Intégrales à paramètres

Taper les sol qui manquent.

Il en manque ? ? JMF ddl ! ! ! ! Legay ? ?

Je n'ai pas encore tapé toutes les solutions, mais elles sont prêtes.

Exo 59 ddl ?

Exercice 0. Justifier puis calculer pour $x, y > 0$, $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{-xt} - e^{-yt}}{t} dt$.

Sol : Cv par dl en 0. Puis on coupe les extemités, on fait les changements $u = xt$ et $v = yt$.

Ca téléscope par Chasles, on tend vers $\ln(y/x)$.

Sol :

$f : (x,t) \to \dfrac{\mathrm{e}^{-xt} - \mathrm{e}^{-yt}}{t}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\mathrm{e}^{-xt}$ sont définies et continues sur $\mathbb{R}^{+\star} \times \mathbb{R}^{+\star}$.

$t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ car continuité en 0 et négligeable devant $1/t^2$ en $+\infty$.

Pour $a > 0$.

$$\forall x \in \Big[a, +\infty\Big[, \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \mathrm{e}^{-at} = \varphi_a(t)$$

avec φ_a intégrable sur $\mathbb{R}^{+\star}$.

Par domination $x \mapsto F(x,y)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \int_0^{+\infty} -\mathrm{e}^{-xt}\ \mathrm{d}t = -\frac{1}{x}$$

Donc $F(x,y) = -\ln x + C^{te}$ et puisque pour $x = y$, on a $F(x,y) = 0$ on obtient

$$F(x,y) = \ln y - \ln x$$

$f:(x,t)\to\frac{e^{-xt}-e^{-yt}}{t}$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)=-e^{-xt}$ sont définies et continues sur $\mathbb{R}^{+\star}\times\mathbb{R}^{+\star}$.
$t\mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ car prolongeable par continuité en 0 et négligeable devant $1/t^2$ en $+\infty$.
Pour $a>0$,

$$\forall x\in[a,+\infty[\quad\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right|\leqslant e^{-at}=\varphi_a(t)$$

avec φ_a intégrable sur $\mathbb{R}^{+\star}$.
Par domination $x\mapsto F(x,y)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)=\int_0^{+\infty}-e^{-xt}\,dt=-\frac{1}{x}$$

Donc $F(x,y)=-\ln x+C^{te}$ et puisque pour $x=y$, on a $F(x,y)=0$ on obtient

$$F(x,y)=\ln y-\ln x$$

Exercice 0 bis : Montrer que $\displaystyle\int_0^\infty\frac{\sin(t)}{e^t-1}dt=\sum_1^\infty\frac{1}{n^2+1}$.

Sol : $\displaystyle\frac{\sin(t)}{e^t-1}=\sin(t).\sum_1^\infty e^{-nt}$.

Or Piège ! $\displaystyle\int_0^\infty|\sin(t)|e^{-nt}dt\leqslant\int_0^\infty t.e^{-nt}dt=\frac{1}{n^2}$. TG de série cvte. Fubini ! !

Ne pas confondre la sommabilité avec ou sans la valeur absolue bien placée ! !

Donc $\displaystyle\frac{\sin(t)}{e^t-1}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_*^+$ et $\displaystyle\int_0^\infty\frac{\sin(t)}{e^t-1}=\sum_1^\infty\int_0^\infty\sin(t)e^{-nt}dt$.

Avec $\displaystyle\int_0^\infty\sin(t)e^{-nt}dt=Im\int_0^\infty e^{(-n+i)t}dt=\frac{1}{n^2+1}$. Bref :

$$\int_0^\infty\frac{\sin(t)}{e^t-1}dt=\sum_1^\infty\frac{1}{n^2+1}$$

Exercice 1. Étudier la fonction $f\ :\ x \mapsto \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{e}^{x\cos t}}{1+\sin^2 t}dt$.

Définition , parité , classe , comportement en l'infini.

Sol :
- f est $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $\mathbb{R}$ avec les th. usuels.
- On coupe l'intégrale en deux ($[0,\pi/2]$ et $[\pi/2,\pi]$) ; dans la deuxième intégrale on fait le changement de variable $u = \pi/2 - t$ et on obtient :

$$f(x) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{ch}(x\cos t)}{1+\sin^2 t)}dt\,.$$

  On en sort que f est paire puis le th. de dérivation ss le signe $\int$ donne $f'(x) \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}^+$.
- Enfin, on a $f(x) \geqslant 2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{e^{x\cos t}}{1+\sin^2 t}dt \geqslant 2e^{\left(\frac{x}{2}\right)}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1+\sin^2 t}dt$,

  ce qui donne le comportement en $+\infty$...

Exercice 2. Soit, pour $x > 0$: $h(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t}{t+x}dt$.

a) Étudier la continuité, la dérivabilité, la monotonie de h.

b) Déterminer les limites de h en 0^+ et en $+\infty$.

c) Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\big(h(x)+\ln x\big)$ existe. (difficile)...

Sol : Le début est un copier-coller de l'exo 12 .

Pour la suite $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e-1}{x}$. Par encadrement, $\displaystyle\int_0^1 e^t = e-1$.

$f(x) \underset{0}{\sim} -\ln x$, car $h(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t - 1 + 1}{t+x}dt$.

Puis $0 \leqslant I_x = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^t-1}{t+x}dt \leqslant \int_0^1 \frac{3t}{t+x} \leqslant 3$. IAF.

Ou I_x cie par thm de cours...CVD param...

Il reste $\ln(x+1) - \ln(x) + \mathcal{O}(1)$.

Pour la dernière question on pose $L(x) = h(x) + \ln(x)$, on la dérive

$L'(x) = \dfrac{1}{x} - \displaystyle\int_0^1 \dfrac{e^t dt}{(t+x)^2} \leqslant \dfrac{1}{x+1} - \displaystyle\int_0^1 \dfrac{tdt}{(t+x)^2} \to -\infty$.

Mais, il faut prouver tout ça !

Oui, ça marche, on minore e^t par $1+t$, inégalité classique de convexité.

Il vient $L'(x) = \dfrac{1}{x} - \displaystyle\int_0^1 \dfrac{e^t dt}{(t+x)^2} \leqslant \dfrac{1}{x} - \displaystyle\int_0^1 \dfrac{(1+t)dt}{(t+x)^2} = \dfrac{1}{x+1} - \displaystyle\int_0^1 \dfrac{tdt}{(t+x)^2}$.

On calcule l'intégrale de droite, $t = t + x - x$, il sort des petits et $\ln(x)$.

Donc L est décroissante au voisinage de 0^+, car $L' \to -\infty$.

Or elle est **majorée**. Penser à majorer e^t par $1+3t$ sur notre segment(IAF).

Càd, $L(x) \leqslant \ln(x) + \displaystyle\int_0^1 \dfrac{(1+3t)dt}{(t+x)} = \ln(x+1) + \displaystyle\int_0^1 \dfrac{(3t)dt}{(t+x)} \leqslant 3 + o(1)$.

Décroissante et majorée, converge, **attention** on regarde du côté gauche de l'intervalle...

Exercice 2bis. On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-t}}{1+tx} dt$.

a) Montrer que F existe sur $\mathbb{R}^+$.

b) Classe $\mathcal{C}^\infty$.

c) Calculer $F^{(n)}(0)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Sol : a) $g(x,t)$ est cie pm et intégrable à x fixé . Bref F existe ss pbs.

b) Le thm de Leibniz se vérifie aisément : $\left| \dfrac{\partial^n g}{\partial x^n}(x,t) \right| \leqslant n! t^n e^{-t}$.

Donc F est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$ et $F^{(n)}(x) = (-1)^n n! \displaystyle\int_0^\infty \dfrac{t^n . e^{-t}}{(1+tx)^{n+1}} dt$.

c) Donc $F^{(n)}(0) = (-1)^n (n!)^2$.

Exercice 3. Domaine de définition de : $g(x) = \displaystyle\int_0^\pi \ln(x^2 - 2x\cos t + 1) dt$.

Continuité, dérivabilité , valeur , différentes méthodes ... Voir retour 23 mieux.

Sol : a) Variante première année : sommes de Riemann.

Exo :

(1) On suppose $x \neq \pm 1$. Justifier l'existence de $I(x) = \displaystyle\int_0^\pi \ln(1 - 2x\cos(t) + x^2)\,\mathrm{d}t$.

(2) Prouver la factorisation $X^{2n} - 1 = (X^2 - 1)\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\Big(X^2 - 2X\cos\Big(\frac{k\pi}{n}\Big) + 1\Big)$.

(3) En utilisant des sommes de Riemann, calculer $I(x)$ pour $|x| < 1$ et pour $|x| > 1$.

Sol :

(1) On fixe x dans $\mathbb{R}$, avec $x \neq \pm 1$.

Posons $P(x,t) = x^2 - 2x\cos(t) + 1 = (x - \cos(t))^2 + \sin^2(t)$.

Si $0 < t < \pi$, $P(x,t) \geqslant \sin^2(t) > 0$. Pour $t \in \{0, \pi\}$, $P(x,t) = (x \pm 1)^2 > 0$.

La fonction $t \mapsto P(x,t)$ reste donc strictement positive sur $[0, \pi]$.

Il en résulte que $I(x)$ existe.

(2) Posons $P(X) = (X^2 - 1)\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\Big(X^2 - 2X\cos\Big(\frac{\pi}{n}\Big) + 1\Big)$. On trouve successivement :

On a $P(X) = (X^2 - 1)\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\big(X - \mathrm{e}^{ik\pi/n}\big)\big(X - \mathrm{e}^{-ik\pi/n}\big) = \prod_{k=0}^{2n-1}\big(X - \mathrm{e}^{ik\pi/n}\big) = X^{2n} - 1$.

(3) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{\pi}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\ln\Big(1 - 2x\cos\Big(\frac{k\pi}{n}\Big) + x^2\Big)$.

$$u_n = \frac{\pi}{n}\ln\left(\prod_{k=0}^{n-1}\Big(1 - 2x\cos\Big(\frac{k\pi}{n}\Big) + x^2\Big)\right).$$

On sait que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = I(x)$.

Mais $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}\Big(x^2 - 2x\cos\Big(\frac{k\pi}{n}\Big) + 1\Big) = \frac{x^{2n} - 1}{x + 1}.(x - 1)$,

donc $u_n = \dfrac{\pi}{n}\ln\left(\dfrac{x^{2n} - 1}{x + 1}.(x - 1)\right)$.

On peux faire les chgts d'indices pour le prouver,

ou tracer un cercle trigo pour visualiser que 1 est compté deux fois et -1 oublié.

Si $|x| < 1$, on trouve :

$I(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, pas de forme indéterminée.

Si $|x| > 1$, on a $I(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2\pi \ln|x|$.

Il suffit de mettre x^{2n} en facteur ds le log.

b) En mettant ss forme canonique on constate que pour $x \neq \pm 1$ aucun pbs.

Pour $x = 1$ aucun pb en π , et en 0 la fonction est équvalente à $2\ln(t)$ intégrable.

En -1 c'est pareil. $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}$.

g est paire par le chgt $u = \pi - t$.

$\forall x > 0$, $g(1/x) = g(x) - 2\pi\ln(x)$, par simple remplacement...Etude sur $[0, 1]$.

b1) Soit $a \in]0, 1[$, $x^2 - 2x\cos(t) + 1$ est cie sur le compact $[0, a] \times [0, \pi]$,(**)

elle y est bornée et strictement positive, sa borne inf aussi.

Donc $\ln(x^2 - 2x\cos(t) + 1)$ est donc bornée cie sur $[0, a] \times [0, \pi]$.

Le thm de continuité s'applique. g est cie sur $[0, a]$ donc sur $[0, 1[$ puis sur $]1, \infty[$ par $g(1/x)$.

b2) On pourrait calculer $g(x^2) = 2g(x)$ et conclure...$g(x^{2^n}) = 2^n g(x)$.

Oui oui, on écrit $2g(x)$ avec la parité, avec ln du produit.

$1 - 2\cos^2(t) = \cos(2t)$, $u = 2t$.

Puis période et parité !

Car exo classique de continuité g (cie en 0), on arrive à g nulle sur $]0, 1[$.

c) Méthode "actuelle", pour $a \in [0, 1[$, la domination pour le thm de Leibniz est validée par $\left|\dfrac{\partial G}{\partial x}(x, t)\right| = \left|\dfrac{2(x - \cos(t))}{x^2 - 2x.\cos(t) + 1}\right| \leqslant \dfrac{2x + 2}{(1 - a)^2} \leqslant \dfrac{4}{(1 - a)^2}$.

La majoration, ne vient pas de la mise en canonique, mais de l'encadrement de $\cos(t)$.(**)

Ou étude de fonction $x^2 - 2x\cos(t) + 1$, qui est croissante sur $[0, \pi]$, de $(1 - x)^2$ à $(1 + x)^2$.

Le pire est donc $\dfrac{1}{(1 - x)^2}$, qui lui est au pire en $\dfrac{1}{(1 - a)^2}$. Dessin !

Sur $[0, a[$ g est $\mathcal{C}^1$ et donc sur $[0, 1[$.

