q=1-p$ d'échouer définissant une suite de variables de Bernoulli indépendantes $(X_n)_{n\geqslant 1}$.

Pour $m\in\mathbb{N}^\star$, on note S_m la variable aléatoire déterminant le nombre d'essais jusqu'à l'obtention de m succès :

$$S_m=k\Leftrightarrow X_1+\cdots+X_k=m \text{ et } X_1+\cdots+X_{k-1}<m$$

(1) Déterminer la loi et la fonction génératrice de S_1.

(2) Même question avec S_m-S_{m-1} pour $m\geqslant 2$.

(3) Déterminer la fonction génératrice de S_m puis la loi de S_m.

Sol :

(1) S_1 suit une loi géométrique de paramètre p et $G_{S_1}(t)=\dfrac{pt}{1-qt}$.

(2) S_m-S_{m-1} suit aussi une loi géométrique de paramètre p.

(3) Or ces variables aléatoires sont indépendantes car la probabilité d'un événement de la forme

$$(S_1-S_0=n_1,S_2-S_1=n_2,\ldots,S_m-S_{m-1}=n_m)$$
est celle de l'événement

$$X_{n_1}=X_{n_1+n_2}=\ldots=X_{n_1+\ldots n_m}=1$$

et ces variables sont indépendantes.

Donc puisque $S_m = \sum_{k=1}^{m} S_k - S_{k-1}$ $(S_0 = 0)$ on a

$$G_{S_m}(t) = \left(\frac{pt}{1-qt}\right)^m$$

d'où avec le DSE de $\dfrac{1}{(1-X)^m}$

$$G_{S_m}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{m+n-1}{m-1} q^n p^m t^{n+m}$$

et

$$\mathcal{P}(S_m = n) = \binom{n-1}{m-1} q^{n-m} p^m.$$

Exercice 42 : (***).Soit $X_1, X_2, \ldots$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes une même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. Soit aussi N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendantes des précédentes.

On pose :

$X = \sum_{k=1}^{N} X_k$ et $Y = \sum_{k=1}^{N} (1 - X_k)$

(1) Pour $t, u \in [-1, 1]$, exprimer à l'aide de la fonction génératrice de N

$$G(t,u) = E\left(t^X u^Y\right)$$

(2) On suppose que N suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

Montrer que les variables X et Y sont indépendantes.

(3) Inversement, on suppose que les variables X et Y sont indépendantes.

Montrer que N suit une loi de Poisson.

Sol :

(1) Par définition

$$E(t^X u^Y) = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{l=0}^{+\infty} t^k u^l \mathcal{P}(X=k,\ Y=\ell)$$

En regroupant par paquets selon la valeur de $X+Y$

$$E(t^X u^Y) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} t^k u^{n-k} \mathcal{P}(X=k,\ Y=n-k)$$

Or

$$(X=k,\ Y=n-k) = (X_1+\cdots+X_n=k)\cap(N=n)$$

donc

$$E(t^X u^Y) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} t^k u^{n-k} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k q^{n-k} \mathcal{P}(N=n)$$

en notant $q=1-p$. On obtient ainsi

$$E(t^X u^Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{P}(N=n)(pt+qu)^n = G_N(pt+qu)$$

(2) Si N suit la loi de Poisson alors $G_N(t) = \mathrm{e}^{\lambda(t-1)}$ puis

$$G(t,\ u) = \mathrm{e}^{\lambda p(t-1)} \times \mathrm{e}^{\lambda q(u-1)}$$

En particulier

$$G_X(t) = G(t,\ 1) = \mathrm{e}^{\lambda p(t-1)} \text{ et } G_Y(t) = G(1,\ u) = \mathrm{e}^{\lambda q(u-1)}$$

La variable X suit une loi de Poisson de paramètre λp tandis que Y suit une loi de Poisson de paramètre λq.

De plus

$$G(t,\ u) = \mathrm{e}^{\lambda p(t-1)} \times \mathrm{e}^{\lambda q(u-1)} = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{l=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^k}{k!}\mathrm{e}^{-\mu q}\frac{(\lambda q)^l}{\ell!} t^k u^l$$

En identifiant les coefficients (ce qui est possible en considérant une série entière en u dont les coefficients sont des séries entières en t), on obtient

$$\mathcal{P}(X=k,\ Y=\ell) = \mathrm{e}^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda q}\frac{(\lambda q)^k}{k!} = \mathcal{P}(X=k)\mathcal{P}(Y=\ell)$$

Les variables X et Y sont bien indépendantes.