$g'(x) = \int_0^\pi \frac{\partial G}{\partial x}(x,t)$.

On la calcule : par tangente arc moitié... Lourd , puis elts simples.

$$g'(x) = 4\int_0^\infty \left(\frac{(x^2-1)/2x}{u^2(x+1)^2+(x-1)^2} + \frac{1/2x}{u^2+1} \right) dt = 0 \ ...$$

g est constante et nulle en 0 . Facile à transférer sur $]1,\infty[$...

Exercice 4. ♡♡♡♡.

Pour $a>0$ montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{(1+t^a)} = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{1+na}$.

Comment obtenir : $\displaystyle\sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{1+2n}$ et $\displaystyle\sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{1+3n}$?

Sol : A la manivelle : $\displaystyle\left|\int_0^1 \sum_{N+1}^\infty (-1)^n x^{an} dx\right| \leqslant \int_0^1 \left|\sum_{N+1}^\infty (-1)^n x^{an} dx\right| \leqslant \int_0^1 x^{a(N+1)} dx \to 0$

Les valeurs : $\pi/4$ et $\dfrac{1}{3}\ln(2) + \dfrac{\pi\sqrt{3}}{9}$.

Bis : avec nos thms :

Sol :

On a $\displaystyle\frac{1}{1+t^a} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t^{na} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$, avec $f_n(t) = (-1)^n t^{na}$ sur $]0,1[$.
$\displaystyle\int_0^1 |f_n(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{na+1}$
et $\displaystyle\sum \frac{1}{na+1}$ diverge, le théorème d'intégration terme à terme de Fubini ne s'applique pas.

De plus la série de fonctions ne converge par uniformément sur $[0,1]$

car elle ne converge pas simplement en $1\ldots$.

Car le reste est $\left|\dfrac{t^{aN}}{1+t^a}\right|$ et ne tend pas unift vers 0 .

Transitons alors par les sommes partielles et le théorème de convergence dominée. Posons

$$S_n : t \mapsto \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{ka} = \frac{1-(-1)^{n+1}t^{(n+1)a}}{1+t^a}$$

Les fonctions S_n sont cpm et la suite (S_n) converge simplement sur $[0,1[$ vers la fonction

$$S : t \mapsto \frac{1}{1+t^a}$$

elle-même continue par morceaux.

De plus

$$|S_n(t)| \leqslant \frac{2}{1+t^a} = \varphi(t)$$

avec φ intégrable sur $[0,1[$.

Par le théorème de convergence dominée, on obtient

$$\int_0^1 S_n(t)\mathrm{d}t \to \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^a}$$

Or

$$\int_0^1 S_n(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 (-1)^k t^{ka}\ \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{ka+1}$$

donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{na+1} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^a}$$

avec, en substance, la convergence de la série introduite.

Autre idée !

Pour tout $t \in [0,1[$ on sait $\dfrac{1}{1+t} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^n$.

donc aussi $\dfrac{1}{1+t^a} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{na}$.

Soit F une primitive de la fonction continue $t \mapsto \frac{1}{1+t^a}$ sur $[0,1]$.

Sur $\Big[0,1\Big[$, $F(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{na+1}}{na+1} + F(0)$

Or F est continue sur $[0,1]$ et la série de fonctions convergence uniformément sur $[0,1]$.

Par passage à la limite en 1, $F(1) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{na+1} + F(0)$.

Par suite $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^a} = F(1) - F(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{na+1}$.

On en déduit $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \ln 2$.

et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}$

On a

$$\frac{1}{1+t^a} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{na} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$$

avec $f_n(t) = (-1)^n t^{na}$ sur $]0,1[$.

$$\int_0^1 |f_n(t)| \, \mathrm{d}t = \frac{1}{na+1}$$

et $\sum \frac{1}{na+1}$ diverge, le théorème d'intégration terme à terme de Fubini ne s'applique pas.
De plus la série de fonctions ne converge par uniformément sur $[0,1]$ car elle ne converge pas simplement en $1\ldots$
Transitons alors par les sommes partielles et le théorème de convergence dominée.
Posons

$$S_n : t \mapsto \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{ka} = \frac{1-(-1)^{n+1} t^{(n+1)a}}{1+t^a}$$

Les fonctions S_n sont continues par morceaux et la suite (S_n) converge simplement sur $[0,1[$ vers la fonction

$$S : t \mapsto \frac{1}{1+t^a}$$

elle-même continue par morceaux.
De plus

$$|S_n(t)| \leqslant \frac{2}{1+t^a} = \varphi(t)$$

avec φ intégrable sur $[0,1[$.
Par le théorème de convergence dominée, on obtient

$$\int_0^1 S_n(t) \, \mathrm{d}t \to \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^a}$$

Or

$$\int_0^1 S_n(t) \, \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 (-1)^k t^{ka} \, \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{ka+1}$$

donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{na+1} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^a}$$

avec, en substance, la convergence de la série introduite.

Sol : ddl 60 . Attention à ddl 124 (dse) la cv uniforme...existe sur la primitive ...

Pour tout $t \in [0,1[$ on sait

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^n$$

donc aussi

$$\frac{1}{1+t^a} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{na}$$

Soit F une primitive de la fonction continue $t \mapsto \frac{1}{1+t^a}$ sur $[0,1]$.

Sur

$$[0,1[\,, F(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{na+1}}{na+1} + F(0)$$

Or F est continue sur $[0,1]$ et la série de fonctions convergence uniformément sur $[0,1]$.
Par passage à la limite en 1,

$$F(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{na+1} + F(0)$$

Par suite

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^a} = F(1) - F(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{na+1}$$

On en déduit

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \ln 2$$

et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}$$

Exercice 4bis .

Montrer que $\displaystyle\int_0^{\infty}\sum_1^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2+t^2}dt=\frac{\pi}{2}\sum_1^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Sol :

Soit $f_n:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ la fonction définie par $f_n(t)=\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2+t^2}$.

On observe $\|f_n\|_\infty=1/n^2$ et donc la série des fonctions f_n converge normalement, donc uniformément sur $[0,+\infty[$. Puisque chaque f_n est continue, on peut affirmer que la fonction $S:t\mapsto\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2+t^2}$ est définie et continue sur $[0,+\infty[$.

Attention au piège : la cv uniforme ne permet pas d'inverser sur $\mathbb{R}^+$...

Les fonctions f_n sont intégrables sur $\mathbb{R}^+$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty}|f_n(t)|\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{n^2+t^2}=\frac{\pi}{2n}$.

La série $\displaystyle\sum\int|f_n|$ diverge, on ne peut intégrer terme à terme par le théorème de Fubini.

Raisonnons alors par sommes partielles en exploitant le théorème de convergence dominée.

Posons

$$S_n:t\mapsto\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2+t^2}$$

Les fonctions S_n sont continues par morceaux sur $[0,+\infty[$ et converge simplement vers la fonction S elle-même continue par morceaux.

De plus, le critère spécial des séries alternées s'appliquant, on a

Ici , ce n'est pas un reste typé CSSA, mais on a quand même +-+-+-...

$$0\leqslant S_n(t)\leqslant\frac{1}{1+t^2}=\varphi(t)$$

avec φ intégrable sur $[0,+\infty[$.

Par le théorème de convergence dominée, on obtient

$$\int_0^{+\infty}S_n(t)\mathrm{d}t\to\int_0^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2+t^2}\ \mathrm{d}t$$

Or

$$\int_0^{+\infty} S_n(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} \int_0^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

donc

$$\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} = \int_0^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2+t^2}\,\mathrm{d}t$$

avec convergence de la série introduite.

Soit $f_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f_n(t) = \frac{(-1)^{n-1}}{n^2+t^2}$$

On observe $\|f_n\|_\infty = 1/n^2$ et donc la série des fonctions f_n converge normalement, donc uniformément sur $[0, +\infty[$. Puisque chaque f_n est continue, on peut affirmer que la fonction

$$S : t \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2+t^2}$$

est définie et continue sur $[0, +\infty[$.
Les fonctions f_n sont intégrables sur $\mathbb{R}^+$ et

$$\int_0^{+\infty} |f_n(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{n^2+t^2} = \frac{\pi}{2n}$$

Puisque la série $\sum\int|f_n|$ diverge, on ne peut intégrer terme à terme par le théorème de Fubini.
Raisonnons alors par les sommes partielles en exploitant le théorème de convergence dominée.

Posons

$$S_n : t \mapsto \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2+t^2}$$

Les fonctions S_n sont continues par morceaux sur $[0,+\infty[$ et converge simplement vers la fonction S elle-même continue par morceaux.
De plus, le critère spécial des séries alternées s'appliquant, on a

$$0 \leqslant S_n(t) \leqslant \frac{1}{1+t^2} = \varphi(t)$$

avec φ intégrable sur $[0,+\infty[$.
Par le théorème de convergence dominée, on obtient

$$\int_0^{+\infty} S_n(t)\,\mathrm{d}t \to \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2+t^2}\,\mathrm{d}t$$

Or

$$\int_0^{+\infty} S_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} \int_0^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

donc

$$\frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2+t^2}\,\mathrm{d}t$$

avec convergence de la série introduite.

Exercice 5. **Intégrale de Gauss**

(1) Étudier la continuité et la dérivabilité de $f \ : \ x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} dt$.

Déterminer $f(0)$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)$

(2) Soit $g \ : \ x \mapsto \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2} dt$. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x^2) + \big(g(x)\big)^2 = \text{cste}$.

En déduire la valeur de : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} dt$

Sol : cours

Exercice 6. Soit $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2}dt$.

(1) Étudier la continuité et la dérivabilité de f.

(2) Calculer $g(0)$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

(3) Montrer que, si $x > 0$, $g''(x) = g(x)$. En déduire la valeur de f.

(4) Calculer : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\sin(xt)}{1+t^2}dt$

Sol :

1- • Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\cos(xt)}{1+t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$

et $\forall t \in [0, +\infty[$, $\left|\dfrac{\cos(xt)}{1+t^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{1+t^2}$., fonction de t continue et intégrable sur $[0, +\infty[$.

Par majoration $t \mapsto \dfrac{\cos(xt)}{1+t^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et $g(x)$ est défini pour tout $x \in \mathbb{R}$.

- Notons $G(x,t) = \dfrac{\cos(xt)}{1+t^2}$.

- pour tout $t \in [0, +\infty\,[$, la fonction $x \longrightarrow \dfrac{\cos(xt)}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$,

- pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \longrightarrow \dfrac{\cos(xt)}{1+t^2}$ est continue et intégrable sur $[0, +\infty[$,

- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in [0, +\infty[$, $\left|\dfrac{\cos(xt)}{1+t^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{1+t^2}$, fonction de t continue et intégrable sur $[0, +\infty[$.

Par application du théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre,

la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2}dt$ est donc continue sur $\mathbb{R}$.

- Pour étudier la dérivation :

- pour tout $t \in [0, +\infty\,[$, la fonction $x \longrightarrow \dfrac{\partial G}{\partial x}(x,t) = \dfrac{-t\sin(xt)}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ mais, pour obtenir une hypothèse de domination, on cherche à majorer $\left|\dfrac{\partial G}{\partial x}(x,t)\right|$ par une fonction de t seul, continue par morceaux et intégrable sur $[0, +\infty[$.

Piège...Or, on ne peut faire mieux que la majoration

$$\left|\frac{\partial H}{\partial x}(x,t)\right| = \left|\frac{t\sin(xt)}{1+t^2}\frac{\partial H}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \frac{t}{1+t^2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t}.$$

et la fonction majorante n'est **pas** intégrable sur $[a,+\infty[$.

On ne peut pas appliquer le théorème de dérivation sous le signe $\int$ sous cette forme .

On va alors augmenter l'exposant de t au dénominateur en procédant à une intégration par partie dans laquelle on dérivera $\dfrac{1}{t^2+1}$ de façon a obtenir du $\dfrac{1}{(t^2+1)^2}$:

- Pour tout $x \in \mathbb{R}, g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2}dt.$

Soit $x > 0$ et a et b deux réels tels que $0 < a < b$ les fonctions $t \mapsto \dfrac{\sin(xt)}{x}$ et $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, et on peut intégrer par partie comme suit :

(ou sur $\mathbb{R}^+$ direct), en justifiant la validité de l'i.p.p.

$$\int_a^b \cos(xt)\frac{1}{1+t^2}dt = \left[\frac{\sin(xt)}{x}\frac{1}{1+t^2}\right]_a^b + \int_a^b \frac{\sin(xt)}{x}\frac{2t}{(1+t^2)^2}dt$$

Passons à la limite quand $a \to 0$ et $b \to +\infty$:

$$\forall x > 0, g(x) = \frac{2}{x}\int_0^{+\infty} \frac{t\sin(xt)}{(1+t^2)^2}dt$$

- Posons alors $h(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\sin(xt)}{(1+t^2)^2}dt$ et $H(x,t) = \dfrac{t\sin(xt)}{(1+t^2)^2}$

de sorte que $\forall x > 0, g(x) = \dfrac{2}{x}h(x)$.

- pour tout $t \in [0,+\infty[$, la fonction $x \mapsto H(x,t) = \dfrac{t\sin(xt)}{(1+t^2)^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$,

- pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto H(x,t)$ est continue et intégrable sur $[0,+\infty[$,

De plus :

- pour tout $t \in [0,+\infty[$, la fonction $x \longrightarrow \dfrac{\partial H}{\partial x}(x,t) = \dfrac{t^2\cos(xt)}{(1+t^2)^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$,

- pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \to \dfrac{\partial H}{\partial x}(x,t) = \dfrac{t^2\cos(xt)}{(1+t^2)^2}$ est continue et et intégrable sur $[0,+\infty[$,

$-\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in [0,+\infty[, \left|\dfrac{\partial H}{\partial x}(x,t)\right| = \left|\dfrac{t^2\cos(xt)}{(1+t^2)^2}\right| \leqslant \dfrac{t^2}{(1+t^2)^2} \leqslant \dfrac{t^2+1}{(1+t^2)^2} = \dfrac{1}{1+t^2},$

fonction continue et intégrable sur $[0,+\infty[$.

On en déduit par le théorème de dérivation sous l'$\int$ que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall x\in\mathbb{R}, h'(x)=\int_0^{+\infty}\frac{t^2\cos(xt)}{(1+t^2)^2}dt$$

- Cherchons à simplifier cette formule en intégrant par parties cette fois $\dfrac{t^2}{(1+t^2)^2}$ de façon à diminuer l'exposant de t au dénominateur :

Soient a et b deux réels tels que $0<a<b$ les fonctions $t\mapsto\dfrac{\sin(xt)}{x}$ et $t\mapsto\dfrac{1}{1+t^2}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, et on peut intégrer par parties comme suit : ou ...

$$\int_a^b\frac{t^2\cos(xt)}{(1+t^2)^2}dt=\frac{1}{2}\int_a^b\frac{2t}{(1+t^2)^2}\cdot(t\cos(xt))dt=\frac{1}{2}\left[\frac{-1}{1+t^2}\cdot(t\cos(xt))\right]_a^b+\frac{1}{2}\int_a^b\frac{1}{1+t^2}(\cos(xt)-tx\sin(xt))dt$$

Passons à la limite quand $a\to 0$ et $b\to+\infty$:

$$\forall x\in\mathbb{R}, h'(x)=\int_0^{+\infty}\frac{t^2\cos(xt)}{(1+t^2)^2}dt=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\cos(xt)}{1+t^2}-\frac{x}{2}\int_0^{+\infty}\frac{t\sin(xt)}{1+t^2}dt$$

(on montre que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t\sin(xt)}{1+t^2}dt$ est **semi-convergente** comme $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}dt$)

$\forall x\in\mathbb{R}, h'(x)=\dfrac{1}{2}g(x)-\dfrac{x}{2}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t\sin(xt)}{1+t^2}dt.$

Remarquons que $\dfrac{t}{1+t^2}=\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{t\,(1+t^2)}$ donc

$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t\sin(xt)}{1+t^2}dt=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(xt)}{t}dt-\int_0^{+\infty}\frac{\sin(xt)}{t\,(t^2+1)}dt.$

Le changement $u=xt$ montre que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(xt)}{t}dt=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(u)}{u}du=C_1=cste.$

Rq : Il faut justifier le changement !

- Posons $k(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t\sin(xt)}{1+t^2}dt = c_1 - \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t\,(t^2+1)}dt$ la majoration $\left|\frac{\cos(xt)}{t^2+1}\right| \leqslant \frac{1}{1+t^2}$ permet à nouveau d'appliquer le théorème de dérivation sous le signe $\int$ et de montrer que

$$\forall x > 0, k'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{t^2+1}dt = -g(x)$$

$$\bullet \forall x > 0, g(x) = \frac{2}{x}h(x) \Longrightarrow g'(x) = \frac{2}{x}h'(x) - \frac{2}{x^2}h(x)$$

$$\Longrightarrow g'(x) = \frac{2}{x}\left(\frac{1}{2}g(x) - \frac{x}{2}k(x)\right) - \frac{1}{x}g(x) = -k(x)$$

$$\Longrightarrow g''(x) = -k'(x) = g(x)$$

g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$ et est solution sur cet intervalle de l'ED $(E) : y'' - y = 0$.

- Donc il existe $(A,B) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in]0,+\infty[, g(x) =$ A. $e^x + B.e^{-x}$.

On a vu que $\forall x > 0, g(x) = \frac{2}{x}\int_0^{+\infty} \frac{t\sin(xt)}{(1+t^2)^2}dt$ donc

$\forall x > 0, |g(x)| \leqslant \frac{2}{x}\int_0^{+\infty} \frac{t|\sin(xt)|}{(1+t^2)^2}dt \leqslant \frac{2}{x}\underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^2}dt}_{\text{constante}}.$

cette majoration entraîne que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$, nécessairement, $A = 0$

donc $\forall x \in]0,+\infty[, g(x) = B.e^{-x}$.

g étant continue en 0, $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = B = g(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{\pi}{2}$.

Donc, $\forall x \in]0,+\infty[, g(x) = \frac{\pi}{2}e^{-x}$ et, par parité, continuité de la fonction g,

$\forall x \in \mathbb{R}, \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}e^{-|x|}$.

La dernière question : il a été vu plus haut que nous cherchons donc $-g'$ (impaire).

Sur $\mathbb{R}^+$, c'est $-\frac{\pi}{2}e^{-x}$.

Sur $\mathbb{R}^-$, c'est $+\frac{\pi}{2}e^{x}$.

1- • Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\cos(xt)}{1+t^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et

$\forall t \in [0,+\infty[$, $\left|\dfrac{\cos(xt)}{1+t^2}\right| \leq \dfrac{1}{1+t^2}$, fonction de t continue et intégrable sur $[0,+\infty[$.

Par majoration $t \mapsto \dfrac{\cos(xt)}{1+t^2}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ et $g(x)$ est défini pour tout $x \in \mathbb{R}$.

• Notons $G(x,t) = \dfrac{\cos(xt)}{1+t^2}$

- pour tout $t \in [0,+\infty[$, la fonction $x \longrightarrow \dfrac{\cos(xt)}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$,
- pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \longrightarrow \dfrac{\cos(xt)}{1+t^2}$ est continue et intégrable sur $[0,+\infty[$,
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall t \in [0,+\infty[$, $\left|\dfrac{\cos(xt)}{1+t^2}\right| \leq \dfrac{1}{1+t^2}$, fonction de t continue et intégrable sur $[0,+\infty[$.

Par application du théorème de contnuité des intégrales dépendant d'un paramètre,

la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2}dt$ est donc continue sur $\mathbb{R}$.

• Pour étudier la dérivation :

- pour tout $t \in [0,+\infty[$, la fonction $x \longrightarrow \dfrac{\partial G}{\partial x}(x,t) = \dfrac{-t\sin(xt)}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$,

mais, pour obtenir une hypothèse de domination, on cherche à majorer

$\left|\dfrac{\partial G}{\partial x}(x,t)\right|$ par une fonction de t seul, continue par morceaux et intégrable sur $[0,+\infty[$.

Or, on ne peut faire mieux que la majoration

$$\left|\frac{\partial H}{\partial x}(x,t)\right| = \left|\frac{t\sin(xt)}{1+t^2}\frac{\partial H}{\partial x}(x,t)\right| \leq \frac{t}{1+t^2} \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{t}$$

et la fonction majorante n'est pas intégrable sur $[a,+\infty[$.

On ne peut pas appliquer le théorème de dérivation sous le signe $\displaystyle\int$ sous la forme qui est donnée.

On va alors augmenter l'exposant de t au dénominateur en procédant à une intégration par parties dans laquelle on dérivera $\dfrac{1}{t^2+1}$ de façon a obtenir $\dfrac{1}{(t^2+1)^2}$:

• Pour tout $x \in \mathbb{R}, g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2}dt$

Soit $x > 0$ et a et b deux réels tels que $0 < a < b$ les fonctions $t \mapsto \frac{\sin(xt)}{x}$ et $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, et on peut intégrer par parties comme suit :

$$\int_a^b \cos(xt)\frac{1}{1+t^2}dt = \left[\frac{\sin(xt)}{x}\frac{1}{1+t^2}\right]_a^b + \int_a^b \frac{\sin(xt)}{x}\frac{2t}{(1+t^2)^2}dt$$

Passons à la limite quad $a \to 0$ et $b \to +\infty$:

$$\boxed{\forall x > 0,\ g(x) = \frac{2}{x}\int_0^{+\infty} \frac{t\ \sin(xt)}{(1+t^2)^2}dt}$$

• Posons alors $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\ \sin(xt)}{(1+t^2)^2}dt$ et $H(x,t) = \dfrac{t\ \sin(xt)}{(1+t^2)^2}$ de sorte que $\forall x > 0,\ g(x) = \dfrac{2}{x}h(x)$

- pour tout $t \in [0,+\infty[$, la fonction $x \mapsto H(x,t) = \dfrac{t\ \sin(xt)}{(1+t^2)^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$,

- pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto H(x,t)$ est continue et intégrable sur $[0,+\infty[$,

De plus :

- pour tout $t \in [0,+\infty[$, la fonction $x \longrightarrow \dfrac{\partial H}{\partial x}(x,t) = \dfrac{t^2\ \cos(xt)}{(1+t^2)^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$,

- pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \to \dfrac{\partial H}{\partial x}(x,t) = \dfrac{t^2\ \cos(xt)}{(1+t^2)^2}$ est continue et et intégrable sur $[0,+\infty[$,

- $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall t \in [0,+\infty[,\ \left|\dfrac{\partial H}{\partial x}(x,t)\right| = \left|\dfrac{t^2\ \cos(xt)}{(1+t^2)^2}\right| \leq \dfrac{t^2}{(1+t^2)^2} \leq \dfrac{t^2+1}{(1+t^2)^2} = \dfrac{1}{1+t^2}$, fonction continue et intégrable sur $[0,+\infty[$.

On en déduit par le théorème de dérivation sous le signe $\displaystyle\int$ que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ h'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2\ \cos(xt)}{(1+t^2)^2}dt}$$

• Cherchons à simplifier cette formule en intégrant par parties cette fois $\dfrac{t}{(1+t^2)^2}$ de façon à diminuer l'exposant de t au dénominateur :

Soient a et b deux réels tels que $0<a<b$ les fonctions $t\mapsto \frac{\sin(xt)}{x}$ et $t\mapsto \frac{1}{1+t^2}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, et on peut intégrer par parties comme suit :

$$\int_a^b \frac{t^2\ \cos(xt)}{(1+t^2)^2}dt = \frac{1}{2}\int_a^b \frac{2t}{(1+t^2)^2}.(t\cos(xt))dt = \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{1+t^2}.(t\cos(xt))\right]_a^b + \frac{1}{2}\int_a^b \frac{1}{1+t^2}(\cos(xt)-tx\sin(xt))dt$$

Passons à la limite quand $a\to 0$ et $b\to+\infty$:

$$\forall x\in\mathbb{R},\ h'(x) = \int_0^{+\infty}\frac{t^2\ \cos(xt)}{(1+t^2)^2}dt = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\cos(xt)}{1+t^2} - \frac{x}{2}\int_0^{+\infty}\frac{t\sin(xt)}{1+t^2}dt$$

(on montre que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t\sin(xt)}{1+t^2}dt$ est semi-convergente comme l'est $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}dt$)

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ h'(x) = \frac{1}{2}g(x) - \frac{x}{2}\int_0^{+\infty}\frac{t\sin(xt)}{1+t^2}dt}$$

Remarquons que $\dfrac{t}{1+t^2} = \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t(1+t^2)}$

donc $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t\sin(xt)}{1+t^2}dt = \int_0^{+\infty}\frac{\sin(xt)}{t}dt - \int_0^{+\infty}\frac{\sin(xt)}{t(t^2+1)}dt$

Le changement de variable $u=xt$ montre que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(xt)}{t}dt = \int_0^{+\infty}\frac{\sin(u)}{u}du = C_1 = cste$

• Posons $\displaystyle k(x) = \int_0^{+\infty}\frac{t\sin(xt)}{1+t^2}dt = c_1 - \int_0^{+\infty}\frac{\sin(xt)}{t(t^2+1)}dt$

la majoration $\left|\dfrac{\cos(xt)}{t^2+1}\right| \le \dfrac{1}{1+t^2}$ permet à nouveau d'appliquer le théorème de dérivation sous le signe $\int$ et de montrer que

$$\forall x>0,\ k'(x) = -\int_0^{+\infty}\frac{\cos(xt)}{t^2+1}dt = -g(x)$$

• $\forall x>0,\ g(x) = \dfrac{2}{x}h(x) \implies g'(x) = \dfrac{2}{x}h'(x) - \dfrac{2}{x^2}h(x)$

$$\implies g'(x) = \frac{2}{x}\left(\frac{1}{2}g(x) - \frac{x}{2}k(x)\right) - \frac{1}{x}g(x) = -k(x)$$

$$\implies g''(x) = -k'(x) = g(x)$$

$\boxed{g \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur }]0,+\infty[\text{ et est solution sur cet intervalle de l'équation différentielle } (E):\ y''-y=0}$

• Donc il existe $(A,B)\in\mathbb{R}^2,\ \forall x\in]0,+\infty[,\ g(x) = A.e^x + B.e^{-x}$

On a vu que $\forall x>0,\ g(x) = \dfrac{2}{x}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t\ \sin(xt)}{(1+t^2)^2}dt$

donc $\forall x>0,\ |g(x)| \le \dfrac{2}{x}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t\,|\sin(xt)|}{(1+t^2)^2}dt \le \frac{2}{x}\underbrace{\int_0^{+\infty}\frac{t}{(1+t^2)^2}dt}_{constante}$

cette majoration entraîne que $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0}$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$, nécessairement, $A=0$

donc $\forall x\in]0,+\infty[,\ g(x) = B.e^{-x}$

g étant continue en 0, $\lim\limits_{x\to0^+} g(x) = B = g(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}dt = \frac{\pi}{2}$

Donc, $\forall x\in]0,+\infty[,\ g(x) = \frac{\pi}{2}e^{-x}$ et , par parité de la fonction g,

$$\boxed{\forall x\in]0,+\infty[,\ \int_0^{+\infty}\frac{\cos(xt)}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}e^{-|x|}}$$

Exercice 7. Soit f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(\frac{x}{t})}{1+t^2} dt$.