(3) Si les variables X et Y sont indépendantes alors t^X et u^Y aussi donc

$$G(t,\ u) = E(t^X)E(u^Y) = G(t,\ 1)G(1,\ u)$$

puis

$$G_N(pt + qu) = G_N(pt + q)G_N(p + qu)$$

Posons $f(t) = G_N(t+1)$ définie et continue sur $[-2, 0]$ avec $f(0) = G_N(1) = 1$. On a

$$f(pt + qu) = G_N(p(t + 1) + q(u + 1)) = G_N(pt + 1)G_N(1 + qu) = f(pt)f(qu)$$

ce qui donne

$$f(x + y) = f(x)f(y)$$

pour $x \in [-2p, 0]$ et $y \in [-2q, 0]$. Pour $y \in [-2, 0[$

$$\frac{f(x + y) - f(x)}{y} = f(x)\frac{f(y) - f(0)}{y}$$

On choisit $x \in [-2p, 0[$ tel que $f(x) \neq 0$ (ce qui est possible par continuité car $f(0) = 1$) . Le premier membre admet une limite finie quand $y \to 0$ car f est assurément dérivable sur$] - 2, 0[$. On en déduit que le second membre admet la même limite et donc f est dérivable en 0 avec la relation

$$f'(x) = f'(0)f(x)$$

Posons $\lambda = f'(0)$ et sachant $f(0) = 1$, on obtient $f(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$ sur $[-2p,\ 0]$ puis $G_N(t) = \mathrm{e}^{\lambda(t-1)}$ sur $[1 - 2p, 1]$.

Si $p \geqslant 1/2$, ceci détermine G_N au voisinage de 0 et l'on reconnaît la fonction génératrice d'une loi de Poisson de paramètre λ.

Sinon, $q \geqslant 1/2$ et il suffit de raisonner en la variable y plutôt que x.

Exercice 43 : (***) **Somme aléatoire de variables aléatoires.**

Soit N et $X_1, X_2, \dots$ des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que les variables $X_1, X_2, \dots$ suivent toutes une même loi de fonction génératrice G_X et on pose :

$$\forall \omega \in \Omega,\ S(\omega) = \sum_{k=1}^{N(\omega)} X_k(\omega).$$

(1) Établir $G_S(t) = G_N\left(G_X(t)\right)$ pour $|t| \leqslant 1$.

(2) On suppose que les variables admettent une espérance. Établir l'identité de Wald :

$$E(S) = E(N)E(X_1)$$

Sol :

(1) Par la formule des probabilités totales

$$\mathcal{P}(S=n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathcal{P}(N=k)\mathcal{P}(X_1 + \dots X_k = n)$$

donc

$$G_S(t) = \sum_n \sum_k \mathcal{P}(N=k)\mathcal{P}(X_1 + \dots X_k = n)t^n$$

Il s'agit d'une famille sommable donc on peut permuter :

$$G_S(t) = \sum_k \mathcal{P}(N=k) \sum_n \mathcal{P}(X_1 + \dots X_k = n)t^n = \sum_k \mathcal{P}(N=k) G_{X_1+\dots+X_k}(t)$$

Par indépendance des variables $G_{X_1+\dots+X_k}(t) = G_X(t)^k$, ce qui donne le résultat.

(2) Si N et X admettent une espérance alors G_N et G_X sont dérivables en 1 donc G_S aussi et

$$G_S'(1) = G_X'(1)G_N'(G_X(1)) = G_X'(1)G_N'(1).$$

Fonctions génératrices

Exercice 0 a : près du cours...

Soit G_X la fonction génératrice de X à valeurs entières.

Donner les fonctions génératrices de $X+1$ et $2X$.

C'est du cours , pour la première : $G_{X+1}(t) = E(t^{X+1}) = tG_X(t)$ par linéarité.