(1) Étudier la continuité et la dérivabilité de f.

(2) Pour $x > 0$, calculer $f'(x)$.

(3) En déduire : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2} dt = -\frac{\pi^2}{8}$.

Sol : 75 ddl ,

On pose $u(x,t) = ...$ qui se controle par $\dfrac{\pi}{2(1+t^2)}$.

La continuité vient du thm du cours.

Pour la dérivée c'est plus subtil, $\dfrac{t}{(1+t^2)(t^2+x^2)} \leqslant \dfrac{1}{2x} . \dfrac{1}{1+t^2}$ car $2tx \leqslant x^2 + t^2$

Là ça va.

Là , on se place sur les segments $[a,b]$ de $\mathbb{R}_*^+$, le controle devient $\dfrac{1}{2a} . \dfrac{1}{1+t^2}$ intégrable.

Il vient $f'(x) = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{t.dt}{(1+t^2)(t^2+x^2)}$. Pour $x \neq 1$ elts simples.

$\dfrac{1}{x^2-1} . \left(\dfrac{t}{1+t^2} - \dfrac{t}{x^2+t^2} \right)$.

En faisant un peu attention, $f'(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2-1}$. Prolongeable en 1 par cie. Or f' cie.

Attention à 0 et nullité en 0 , $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\ln(t)}{t^2-1} dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^x \frac{\ln(t)}{t^2-1} dt = f(x) - f(\varepsilon)$.

On utilise $f(0) = 0$ et la continuité.

On peut encore prolonger en 1, car f cie.

On calcule $f(1)$ par primitive directe !

Exercice 8. Déterminer le domaine de définition et calculer : $g(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x - 1}{\ln t} dt$.

Sol : La fonction intégrée est cie sur $]0,1[$, en 1 prolongeable par cie valeur x.

En 0 , pour $x \geqslant 0$ prolongeable par la valeur 0.

Pour $x<0$, l'équivalent est $\dfrac{t^x}{\ln(t)}$ pour $x>-1$ on est en $o(t^x)$ donc cv.

Pour $x=-1$ Bertrand divergent . Pour $x<-1$ c'est pire. $\mathcal{D}_g=]-1,\infty[$.

On applique thm Leibniz, mais il faut revenir à des segments $[a,b]$, $a>-1$.

car $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = t^x \leqslant t^a$. Donc domination.

La fonction g est donc $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,\infty[$.

$g'(x)=\int_0^1 t^x dt = \frac{1}{x+1}$.

Puis $g(0)=0$, $g(x)=\ln(x+1)$.

Sol : CD p 704.

Exercice 8bis. Déterminer le domaine de définition : $g(x)=\displaystyle\int_0^1 \frac{t^x(t-1)}{\ln t}dt$.

Continuité, dérivabilité, calcul de $f'(x)$ puis de $f(x)$.

Sol : L'ensemble de définition vient de l'exo précédent.

Pour la dérivabilité, on revient aussi à des segments.

$\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = (t-1)e^{x.\ln(t)} \leqslant (1-t)t^a$. D'où la domination.

$g'(x)=\int_0^1 (t-1)t^x dt = \frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+1}$.

Donc $g(x)=\ln\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)+C$, étudions la limite en l'infini.

$0\leqslant g(x)\leqslant \displaystyle\int_0^1 Mt^x dt = \frac{M}{x+1} \to 0$. $C=0$.

86 93 DDL

Exercice 9. Montrer que, pour tout $x\geqslant 0$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}dt = \int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{x+t}dt$

(on montrera que les deux fonctions sont solutions sur $\mathbb{R}_*^+$ de l'équation différentielle $y''+y=\dfrac{1}{x}$, qu'elles sont continues en 0 et qu'elles ont même limite en $+\infty$)

Sol : Cd p 705, ddl 67 68

1. (a) Appliquons le théorème de continuité des intégrales à paramètre.

- Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $x \to \frac{e^{-xt}}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, la fonction $x \to \frac{e^{-xt}}{1+t^2}$ est cpm sur $\mathbb{R}_+$.

- On a

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \left|\frac{e^{-xt}}{1+t^2}\right| = \frac{e^{-xt}}{1+t^2} \leqslant \frac{1}{1+t^2}$$

La fonction $t \to \frac{1}{1+t^2}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+$;

elle est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, car $\lim\limits_{A \to +\infty} \displaystyle\int_0^A \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ existe et vaut $\pi/2$.

Cela fournit l'hypothèse de domination.

On en déduit que f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

(b) Pour tout $x > 0$, on peut écrire :

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-xt} \, \mathrm{d}t = \left[-\frac{e^{-xt}}{x}\right]_{t=0}^{t=+\infty} = \frac{1}{x}$$

On en déduit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

(c) Notons $\varphi : (x,t) \to \frac{e^{-xt}}{1+t^2}$ et appliquons le caractère local sur des segments,

pour établir que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

- Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $x \mapsto \varphi(x,t)$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_*^+$.

$\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t) = -\frac{te^{-xt}}{1+t^2}$ et $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x,t) = \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^2}$.

- Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $p \in [0,1]$.

La fonction $t \mapsto \frac{\partial^p \varphi}{\partial x^p}(x,t) = \frac{(-t)^p e^{-xt}}{1+t^2}$ est continue par morceaux, car continue, sur $\mathbb{R}_+$.

Comme $\frac{(-t)^p e^{-xt}}{1+t^2} \sim (-1)^p t^{p-2} e^{-xt} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$, au voisinage de $+\infty$, elle est intégrable sur cet intervalle, par comparaison aux intégrales de Riemann.

- La fonction $t \mapsto \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x,t) = \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^2}$ est continue par morceaux, car continue, sur $\mathbb{R}_+$.

- Soit $[a,b]$ un segment inclus dans $\mathbb{R}_+^*$. On a :

$$\forall (x,t) \in [a,b] \times \mathbb{R}_+^*, \left|\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x,t)\right| = \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^2} \leqslant e^{-xt} \leqslant e^{-at}$$

La fonction $t \mapsto e^{-at}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$;

d'où l'hypothèse de domination sur tout segment pour $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$.

Par suite, f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x,t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^2}\ \mathrm{d}t$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+^*, f''(x) + f(x) &= \int_0^{+\infty} \left(\frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^2} + \frac{e^{-xt}}{1+t^2} \right) \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-xt}\ \mathrm{d}t = \left[-\frac{e^{-xt}}{x} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

On peut donc conclure que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f''(x) + f(x) = \frac{1}{x}$$

- Pour $x > 0$, la fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{x+t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Pour $x = 0$, la fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ car,

au voisinage de 0 , on a $\sin t \sim t$.

Cela assure, pour $x \in \mathbb{R}_+$, l'existence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin t}{x+t}\ \mathrm{d}t$.

Fixons $x \geqslant 0$ et justifions la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t}\ \mathrm{d}t$, à l'aide d'une IPP :

- Le crochet $\left[-\dfrac{\cos t}{t+x} \right]_{t=1}^{t=+\infty}$ existe et vaut $\dfrac{\cos 1}{1+x}$.

* On a, pour tout $t \geqslant 1$: $\left| \dfrac{\cos t}{(t+x)^2} \right| \leqslant \dfrac{1}{(t+x)^2} \leqslant \dfrac{1}{t^2}$.

On en déduit la convergence absolue de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{(t+x)^2}\ \mathrm{d}t$,

par comparaison aux intégrales de Riemann.

Par suite, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t}\ \mathrm{d}t$ converge et l'on a :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t}\ \mathrm{d}t = \frac{\cos 1}{1+x} - \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{(t+x)^2}\ \mathrm{d}t$$

On a donc établi la convergence, pour tout $x \geqslant 0$, de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t} dt$

- Pour tout $x > 0$, la fonction $\psi :]x, +\infty[\to]0, +\infty[$, définie par $\psi(u) = u - x$

est une bijection strictement croissante, de classe $\mathcal{C}^1$.

D'après le théorème changement de variable, on peut donc écrire :

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t}\ \mathrm{d}t \\ &= \int_x^{+\infty} \frac{\sin(\psi(u))}{x+\psi(u)} \psi'(u)\mathrm{d}u = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(u-x)}{u} du \\ &= \int_x^{+\infty} \frac{\cos x \sin u - \sin x \cos u}{u} du \end{aligned}$$

En procédant comme dans l'étude précédente, on établit la convergence

des intégrales $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\ \mathrm{d}u$ et $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\ \mathrm{d}u$. On peut donc écrire :

$$g(x) = \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\ \mathrm{d}u - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\ \mathrm{d}u$$

Comme les fonctions $u \mapsto \frac{\sin u}{u}$ et $u \mapsto \frac{\cos v}{v}$ sont continues sur $\mathbb{R}^*$,

, on deduit thm fondamental analyse, que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*+$ avec, pout, tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} g'(x) = &- \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\ \mathrm{d}u - \frac{\cos x \sin x}{x} \\ &- \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\ \mathrm{d}u + \frac{\sin x \cos x}{x} \\ = &- \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\ \mathrm{d}u - \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\ \mathrm{d}u \end{aligned}$$

La fonction g' est de même de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec, pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} g''(x) = &- \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\ \mathrm{d}u + \frac{\sin^2 x}{x} \\ &+ \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\ \mathrm{d}u + \frac{\cos^2 x}{x} \\ = &- g(x) + \frac{1}{x} \end{aligned}$$

La fonction g est donc solution, sur $\mathbb{R}_+^*$, de la même équation différentielle que f :

$$y'' + y = \frac{1}{x}$$

Fixons $x \geqslant 0$ et effectuons une intégration par partie.

De $\left|\dfrac{1-\cos t}{t+x}\right| \leqslant \dfrac{1-\cos t}{t}$ pour $t > 0$, on tire $\lim\limits_{t \to 0}\left(\dfrac{1-\cos t}{t+x}\right) = 0$,

car $\dfrac{1-\text{cost}}{t} \sim \dfrac{t^2/2}{t}$, an voisinage de 0 .

De $\left|\dfrac{1-\cos t}{t+x}\right| \leqslant \dfrac{2}{t}$ pour $t > 0$, on tire $\lim\limits_{t \to +\infty}\left(\dfrac{1-\cos t}{t+x}\right) = 0$.

Par suite, le crochet $\left[\dfrac{1-\cos t}{t+x}\right]_0^{+\infty}$ existe et vaut 0.

On déduit du théorème d'IPP la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{(t+x)^2}\,\mathrm{d}t$ et l'égalité :

$$g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{(t+x)^2}\,\mathrm{d}t$$

- Appliquons le théorème de continuité des intégrales à paramètre.

* Pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto \frac{1-\cos t}{(t+x)^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, la fonction $t \mapsto \frac{1-\cos t}{(t+x)^2}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$.

- On a :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*, \left|\frac{1-\cos t}{(t+x)^2}\right| = \frac{1-\cos t}{(t+x)^2} \leqslant \frac{1-\cos t}{t^2}$$

La fonction $\varphi : t \mapsto \dfrac{1-\cos t}{t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Comme $\dfrac{1-\cos t}{t^2} \sim \dfrac{t^2/2}{t^2} = \dfrac{1}{2}$, au voisinage de 0,

la fonction φ a un prolongement continu sur $\mathbb{R}_+$, donc est intégrable sur $]0,1]$.

On a $\varphi(t) = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$, au voisinage de $+\infty$; on en déduit,

par comparaison aux intégrales de Riemann, l'intégrabilité de φ sur $[1,+\infty[$.

Ainsi φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Cela fournit l'hypothèse de domination.

On peut donc conclure que g est continue sur $\mathbb{R}_+$.

- On a :

$$\forall x > 0 \quad 0 \leqslant g(z) \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{2}{(t+x)^2} dt = \left[-\frac{2}{t+x} \right]_0^{+\infty} = \frac{2}{x}$$

On en déduit que $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$.

- Posons $h = f - g$. D'après les questions précédentes, la fonction h est continue sur R_+, de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ et est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle :

$$y'' + y = 0$$

On en deduit l'existence de $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x > 0 \quad h(x) = a \cos x + b \sin x$$

D'après l'étude précédente, on a $\lim_{x \to +\infty} h(x) = 0$.

Il en résulte que les deux suites $(h(2n\pi))_{n \in \mathbb{N}}$ et $\left(h\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ tendent vers 0 ;

comme $h(2n\pi) = a$ et $h\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = b$, il vient $a = b = 0$, d'où $h = 0$.

sur $\mathbb{R}_*^+$. Puis sur $\mathbb{R}^+$, par continuité en 0 .

On a donc êtabli que les fonctions f et g sont égales sur $\mathbb{R}_+$.

Coume $f(0) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = [\text{ Arctan } t]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$, on en déduit que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{~d}t = g(0) = \frac{\pi}{2}$$

Considérons $f:(x,t)\mapsto \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}$ définie sur $]0,+\infty[\times[0,+\infty[$
Pour tout $x\in]0,+\infty[$, $t\mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$ et intégrable car

$$|f(x,t)|\leqslant\frac{1}{1+t^2}$$

Pour$t\in[0,+\infty[$, la fonction $x\mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$ et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=-t\frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\text{et }\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)=t^2\frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}$$

Pour tout $x\in]0,+\infty[$, la fonctions $t\mapsto\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable.
La fonction $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ est continue en x, continue par morceaux en t.
Soit $[a,b]\subset]0,+\infty[$. Sur$[a,+\infty[\times[0,+\infty[$, on a

$$\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\right|\leqslant\mathrm{e}^{-at}$$

avec $\varphi:t\mapsto\mathrm{e}^{-at}$ continue par morceaux et intégrable sur $[0,+\infty[$.
Par domination sur tout compact, la fonction F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et

$$F''(x)+F(x)=\int_0^{+\infty}t^2\frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t+\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{x}$$

Enfin $F\xrightarrow[+\infty]{}0$ car

$$|f(x)|\leqslant\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\leqslant\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{x}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$$

Exercice 10. En utilisant une équation différentielle linéaire du premier ordre,

calculer $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}} \mathrm{e}^{ixt} dt.$

Sol : CD 704, 94 ddl , fabert .

Sol : a) On réalise le changement de variable $u = \sqrt{t}$, à justifier...

On obtient $z(0) = \sqrt{\pi}$.

b) $t \mapsto g(x,t) = \dfrac{\mathrm{e}^{(-1+t\cdot x)t}}{\sqrt{t}}$ est définie, continue par morceaux sur $]0, +\infty[$ et intégrable.

g admet une dérivée partielle $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t) = i \cdot \sqrt{t}\mathrm{e}^{(-1+ix)t}$.

$t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est définie et continue par morceaux sur $]0, +\infty[$,

$x \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$,

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \sqrt{t}\mathrm{e}^{-t} = \varphi(t)$$

avec φ intégrable sur $]0, +\infty[$.

La fonction z est donc définie et de classe $\mathcal{C}^1$ avec

$$z'(x) = \int_0^{+\infty} i \cdot \sqrt{t}\mathrm{e}^{(-1+i.x)t}\ \mathrm{d}t = -\frac{1}{2(x+i)} z(x)$$

Ceci par Ipp à justifier ! $f(t) = \sqrt{t}$, $g'(t) = \mathrm{e}^{(-1+i.x)t}$.

c)

$$\frac{-1}{2(x+i)} = \frac{-x+i}{2\left(x^2+1\right)} = -\frac{x}{2\left(x^2+1\right)} + \frac{i}{2\left(x^2+1\right)}$$

donc

$$z(x) = C \exp\left(i\frac{\arctan x}{2} - \frac{1}{4}\ln\left(x^2+1\right)\right) = \frac{C\mathrm{e}^{i(\arctan x)/2}}{\left(x^2+1\right)^{1/4}}$$

Puisque $z(0) = \sqrt{\pi}$, on conclut

$$z(x) = \frac{\sqrt{\pi}\mathrm{e}^{i(\arctan x)/2}}{\left(x^2+1\right)^{1/4}}$$

a) On réalise le changement de variable $u = \sqrt{t}$. On obtient $z(0) = \sqrt{\pi}$.
b) $t \mapsto g(x,t) = \frac{e^{(-1+i.x)t}}{\sqrt{t}}$ est définie, continue par morceaux sur $]0,+\infty[$ et intégrable.
g admet une dérivée partielle

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = i.\sqrt{t}e^{(-1+ix)t}$$

$t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est définie et continue par morceaux sur $]0,+\infty[$,
$x \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$,

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \sqrt{t}e^{-t} = \varphi(t)$$

avec φ intégrable sur $]0,+\infty[$.
La fonction z est donc définie et de classe $\mathcal{C}^1$ avec

$$z'(x) = \int_0^{+\infty} i.\sqrt{t}e^{(-1+i.x)t}\,dt \underset{\text{ipp}}{=} \frac{i}{2(1-ix)}\int_0^{+\infty}\frac{e^{(-1+i.x)t}}{\sqrt{t}}\,dt = -\frac{1}{2(x+i)}z(x)$$

c)

$$\frac{-1}{2(x+i)} = \frac{-x+i}{2(x^2+1)} = -\frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{i}{2(x^2+1)}$$

donc

$$z(x) = C\exp\left(i\frac{\arctan x}{2} - \frac{1}{4}\ln(x^2+1)\right) = \frac{Ce^{i(\arctan x)/2}}{(x^2+1)^{1/4}}$$

Puisque $z(0) = \sqrt{\pi}$, on conclut

$$z(x) = \frac{\sqrt{\pi}e^{i(\arctan x)/2}}{(x^2+1)^{1/4}}$$

Exercice 11. Recherche d'équivalent.

Soit $x > 0$. Montrer l'intégrabilité de $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t^2+x}$ sur $[0,+\infty[$.
On pose

$$\forall x \in]0,+\infty[, \qquad I(x) = \int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t^2+x}\,dt.$$

(1) Déterminer $\lim_{x\to+\infty} I(x)$.
(2) Déterminer $\lim_{x\to 0^+} I(x)$ puis un équivalent en 0 de $I(x)$.

Sol : L'intégrabilité est facile par domination en valeur absolue.

Ma variante :

$|I(x)| \leqslant \int_0^{\infty} \frac{dt}{x+t^2}$, $t = u\sqrt{x}, \mathcal{C}^1$, stric croissant donc bij.

$|I(x)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{\pi}{2}$, qui tend vers 0.

On peut aussi faire part cvd et monotonie.

Ou cvd à param cie, on force $x > 1$.

Pour la limite en 0^+**,** :

Solution plus succincte, qui utilise TL2(**). Cf ds3(2122) exo Q2.

$\exists M_2 > 0$, tel que pour tout $x \in]0, 1[, |f(x) - f(0) - xf'(0)| \leqslant M_2.\frac{x^2}{2}$.

Rq : $g(t) = \frac{\sin(t)}{t}$ est développable en série entière donc $\mathcal{C}^{\infty}$ et paire, $g'(0) = 0$.

Sol : Soit $a > 0$, $I(x) = \int_0^a \frac{\sin t}{t^2+x} dt + \int_a^{\infty} \frac{\sin t}{t^2+x} dt$.

$I(x) = \int_0^a \frac{t}{t^2+x} dt + \int_0^a (g(t)-1) \frac{t}{t^2+x} dt + \int_a^{\infty} \frac{\sin(t)}{t^2+x} dt$.

Celle de gauche : $\frac{1}{2} \left[\ln(t^2+x)\right]_0^a = (\ln(x+a^2) - \ln(x))/2 = -1/2. \ln(x) + \mathcal{O}(1)$.

Celle de droite est controlée en valeur absolue par $\int_a^{\infty} \frac{dt}{t^2} = 1/a$. Donc $\mathcal{O}(1)$ aussi.

Celle du milieu, avec (**), elle se contrôle en valeur absolue par $\int_0^a K.t^2.\frac{t}{t^2+x} dt$.

Qui se contrôle par $K \int_0^a t.dt = K.a^2/2$. Donc $\mathcal{O}(1)$ aussi.

Bilan : un terme en $-\ln(x)/2$, les autres sont tous bornés.

$I(x) = \int_0^{\sqrt{x}} + \int_{\sqrt{x}}^{\infty}$.

La première se contrôle par $\int_0^{\sqrt{x}} \frac{t.dt}{x+t^2} = \frac{1}{2}\ln(2)$. Prim directe.

La deuxième se sépare en (*) $\int_{\sqrt{x}}^{\infty} \frac{\sin(t)}{t^2} dt$ plus le "reste".

Je sépare ce morceau (*) en l'intégrale de 1 à l'infini qui est constante, plus de $\sqrt{x}$ à 1.

Pour la limite en 0^+**,** on est davantage embêté, car $t \mapsto \frac{\sin t}{t^2}$ n'est pas intégrable. On fait une démonstration en M.

Soit $M > 0$. Il existe $\delta > 0$ tel que
$$\int_\delta^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\,dt \geqslant M + 1.$$
De plus, on sait que
$$\lim_{x\to 0^+} \int_\delta^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2 + x}\,dt = \int_\delta^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\,dt,$$
donc il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $x \in]0, \eta[$,
$$\int_\delta^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2 + x}\,dt \geqslant M.$$
On peut même, sans se restreindre, choisir $\eta \leqslant \pi$. On a alors, pour tout $x \in]0, \eta[$,
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2 + x}\,dt \geqslant \int_\delta^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2 + x}\,dt \geqslant M.$$
On a bien prouvé $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2 + x}\,dt = +\infty$.

Équivalent, 1ère méthode Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un intervalle $[0, \eta]$ sur lequel $(1-\varepsilon)t \leqslant \sin t \leqslant t$. On découpe alors $I(x) = \int_0^\eta + \int_\eta^{+\infty}$. La deuxième intégrale est bornée quand on fait $x \to 0^+$ et la première, qui est positive, est comprise ainsi :
$$(1-\varepsilon) \int_0^\eta \frac{t}{t^2 + x}\,dt \leqslant I_1(x) \leqslant \int_0^\eta \frac{t}{t^2 + x}\,dt$$
soit
$$\frac{1}{2}(1-\varepsilon)\Big[\ln(x + \eta^2) - \ln x\Big] \leqslant I_1(x) \leqslant \frac{1}{2}\Big[\ln(x + \eta^2) - \ln x\Big],$$
ce qui montre que, pour x suffisamment petit, $-2I_1(x)/\ln x$ est compris entre $(1-2\varepsilon)$ et $(1+\varepsilon)$.

Conclusion : $I(x) \sim_{x\to 0^+} -\dfrac{1}{2}\ln x$.

Équivalent, 2ème méthode. On subodore, à la physicienne, qu'un équivalent sera donné par
$$J(x) = \int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\,dt \sim_{x\to 0^+} -\ln\sqrt{x} = -\frac{1}{2}\ln x.$$
On a en effet
$$I(x) - J(x) = \int_0^{\sqrt{x}} \frac{\sin t}{t^2 + x}\,dt + \int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{x \sin t}{t^2(t^2 + x)}\,dt = K(x) + L(x)$$
et l'on peut effectuer les majorations
$$|K(x)| \leqslant \int_0^{\sqrt{x}} \frac{t}{t^2 + x}\,dt \overset{y\,=\,t/\sqrt{x}}{=} \frac{1}{2}\ln 2,$$
et, en coupant $L(x)$ en deux parties :

$$\begin{aligned}\left|\int_{\sqrt{x}}^{1} \frac{x\sin t}{t^2(t^2+x)}\,dt\right| &\leqslant x\int_{\sqrt{x}}^{1} \frac{t}{t^2(t^2+x)}\,dt\\ &\leqslant x\int_{\sqrt{x}}^{1} \frac{t}{t^2+x}-\frac{1}{t}\,dt\\ &\leqslant \frac{x}{2}\ln(1+x) \sim_{x\to 0} \frac{x^2}{2},\end{aligned}$$

et $\left|\int_{1}^{+\infty} \frac{x\sin t}{t^2(t^2+x)}\,dt\right| \leqslant x\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{t^4}\,dt = O(x)$. C'est suffisant pour conclure.

Exercice 12. Soit $f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{t+x}dt$.

a) Montrer que f est définie, continue, sur $\mathbb{R}_+^*$. Etudier les variations de f.

b) Déterminer les limites de f en 0^+ et en $+\infty$.

c) Déterminer un équivalent de f en 0^+ et en $+\infty$.

Sol : Soit $g(x,t) = \dfrac{\cos(t)}{t+x}$ définie sur $\mathbb{R}_+^* \times [0,\pi/2]$.

g est continue par morceaux en t, pour $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$, $g(x,t) \leqslant \dfrac{1}{t+a} = \phi(t)$.

ϕ est intégrable sur $[0,\pi/2]$. f est donc continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

f est décroissante car par intégration bornes croissantes g est décroissante en x.