Ou encore : $\sum_1^\infty \mathcal{P}(X+1=n)t^n = \sum_0^\infty \mathcal{P}(X=k)t^{k+1}$ par décalage d'indice et X dans $\mathbb{N}$...

Pour l'autre : $G_{2X}(t)) = E(t^{2X}) = E((t^2)^X) = G_X(t^2)$.

Ou encore : $\sum_0^\infty \mathcal{P}(X=n/2)t^n = \sum_0^\infty \mathcal{P}(X=s)t^{2s} = G_X(t^2)$. Chgt indice et valeurs $\mathbb{N}$...

Exercice 0 b : près du cours...

Donner la loi de la somme de deux variables aléatoires indépendantes de

loi binômiale de paramètres (n,p) et (m,p).

Sol : On calcule $G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t)$ par indépendance.

$G_X(t)G_Y(t) = (q+pt)^n(q+pt)^m = (q+pt)^{n+m}$ donc par bijection $X+Y \rightsquigarrow \mathcal{B}(n+m,p)$.

Exercice 0 c : près du cours...

Soit X un variable aléatoire entière, de fonction génératrice G_X.

Soit A l'événement X est pair.

- Identifier la loi de $Y = (1+(-1)^X)/2$.

- Exprimer $\mathcal{P}(A)$ en fonction de $G_X(-1)$.

- Calculer $\mathcal{P}(A)$ lorsque $X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

Sol : Lorsque X pair, $Y=1$, sinon $Y=0$.

Donc Y suit une Bernoulli de paramètre $p = P(A)$.

$G_X(t) = E(t^X)$ sur $[-1,1]$.

$E(Y) = P(A)$ car Bernoulli. $E(Y) = (1/2)(1+E((-1)^X) = (1/2)(1+G_X(-1))$ par linéarité.

(c) X suit une Poisson , donc $G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$ donc $P(A) = \frac{1+e^{-2\lambda}}{2} = e^{-\lambda}ch(\lambda)$.

Exercice 0 d : près du cours...

Soit X une variable aléatoire de fonction génératrice $G_X(t) = \dfrac{t}{2-t^2}$.

Déterminer les lois de X et X/2.

Sol : $\dfrac{s}{2-s^2} = \dfrac{s}{2}\left(\dfrac{1}{1-(s/\sqrt{2})^2}\right) = \dfrac{s}{2}.\sum_0^\infty \dfrac{s^{2k}}{2^k} = \sum_0^\infty \dfrac{s^{2k+1}}{2^{k+1}}$.

Par cararctérisation : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(X=n) = 0$ (si n est pair).

Et sinon : $\mathcal{P}(X=n) = \dfrac{1}{2^{\frac{n+1}{2}}}$, car en ce cas : $n = 2k+1$, $k+1 = \dfrac{n+1}{2}$.

Rq : $G_X(1) = 1$...

Puis $X(\Omega) = 2\mathbb{N}+1$ et donc $Y(\Omega) = \mathbb{N}+1/2$.

$[Y = j+1/2] = [X = 2j+1]$. Donc $\mathcal{P}(Y = j+1/2) = \dfrac{1}{2^{j+1}}$.

Exercice 0 f : près du cours...

Dans une salle de cinéma, il arrive X personnes pour voir le film.

On suppose que $X \rightsquigarrow \mathcal{G}(p)$.

La capacité de la salle est de n personnes.

On note Y le nombre de personnes ne pouvant entrre dans la salle, car elle est remplie.

- Loi de Y ?

- Fonction génératrice de Y ?

- E(Y) ?

Sol : $q = 1-p$, $\mathcal{P}(Y=0) = \mathcal{P}(X \leqslant n) = 1 - \mathcal{P}(X > n) = 1 - q^n$.

Pour $k \geqslant 1$, $\mathcal{P}(Y=k) = \mathcal{P}(X = n+k) = pq^{n+k-1}$.

$G_Y(t) = (1-q^n) + \sum_1^\infty pq^{n-1}(tq)^k = (1-q^n) + \dfrac{pq^n t}{1-qt}$.

Le rayon est clairement $\frac{1}{q}$ voir cours loi géométrique...$R > 1$...

$E(Y) = G_Y'(1) = \dfrac{q^n}{p}$.