Rq : On aurait pu prouver la classe $\mathcal{C}^1$ et regarder le signe de la dérivée.

b) En l'infini : $0 \leqslant f(x) \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x+t}dt \to 0$.

Rq thm cv dominée à param cie !

En 0^+ , $f(x) \geqslant \int_0^{\frac{\pi}{4}} \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left(\frac{x+\pi/4}{x}\right) \to +\infty$.

c) En l'infini : $\dfrac{1}{x+\pi/2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(t) \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{x}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(t)dt$ donc $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \ln(x)$.

En 0^+, $1-t^2/2 \leqslant \cos(t) \leqslant 1$. Donc $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{t+x} - 1/2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{t^2dt}{t+x} \leqslant f(x) \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{t+x}$

L'une vaut $\ln\left(\frac{x+\pi/2}{x}\right) \sim -\ln(x)$.

L'autre est controlée par $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} tdt$.

Rq $+1-1$ dans l'intégrale et cv dominée à param cie (attention au signe).

Bref $f(x) \underset{0^+}{\sim} -\ln(x)$.

Exercice 13. Soit $g(x) = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-t^2} sin(2tx)dt$.

a) Classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

b) Former une équation différentielle linéaire d'ordre 1 vérifiée par g.

c) En déduire : $g(x) = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-t^2} sin(2tx)dt = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt$.

Sol : CD p 705.

Sol : a) D'abord l'intégrabilité est simple.

Le thm de dérivation des intégrales à paramètres s'applique facilement.

Il vient $g'(x) = \displaystyle\int_0^{\infty} 2te^{-t^2} cos(2tx)dt$.

b) On intègre par partie (attention) g, il vient $g'(x) = 1 - 2xg(x)$.

$u' = 2te^{-t^2}$.

c) Posons $h(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt$, elle vérifie l'équa diff.

Or $g(0) = h(0) = 0$ donc c'est la même (Thm Cauchy) ou résolution première année.

Exercice 14. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 x^x dx = \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$.

Sol :

Pour $x > 0$

$$x^x = \mathrm{e}^{x \ln x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x \ln x)^n}{n!}$$

donc

$$\int_0^1 x^x \, \mathrm{d}x = \int_{]0,1]} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$$

avec

$$f_n(x) = \frac{(x\ln x)^n}{n!}$$

Les fonctions f_n sont continues par morceaux, $\sum f_n$ converge simplement vers une fonction continue par morceaux sur $]0,1]$.

Les fonctions f_n sont intégrables et

$$\int_{]0,1]} |f_n| = \int_{]0,1[} \frac{(-1)^n x^n (\ln x)^n}{n!} \mathrm{d}x$$

Or

$$\int_\varepsilon^1 x^n (\ln x)^n \,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1} (\ln x)^n\right]_\varepsilon^1 - \frac{n}{n+1} \int_\varepsilon^1 x^n (\ln x)^{n-1} \,\mathrm{d}x$$

donc quand $\varepsilon \to 0$

$$\int_{]0,1]} x^n (\ln x)^n \,\mathrm{d}x = -\frac{n}{n+1} \int_{]0,1]} x^n (\ln x)^{n-1} \,\mathrm{d}x$$

Ainsi

$$\int_{]0,1]} x^n (\ln x)^n \,\mathrm{d}x = (-1)^n \frac{n}{n+1} \frac{n-1}{n+1} \cdots \frac{1}{n+1} \int_0^1 x^n \,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}$$

Par suite

$$\int_0^1 |f_n| \,\mathrm{d}x = \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$$

et il y a convergence de la série $\sum \int_0^1 |f_n|$.

Par le théorème d'intégration terme à terme, on obtient que l'intégrale $\int_{[0,1]} x^x \,\mathrm{d}x$ est définie et

$$\int_0^1 x^x \,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}$$

puis le résultat voulu.

Pour $x > 0$,

$$x^x = e^{x \ln x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x \ln x)^n}{n!}$$

donc

$$\int_0^1 x^x \, dx = \int_{]0,1]} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$$

avec

$$f_n(x) = \frac{(x \ln x)^n}{n!}$$

Les fonctions f_n sont continues par morceaux, $\sum f_n$ converge simplement vers une fonction continue par morceaux sur $]0, 1]$.

Les fonctions f_n sont intégrables et

$$\int_{]0,1]} |f_n| = \int_{]0,1[} \frac{(-1)^n x^n (\ln x)^n}{n!} \, dx$$

Or

$$\int_\varepsilon^1 x^n (\ln x)^n \, dx = \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1} (\ln x)^n\right]_\varepsilon^1 - \frac{n}{n+1} \int_\varepsilon^1 x^n (\ln x)^{n-1} \, dx$$

donc quand $\varepsilon \to 0$

$$\int_{]0,1]} x^n (\ln x)^n \, dx = -\frac{n}{n+1} \int_{]0,1]} x^n (\ln x)^{n-1} \, dx$$

Ainsi

$$\int_{]0,1]} x^n (\ln x)^n \, dx = (-1)^n \frac{n}{n+1} \frac{n-1}{n+1} \cdots \frac{1}{n+1} \int_0^1 x^n \, dx = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}$$

Par suite

$$\int_0^1 |f_n| \, dx = \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$$

et il y a convergence de la série $\sum \int_0^1 |f_n|$

Par le théorème d'intégration terme à terme, on obtient que l'intégrale $\int_{]0,1]} x^x \, dx$ est définie et

$$\int_0^1 x^x \, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x) \, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}$$

puis le résultat voulu.

Exercice 15. Donner la nature de la série de terme général $u_n = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-t}\cos^{2n}(t)dt$.

Sol : On a $u_n \geqslant v_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-t}\cos^{2n}(t)dt$, si la série des u_n cv alors celle des v_n aussi.

Par Fubini , il y aurait intégrabilité sur $]0,\pi/2]$ de $\displaystyle\sum_0^{\infty} e^{-t}\cos^{2n}(t) = \frac{e^{-t}}{\sin^2(t)}$.

Or en 0^+ , $\dfrac{e^{-t}}{\sin^2(t)} \sim \dfrac{1}{t^2}$. Donc $\sum u_n$ diverge.

Relire Fubini ! !

Voir ds8 ccp 2023 cv dominée à param cie ! !

Mettre des retours et des exos d'oraux pour mes colles et ddl.

Voir aussi progr de colles anciens...

Retours 24 cheron guittet suzie cevoz le picard verron favier dumont moise euger cheron traversaz pol

TCD retours 24 guittet anquetil courte

retours 23 maximil edouard legall arthur d marie vite vani barrault vasse thieulent heinrich debray vuidel

Maximil CCINP $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{t}}{e^t - 1}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sum_1^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$.

Exercice 2 : Mines Théo Ed

a) Déterminer la limite de $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{nt(1-t)}{(nt)^2 + (1-t)^2}dt$.

b) $2^{\text{ème}}$ question non traitée avec l'étude des $\sum {I_n}^2$ et $\sum I_n$.

Sol Analyse :

a) Cv dominée, la fonction cv simplement vers la fct nulle.

La fonction est dominée par 1/2 qui est intégrable sur le segment.

Ce contrôle vient de $2ab \leqslant (a^2 + b^2)$.

b) On va montrer que $I_n \underset{\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)}{n}$.

Il faut me relire avec attention, j'ai pu dérailler.

Un plan logique pour débuter :

On pose $u = nt$ de classe $\mathcal{C}^1$.

On arrive à $\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^{\infty} g_n(u)du$, avec $g_n(u) = \mathbb{1}_{[0,n]}\dfrac{u(1-\frac{u}{n})}{u^2+(1-\frac{u}{n})^2}$.

Alors à u fixé, quand n tend vers l'infini, on cv simple vers $\dfrac{u}{1+u^2}$.

Et là , désastre, pas intégrable !

Autre essai logique, on met $\dfrac{1}{n}$ en facteur, cv simple vers $g(t) = \dfrac{1-t}{t}$. Aïe...

Une idée plus poussée, on a vu apparaitre g, mais pb en 0^+.

Donc je l'enlève et je la fais apparaitre.

Pour gérer tout ça, je coupe en $1/n$.

Il faut relire , car j'ai vraiment pu écrire une...

On arrive à : $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{nt(1-t)}{(nt)^2+(1-t)^2}dt + \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{(1-t)dt}{nt} + \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{nt(1-t)}{(nt)^2+(1-t)^2} - \frac{(1-t)}{nt}dt.$

On doit controler le premier morceau par du négligeable devant l'équivalent envisagé.

$nt \leqslant 1$, la fonction est donc dominée par $\dfrac{(1-t)}{(nt)^2+(1-t)^2} \leqslant \dfrac{1}{1-t}$,

On calcule cette intégrale, qui se domine par $\dfrac{1}{n}$, grâce à $\ln(1+u) \leqslant u$. Bien.

Deuxième morceau : on le calcule, $\dfrac{\ln(n)}{n} - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}$, parfait.

Le troisième , je n'arrive pas à le controler par cv dominée, j'y croyais pourtant...

A la main : je réduis au même dénominateur.

Je passe le controle en valeurs absolues, $nt \geqslant 1$.

Il vient $\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{(1-t)^3dt}{n^2t^2+(1-t)^2} \leqslant \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{1}{n^2t^2}dt = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}$. Youpi !

Ai-je raté plus simple ? Une cv dominée ? ? ?

Mezalor, la série des I_n est clairement divergente et celle des carrés est convergente car négligeable devant $1/n^{3/2}$.

Legall Centrale 1 : Classique .

Soit $F(x) = \sum_{1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n^2+n}$.

1) Existence sur $\mathbb{R}^+$.

2) Continuité sur $\mathbb{R}^+$.

3) Classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^+_*$.

4) Donner F" (équa diff) , F', F.

Question de cours : Taylor avec reste intégral.

Sol : L'équation différentielle est $F\text{"} - F' = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}$.

Pour $\mathcal{C}^2$, caractère local sur $[a, +\infty[$.

Une primitive de $\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}$ est $\ln(1-e^{-x})$.

Les cstes peuvent se trouver grâce aux limites en l'infini.

© Arthur D Centrale 1 (ss prépa).

On pose $n > 0, u_n = \int_0^{\infty} \frac{1-\cos^n(t)}{t^2} dt$.

On admet $u_1 = \frac{\pi}{2}$.

1) Existence de $(u_n)_{\mathbb{N}}$ et valeur de u_2.

2) Mq $u \in [0,1]$, $\left|1-\cos^n\left(\sqrt{\frac{2u}{n}}\right)\right| \leqslant u$.

3) Mq pour $n > 0$, $u_n = \sqrt{2}\sqrt{n} \int_0^{\infty} \frac{1-\cos^n\left(\sqrt{\frac{2u}{n}}\right)}{u.\sqrt{u}} du$.

En déduire que : $\exists K \in \mathbb{R}$ tq $\underset{0}{\sim} K\sqrt{n}$.

Sol : Exo sympa que je ne connaissais pas.

1) Existence car cie sur l'ouvert et prolongeable par cie en 0.

En l'infini, c'est domniné en va par $\frac{2}{t^2}$.

$u_2 = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2} dt$.

Ipp, crochet cv et nul, $u' = \frac{1}{t^2}, v = \sin^2(t)$.

Qui donne $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin(2t)}{t} dt$, Dirichlet.

Qui elle même sort de u_1 par IPp $v = 1 - \cos(t), u' = \frac{1}{t^2}$.

Tout cela est hyper classique...

2) Application du TAF, $f(u) = \cos^n\left(\sqrt{\frac{2u}{n}}\right)$.

$|f'(u)| \leqslant 1$ après dérivation, majoration du cos par 1 et $\sin(a) \leqslant a$, pour $a > 0$.

Donc $|f(0) - f(u)| \leqslant |u - 0|. \sup\limits_{[0,1]} |f'|$.

3) Erreur d'énoncé ss importance.

On pose $t = \sqrt{\frac{2u}{n}}$, $\mathcal{C}^1$ st croissant bijectif.

Attention aux étourderies de calcul, $u_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{n} \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos^n\left(\sqrt{\frac{2u}{n}}\right)}{u.\sqrt{u}} du$.

On pense à la cv dominée, hyp classiques faciles.

Pour la domination, on utilise 2) sur $[0, 1]$ pour controler par $\frac{1}{\sqrt{u}}$.

Puis sur $[1, +\infty[$ par $\frac{2}{u\sqrt{u}}$. Toutes deux intégrables.

La cv simple à u fixé n'est pas si simple...

Le numérateur cv simplement vers $1 - e^{-u}$.

Bref l'intégrale cv vers $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-u}}{u\sqrt{u}}$, ouf intégrable ! Gagné .

© CCINP Marie Léo Exo 1 .

$I_n = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\arctan(x + n)}{(x + n)\sqrt{x}} dx$.

Existence, limite, équivalent.

Sol : cv car cie sur l'ouvert et équivalente en 0 à $\dfrac{\arctan(n)}{n\sqrt{x}}$, Riemann.

En l'infini : équivalente à $\dfrac{\pi}{2.x^{3/2}}$, Riemann.

On devrait appliquer le TCD , à x fixé la limite est nulle.

On cherche une domination intégrable indépendante de n.

$\varphi(x) = \dfrac{\pi}{2.(x+1).\sqrt{x}}$ fait l'affaire I_n tend vers 0.

Pour l'équivalent, (**) , $u = nx$ de classe $\mathcal{C}^1$ strict croissant et bij de $\mathbb{R}_+^*$ sur lui même.

$\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ arrive en facteur, TCD , même domination, cv simple vers φ.

On calcule l'intégrale par $u = v^2$ (**) ... $I_n \sim \dfrac{\pi^2}{2\sqrt{n}}$.

Vite B CCINp :

Exo 1 : $I = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos(t)}{1+e^t} dt$.

Existence et $I = \displaystyle\sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}.n}{1+n^2}$.

Sol :

Existence facile , cie sur I et dominée par e^{-t} en l'infini.

On multiplie par e^{-t} num et dénominateur.

On développe en dse (géométrique) $\dfrac{1}{1+e^{-t}} = \displaystyle\sum_0^{\infty} (-1)^k e^{-kt}$.

SS réserve d'inversion , on calcule l'intégrale obtenue comme partie réelle de $e^{-(1+k-i)}$.

Nickel ! $(-1)^k . \dfrac{1+k}{1+(1+k)^2}$, on décale de un cran l'indice, CC de l'énoncé.

Pour intervertir, CVU absurde , on n'est pas sur un segment.

Fubini (TAT) , non car la série en jeu est en $1/k$,divte.

Je regarde bien sûr les sommes partielles, le vrai pb (la cv simple vient du dse)

est la majoration par une intégrable.

$G_n = \sum_0^n (-1)ke^{-(k+1)t}\cos(t)$.

On factorise par le cos, il reste un objet CSSA, donc dominé par le premier terme engagé.

Bref par e^{-t} en fin de boulot. Gagné.

Gautier Vasse CCINP.

Exercice 2 :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{te^{-tx}}{e^t - 1} dt$$

Q1) Déterminer le domaine de définition de f.

Q2) Déterminer sa limite en $+\infty$.

Q3) Calculer $f(x-1) - f(x)$.

Q4) En déduire un développement en séries de f.

Q5) Trouver d'une autre manière ce développement en séries.

Analyse : 1) On peut prolonger par cie en 0.

Pour $x > -1$, la fonction est équivalente en $+\infty$ à $te^{\beta t}$, avec $\beta < 0$. Cvte.

Pour $x \leqslant -1$, div grossière.

2) Ca tend vers 0 en l'infini par thm de cvd à param cie,

pour $x > 0$ on peut dominer par $t \mapsto \dfrac{t}{e^t - 1}$ intégrable.

A t fixé la fonction s'écrase vers la fct nulle.

3) On part bien sûr de $x > 0$ par Q1.

On calcule la somme téléscopique qui cv grâce à 2) on a $f(x) = \sum_1^\infty \dfrac{1}{(x+k)^2}$.

4) Vu.

DSE , ben non série de fcts , erreur de retour par Gautier...Voir Q3...

5) Classique on multiplie par e^{-t} haut et bas.

On développe en dse (géométrique), on a $\displaystyle\int_0^{\infty} t.e^{-(x+1)t} \sum_0^{\infty} e^{-kt}$.

Ss réserve d'inversion, on arrive à une série d'intégrales qui se calculent bien par IPP.

On tombe sur $\dfrac{1}{(x+1+k)^2}$, parfait.

TAT fonctionne bien car à $x>-1$ fixé on est en $1/k^2$.

---

719 mines 2019 3 élèves...

719. On pose, pour tout réel $x>1, F(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\operatorname{sh} t}{t} \mathrm{~d} t$.

a) Vérifier que la fonction F est bien définie.

b) Déterminer le comportement asymptotique de F en $+\infty$.

c) Calculer $F(x)$.

Sol : 719

$\boldsymbol{f}:(x, t) \mapsto e^{-xt} \dfrac{\operatorname{sh} t}{t}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]1,+\infty[\times \mathbb{R}^{+*}$

On se donne x dans $]1,+\infty[$.

$t \mapsto f(x, t)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$(avec $f(0)=1$).

Pour tout $t \geqslant 1$, on a :

$$0 \leqslant e^{-xt} \frac{\operatorname{sh} t}{t} \leqslant \frac{1}{2t} e^{-(x-1)t}$$

Par domination, f_x est donc intégrable sur $[1,+\infty[$.

En conséquence, F est bien définie sur $]1,+\infty[$.

On va montrer que $\lim\limits_{x \rightarrow+\infty} F(x)=0$.

Pour cela, soit (x_n) une suite de $[2,+\infty[$.

On suppose que $\lim\limits_{n \rightarrow+\infty} x_n=+\infty$.

Il s'agit de montrer que $\lim\limits_{n \rightarrow+\infty} F(x_n)=0$.

On définit les fonctions $f_n: t \mapsto f(x_n, t)$.

Ainsi $F\left(x_n\right)=\int_0^{+\infty} f_n(t) \mathrm{d} t$.

Chaque f_n est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, et $\left(f_n\right)$ converge simplement sur $\mathbb{R}^{+*}$ vers la fonction nulle.

La suite $\left(f_n\right)$ converge simplement vers la fonction nulle.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t>0$, on a :

$$0 \leqslant f_n(t) \leqslant e^{-2 t} \frac{\operatorname{sh} t}{t}$$

(fonction intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$).

Ainsi $\lim\limits_{n \rightarrow+\infty} F\left(x_n\right)=0$ (convergence dominée).

Donc $\lim\limits_{x \rightarrow+\infty} F(x)=0$ (caractérisation séquentielle).

- On en vient au calcul de F par une première méthode.

On va montrer que F est $\mathcal{C}^1$ sur $]1,+\infty[$.

Ensuite on calculera $F^{\prime}(x)$ pour en déduire $F(x)$.

Pour $x>1, f_x: t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Pour $t>0, x \mapsto f(x, t)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]1,+\infty[$.

De plus $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, t)=-e^{-x t} \operatorname{sh} t$.

On se donne $a>1$. Pour $x \geqslant a$ et $t>0$, on a :

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\right| \leqslant \mathrm{e}^{-a t} \operatorname{sh}(t) \leqslant \frac{1}{2} \mathrm{e}^{-(a-1) t}$$

(intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$).

Le théorème de dérivabilité d'une intégrale à paramètre s'applique.

Donc F est $\mathcal{C}^1$ sur $]1,+\infty[$ et :

$$\begin{aligned}F'(x) &= -\int_0^{+\infty} e^{-xt}\,\mathrm{sh}\, t \, \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \left(e^{-t(1+x)} - e^{t(1-x)}\right) \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{e^{-t(1+x)}}{-(1+x)} - \frac{e^{t(1-x)}}{(1-x)}\right]_0^{+\infty}\end{aligned}$$

On trouve donc $F'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$.

Ainsi $F(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$

- Deuxième méthode, avec le DSE de $t \mapsto \mathrm{sh}t$:

$$F(x) = \int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} g_n(t)\mathrm{d}t \text{ où } g_n(t) = \frac{e^{-xt}t^{2n}}{(2n+1)!}$$

Chaque g_n est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

De plus $\sum\limits_{n\geqslant 0} g_n$ est CVS sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Sa somme $t \mapsto e^{-xt}\dfrac{\mathrm{sh}t}{t}$ est cpm sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons :

$$\begin{aligned}J_n &= \int_0^{+\infty} |g_n(t)| \, \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{(2n+1)!}\int_0^{+\infty} e^{-xt}t^{2n} \, \mathrm{d}t\end{aligned}$$

Le changement de variable $u = xt$ (recevable ?) donne :

$$\begin{aligned}J_n &= \frac{1}{(2n+1)!}\frac{1}{x^{2n+1}}\int_0^{+\infty} e^{-u}u^{2n} \, \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{(2n+1)x^{2n+1}} \leqslant \frac{1}{x^{2n+1}}\end{aligned}$$

Sachant $x > 1$, la série $\sum \int_0^{+\infty} |g_n(t)| \, \mathrm{d}t$ converge.

Le théorème d'intégration terme à terme donne :

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} g_n(t)\mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)x^{2n+1}} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \end{aligned}$$

On en déduit par équivalent de première année que $F \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{x}$.

Rq : pour Clément L : cet équivalent se trouve assez facilement par IPP.

$u' = e^{-xt}$, le crochet est convergent et vaut $\frac{1}{x}$.

Le morceau restant est de type $\frac{1}{x}o(1)$, pour les mêmes raisons que $F \to 0$.

© Heinrich Centrale 1

Soit $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ continue, décroissante et intégrable , sur $\mathbb{R}^+$.

1) Montrer que, par une comparainon série-intégrale,

$\forall x \in \mathbb{R}^+, \sum_{n\geqslant 0} \varphi(x+n)$ est une série convergente.

2) On pose le problème suivant :

$$(P) \begin{cases} f(x+1) + f(x) = \varphi(x) \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0 \end{cases}$$

Montrer que l'expresion de f est nécessairement : $\forall x \in \mathbb{R}^+$

$$P(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \varphi(x+n)$$

3) Montrer que $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \varphi(x+n)$ satisfait (P).

Conclure (nbre de solution de (P)).

4) Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}_+$.

Sol :

1) Un dessin clarifie très bien les idées.

$\lfloor x \rfloor + n \leqslant x + n \leqslant \lfloor x \rfloor + 1 + n$ donc $\varphi(\lfloor x \rfloor + n) \geqslant \varphi(x+n) \geqslant \varphi(\lfloor x \rfloor + 1 + n)$

Notre série est à termes positifs ,il suffit de majorer.

Par comparaison, $\displaystyle\int_{\lfloor x \rfloor - 1 + n}^{\lfloor x \rfloor + n} \varphi \geqslant \varphi(\lfloor x \rfloor + n) \geqslant \varphi(x+n)$, gagné.

2) Rq(*) pour la suite $\lim_{\infty} \varphi = 0$ csq de ce qui précède.

Par calcul élémentaire $f(x) = \varphi(x) - \varphi(x+1) + f(x+2)$, rec aisée :

$$f(x) = \sum_{0}^{N} (-1)^k \varphi(x+k) + (-1)^{N+1} f(x+N+1).$$

On fait tendre N vers $+\infty$ tout possède une limite ! La CN est acquise.

3) La série utilisée est abs cvte.

Mais elle vérifie aussi le CSSA donc dominée par le premier terme engagé.

Il tend vers 0 (*) .

Il reste la première clause : On revient en somme partielle (pas obligé séries abs cvtes),

on décale l'un des indices, tout téléscope sauf 2 termes , l'un tend vers 0. Gagné.

On a une CNS donc solution unique au pb.

4) On va utiliser le caractère local et un thm de transfert.

f se présente comme une série d'objets cies.

Je me place sur $[0, A]$, je regarde le reste pour une éventuelle cv uniforme.

On le controle grâce au CSSA $\left|\displaystyle\sum_{N}^{\infty}\right| \leqslant |f_N| \leqslant \varphi(N)$. Yes.

Rq local inutile ?

Vuidel CCINP :

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \neq 0$, $f_n(x) = \dfrac{(1+\frac{x}{n})^n - 1}{x}$. $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)$.

1) Existence de I_n.

2) Mq $\lim_{\infty} I_n = \displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{k.k!}$.

Algèbre :

$A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A^2 = A^T$, inversible, $A \neq I_2$.

1) Polynôme annulateur.

2) Mq les vp sont des racines des poly annu...En déduire le spectre de A.

3) Mq A est orthogonale.

4) Déterminant de A, puis que vaut A.

Sol :

1) Attention piégeux, n fixé ! La fct tend vers 1 en 0 donc cie !

Kdo : exp de ln, puis $(e^u - 1) \underset{0}{\sim} u$. Bref I_n existe.

A x fixé (cv simple) Comme en 1) vers $x \mapsto \dfrac{e^x - 1}{x}$

qui est intégrable car cie sur un segment.

Or $\ln(1+u) \leqslant u$ donc $f_n(x) \leqslant \dfrac{e^x - 1}{x}$, TCD , $\lim\limits_{\infty} I_n = L = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^x - 1}{x} dx$.

Je dévellope $e^x - 1$ en dse. $L = \displaystyle\int_0^1 \sum_1^\infty \frac{x^{k-1}}{k!}$.

Ss réserve d'interversion $L = \displaystyle\sum_1^\infty \int_0^1 \frac{x^{k-1}}{k!} = \sum_1^\infty \frac{1}{k.k!}$.

Le thm de Fubini (T à T) s'applique car la série des $\displaystyle\int |g_k|$ cv.

CCINP Guittet

Calculer $\lim\limits_{\infty} \displaystyle\int_0^\infty \frac{x^n}{1 + x^{n+2}} dx$.

Analyse : L'intégrale cv car cie et équivalent à $\dfrac{1}{x^2}$ en $+\infty$.

On regarde la cv simple, sur $[0, 1[$ on va vers la fct nulle.

Sur $]1, +\infty[$ on va vers $\dfrac{1}{x^2}$, en 1 c'est $1/2$.

Il nous faudrait une domination intégrable.

On prend la fonction cie pm qui vaut 1 sur $[0, 1]$ et $\dfrac{1}{x^2}$ après.

Le TCD s'applique, la limite est $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1$.

Exercice 3 : Mines Anquetil.

Etudier la convergence de $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^{-\frac{1}{n}} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n} \, \mathrm{d}x$.

Indication orale : Séparer l'intégrale en $x = 1$ et traiter indépendalent les deux intégrales

Exercice 3 :

Etudier la convergence de $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^{-\frac{1}{n}} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n} \, \mathrm{d}x$.

Idée : Séparer l'intégrale en $x = 1$ et traiter indépendalent les deux intégrales.

Sol exo 3 :

a) Cv de I_n, d'abord la fct est cpm sur $\mathbb{R}_*^+$.

Tout est positif n est **fixé** , en 0^+, c'est dominé par $x^{\frac{-1}{n}} \in \mathcal{L}^1$ en 0^+.

En $+\infty$, comme tjs, on met les puissances au dénominateur, on y voit bcp bcp plus clair.

Notre fonction est majorée par (t out est positif n est **fixé**) $\dfrac{n^n}{x^{n+1/n}}$ qui est intégrable .

b) Regardons la cv simple (x fixé) :

A gauche, ça tend vers 1, à droite après DL facile, ça tend vers e^{-x}.

c) Cherchons à appliquer le thm CVD :

Il nous faut une majoration intégrable indépendante de n.

Les pbs sont très différents entre 0 et 1, qu'après $x = 1$.

Sur $[0, 1]$, le côté droit est majoré par 1, donc on est controlé par $x^{-\frac{1}{n}}$.

Qui est lui même dominé par $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ intégrable en 0.

Sur $[1, +\infty[$:

Je vais directement vers un bon choix, après avoir cherché...

On va prouver que $\dfrac{1}{x^2}$ fait l'affaire .

Il nous **suffirait** que $\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n \geqslant x^2$.

Mais nous n'avons pas besoin de toutes les valeurs de n, seulement pour n "grand".

On passe au ln ce qui ne change rien.

Je pose $g_n(x) = n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - 2\ln(x)$.

On fait un tableau de variations sur $[1,+\infty[$:

La dérivée s'annule en $\dfrac{2n}{n-2}$ qui sera donc le minimum.

Si il est positif, c'est gagné, on calcule $g_n\left(\dfrac{2n}{n-2}\right) = n.\ln\left(1+\dfrac{2}{n-2}\right) - 2\ln\left(\dfrac{2n}{n-2}\right)$.

Ceci tend vers $2-\ln(2) > 0$ en l'infini, donc deviendra positif pour n "grand".

Courte telecom

Analyse :

$I_n = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin(nx)dx}{1+x^3.n^4}$, $I = \displaystyle\int_0^\infty \frac{tdt}{1+t^3}$, $J = \displaystyle\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^3}$.

1) Mq $I = J$, puis donner I en regardant $I+J$.

2) Par chgt $t = n^{4/3}.x$ tver un équivalent de I_n.

Autres questions d'équivalents.

Chéron telecom

$x \in]0,1]$, $a \in [0,1]$.

$f_n(x) = \dfrac{1-e^{-nx}}{x^a.(1+x^n)}$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx$.

1) Cv simple et limite simple.

2) Valeurs de a pour avoir la cv uniforme ?

3) Cv de I_n.

4) $a < 1 =$, limite de I_n ?

5) Le cas $a = 1$.

Suzie CCINP

Exo 1

$f_n(x) = \dfrac{x^{2n+1}\ln(x)}{x^2-1}$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)dt$.

a) Intégrabilité ?

b) $\lim\limits_{\infty} I_n$?

c) Mq $I_n = \dfrac{1}{4}\displaystyle\sum_{n+1}^{\infty}\dfrac{1}{k^2}$.

d) $h_n(x) = x^{2n+1}\ln(x)$.

cv simple et uniforme sur $]0,1[$.

e) ?

Exo 2 Cevoz CCINP

$F(x) = \displaystyle\int_0^{\infty}\dfrac{1-e^{-x.t^2}}{t^2}dt$.

1) Domaine de def

2) Classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_*^+$.

Analyse : $a_n = \displaystyle\int_0^1 \dfrac{t^n dt}{1+t^2}$.

1) Mq $a_n = \dfrac{1}{2(n+1)} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

On définit $S(x) = \displaystyle\sum_0^{\infty}(n+1)a_n x^n$.

2) Rayon et domaine de cv .

3) $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \dfrac{du}{(1+u^2)(1-ux)}$, Mq F est définie sur $]-\infty,1[$.

4) ?

Sol Analyse 1) IPP

Verron ccinp ex fait en cours bcp de calcul F, F', F" etc...

Analyse (sans préparation) Favier Mines

On note $f(x) = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-xt}\ln(t)dt$.

1) Domaine de définition de f.

2) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et même pourquoi pas $\mathcal{C}^{\infty}$.

3) Déterminer une équa diff vérifiée par f, expliquer la méthode pour la résoudre.

Dumont Mines DDL 113

On nomme $\Delta = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-t^2}dt$.

1) $I_n = \displaystyle\int_0^{\infty} t^{2n}e^{-t^2}dt$, existence et calcul avec des factorielles.

2) $F(x) = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-t^2}\cos(xt)dt$, existence et calcul en fonction de Δ.

3) Retrouver $F(x)$ en calculant $F'(x)$.

Faire

Moise Mines

Déterminer ttes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tq $A^5 + A^3 + A = 3I_n$ et de déterminant 1.

Analyse :

$f(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-x.\tan(t)}dt.$

1) Etude et représentation de f.

2) Etude de $u_{n+1} = f(u_n)$, u_0 qcq.

3) ?

Sol :

1) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car sur $[A, +\infty[$, $A < 0$ on peut contrôler

l'intérieur par e^{-A} qui est intégrable sur un segment.

J'ai utilisé le caractère local de la dérivation et la tgte est majorée par 1.

$f'(x) = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(t) e^{-x.\tan(t)} dt < 0.$

f est décroissante, de limite nulle en $+\infty$ et de limite $+\infty$ en $-\infty$.

Donc la fonction $f(x) - x$ n'a qu'une racine, bref un point fixe unique α.

Pour la limite en $+\infty$ thm cv dominée à param cie, la majorante est fct cste 1.

En $-\infty$, on minore f par $\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-xt} dt$, par convexité de la tgte sur notre intervalle.

2) Suite récurrente associèe à f décroissante, ça ne vend pas du rêve...

Sauf si la fonction est contractante !

Sur $\mathbb{R}$ elle ne l'est pas mais sur $\mathbb{R}^+$ oui !

Or par tableau de variations immédiat $\mathbb{R}^+$ est stable par f et si commence dans

$\mathbb{R}^-$ on arrive immédiatement dans $\mathbb{R}^+$.

Elle est contractante de rapport $K = \frac{\pi}{4} < 1$.

On le prouve par IAF en controlant f', on utilise qu'on est sur $\mathbb{R}^+$ et que $\tan(t) \leqslant 1$.

L'exponentielle à l'intérieur est majorée par 1.

La suite cv donc vers ce pt fixe.

$|u_n - \alpha| \leqslant K^n |u_0 - \alpha|$.

Euger Mines

$u_n = \sum_0^{+\infty} \frac{1}{n^2 + k^2}$

1) Equivalent de u_n en $+\infty$?

2) $A_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{e^t - 1} dt$

Limite de A_n ?

3) En déduire que : $\int_0^{\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.

Sol :

Sol :

1) Par comparaison série intégrale, $f(t) = \dfrac{1}{n^2+t^2}$, $u_n \sim \dfrac{\pi}{2n}$.

2) $A_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(nt) \sum_1^{\infty} e^{-kt} dt = \sum_1^{+\infty} \frac{n}{n^2+k^2}$.

Ca tend vers $\dfrac{\pi}{2}$. On est passé sur $\mathbb{C}$ et TAT.

3) On pose $u = nt$ à justifier.

On arrive à $\dfrac{1}{n} \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin(u)}{(e^{\frac{u}{n}}-1)} du$.

CVS vers LJ, mais pb de cvd , pas intégrable.

On fait IPP pour gagner en degré.

Rappel : $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \int_0^{\infty} \frac{1-\cos(u)}{u^2} du$.

Bref $f' = \sin(u), f(u) = 1 - \cos(u)$, $g(u) = \dfrac{1}{(e^{\frac{u}{n}}-1)}, g' = \ldots$.

n est fixé ici.

Crochet nul, le g_n cvs vers $\varphi(u) = \dfrac{1-\cos(u)}{u^2}$.

Ca sent bon !

Il nous faut une intégrable ind de n pour la cvd φ est ok.

Car $\forall n, u$, $u^2 e^{\frac{u}{n}} \leqslant n^2 (e^{\frac{u}{n}} - 1)^2$. Pareil que $x.e^{\frac{x}{2}} \leqslant e^x - 1$.

Qui se démontre par étude de courbe, en dérivant 3 fois...

Chéron CCINP

Exo 1 : $f_n(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^n . \ln(n)}$.

1) Domaine de déf de $\sum f_n$. On note S la somme.

2) Mq pas de cv normale.

3)a) Mq $|\displaystyle\sum_{n+1} \infty f_n(x)| \leqslant \frac{1}{\ln(n+1)}$.

3)b) En déduire la coninuité de S.

4) S est-elle intégrable sur D ?

Traversaz telecom

$x \geqslant 0,\ f(x) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} dt.$

1) Existence de f.

2) $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+)$? Calcul complet de f' .

3) Limite de f en $+\infty$, valeur de f.

Analyse :

$f(\alpha) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^\alpha.(1+x)}.$

1) Domaine de def.

2) Continuité de f.

Equivalent de f en 0.

Voir DDL82 int param

Exercice 82 [03736] [correction] On pose

$$f(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha(1+x)}$$

a) Etudier l'ensemble de définition de f. b) Donner un équivalent de f en 0 . c) Montrer que le graphe de f admet une symétrie d'axe $x = 1/2$. d) Montrer que f est continue sur son ensemble de définition. e) Calculer la borne inférieure de f.
Sol

Exercice 82 : [énoncé] a) La fonction $x \mapsto 1/x^\alpha(1+x)$ est définie et continue par morceaux sur $]\ 0, +\infty[$ avec

$$\frac{1}{x^\alpha(1+x)} \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{1}{x^\alpha} \text{ et } \frac{1}{x^\alpha(1+x)} \underset{x\to +\infty}{\sim} \frac{1}{x^{\alpha+1}}$$

Cette fonction est donc intégrable si, et seulement si, $\alpha \in]0,1[$. La fonction intégrée étant de surcroît positive, l'intégrale définissant $f(\alpha)$ converge si, et seulement si, $\alpha \in]0,1[$. b) On a

$$f(\alpha) - \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha+1}} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha(1+x)} - \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha+1}(1+x)}$$

Or

$$\left|\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha+1}(1+x)}\right| \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(1+x)} = C$$

et pour $\alpha \leqslant 1/2$

$$\left|\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha}(1+x)}\right| \leqslant \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+x)} = C'$$

On a donc

$$f(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha+1}} + O(1) = \frac{1}{\alpha} + O(1) \sim \frac{1}{\alpha}$$

c) Par le changement de variable $\mathcal{C}^1$ bijectif $x = 1/t$, on obtient $f(\alpha) = f(1-\alpha)$ d'où la symétrie affirmée. d) Posons

$$u(\alpha, x) = \frac{1}{x^{\alpha}(1+x)}$$

Pour chaque $x \in]0, +\infty[$, la fonction $\alpha \mapsto u(\alpha, x)$ est continue et pour chaque $\alpha \in]0, 1[$ la fonction $x \mapsto u(\alpha, x)$ est continue par morceaux. Enfin pour $\alpha \in [a, b] \in]0, 1[$(avec $a > 0$), on a

$$|u(x, \alpha)| \leqslant \frac{1}{x^a(1+x)} \sin x \in [1, +\infty[$$

et

$$|u(x, \alpha)| \leqslant \frac{1}{x^b(1+x)} \text{ si } x \in \left]0, 1\right]$$

Ainsi

$$|u(x, \alpha)| \leqslant \varphi_{a,b}(x) \text{ pour } x \in]\, 0, +\infty\, |$$

en posant $\varphi_a(x) = u(a, x) + u(b, x)$ qui est intégrable. Par domination sur tout segment, on peut affirmer que f est continue sur $]0, 1[$. e) Par le changement de variable $x = 1/t$, on peut écrire

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha}(1+x)} = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{1-\alpha}(1+t)}$$

et alors

$$f(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{x^{1-\alpha} + x^{\alpha}}{x(1+x)} \mathrm{d}x$$

On vérifie que pour $x \geqslant 1$, la fonction $\alpha \mapsto x^{1-\alpha} + x^{\alpha}$ est décroissante sur $]0, 1/2]$ puis croissante sur $[1/2, 1[$. La fonction f a donc la même monotonie et son minimum est donc

$$f(1/2) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}(1+t)} = \pi$$

via le changement de variable $u = \sqrt{t}$.

Relire...