Exercices Fonctions génératrices
PSI *
Année 2020-2021

Année 1.

## Fonctions génératrices

Taper les sol qui manquent.

Il en manque ? ?

Remarque : Le cours contient beaucoup d'exercices, dont certains seront corrigés en TD.

Je serais certainement amené à en rajouter .

Je n'ai pas encore tapé toutes les solutions, mais elles sont prêtes.

Exercice 0 a : près du cours...

Soit $G_X$ la fonction génératrice de $X$ à valeurs entières.

Donner les fonctions génératrices de $X+1$ et $2X$.

Sol à taper exo de ref.

C'est du cours , pour la première : $G_{X+1}(t) = E(t^{X+1}) = tG_X(t)$ par linéarité.

Ou encore : $\sum_1^\infty \mathcal{P}(X+1=n)t^n = \sum_0^\infty \mathcal{P}(X=k)t^{k+1}$ par décalage d'indice et $X$ dans $\mathbb{N}$...

Pour l'autre : $G_{2X}(t)) = E(t^{2X}) = E((t^2)^X) = G_X(t^2)$.

Ou encore : $\sum_0^\infty \mathcal{P}(X=n/2)t^n = \sum_0^\infty \mathcal{P}(X=s)t^{2s} = G_X(t^2)$ . Chgt indice et valeurs $\mathbb{N}$...

Exercice 0 b : près du cours...

Donner la loi de la somme de deux variables aléatoires indépendantes de

loi binômiale de paramètres $(n,p)$ et $(m,p)$.

Sol à taper exo de ref.

Sol : On calcule $G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t)$ par indépendance.

$G_X(t)G_Y(t) = (q+pt)^n(q+pt)^m = (q+pt)^{n+m}$ donc par bijection $X+Y \rightsquigarrow \mathcal{B}(n+m,p)$.

Exercice 0 c : près du cours...

Soit X un variable aléatoire entière, de fonction génératrice $G_X$.

Soit A l'événement $X$ est pair.

- Identifier la loi de $Y = (1+(-1)^X)/2$.

- Exprimer $\mathcal{P}(A)$ en fonction de $G_X(-1)$.

- Calculer $\mathcal{P}(A)$ lorsque $X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

Sol à taper : DDL p 396.

Sol : Lorsque $X$ pair, $Y = 1$ , sinon $Y = 0$ .

Donc $Y$ suit une Bernoulli de paramètre $p = P(A)$.

$G_X(t) = E(t^X)$ sur $[-1,1]$ .

$E(Y) = P(A)$ car Bernoulli. $E(Y) = (1/2)(1+E((-1)^X) = (1/2)(1+G_X(-1))$ par linéarité.

(c) $X$ suit une Poisson , donc $G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$ donc $P(A) = \frac{1+e^{-2\lambda}}{2} = e^{-\lambda}ch(\lambda)$.

Exercice 0 d : près du cours...

Soit X une variable aléatoire de fonction génératrice $G_X(t) = \dfrac{t}{2-t^2}$ .

Déterminer les lois de X et X/2.

Sol à taper exo de ref.

Sol : $\dfrac{s}{2-s^2} = \dfrac{s}{2}\left(\dfrac{1}{1-(s/\sqrt{2})^2}\right) = \dfrac{s}{2}.\sum_0^\infty \dfrac{s^{2k}}{2^k} = \sum_0^\infty \dfrac{s^{2k+1}}{2^{k+1}}$.

Par cararctérisation : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(X=n) = 0$ (si n est pair ).

Et sinon : $\mathcal{P}(X=n) = \dfrac{1}{2^{\frac{n+1}{2}}}$ , car en ce cas : $n = 2k+1$, $k+1 = \dfrac{n+1}{2}$ .

Rq : $G_X(1) = 1$...

Puis $X(\Omega) = 2\mathbb{N} + 1$ et donc $Y(\Omega) = \mathbb{N} + 1/2$.

$[Y = j + 1/2] = [X = 2j + 1]$ . Donc $\mathcal{P}(Y = j + 1/2) = \dfrac{1}{2^{j+1}}$ .

Exercice 0 f : près du cours...

Dans une salle de cinéma, il arrive X personnes pour voir le film.

On suppose que $X \rightsquigarrow \mathcal{G}(p)$.

La capacité de la salle est de n personnes.

On note Y le nombre de personnes ne pouvant entrre dans la salle, car elle est remplie.

- Loi de Y ?

- Fonction génératrice de Y ?

- E(Y) ?

Sol à taper CD p 1084.

Sol : $q = 1 - p$ , $\mathcal{P}(Y = 0) = \mathcal{P}(X \leqslant n) = 1 - \mathcal{P}(X > n) = 1 - q^n$.

Pour $k \geqslant 1$, $\mathcal{P}(Y = k) = \mathcal{P}(X = n + k) = pq^{n+k-1}$.

$G_Y(t) = (1 - q^n) + \displaystyle\sum_1^\infty pq^{n-1}(tq)^k = (1 - q^n) + \frac{pq^n t}{1 - qt}$.

Le rayon est clairement $\frac{1}{q}$ voir cours loi géométrique...$R > 1$...

$E(Y) = G'_Y(1) = \dfrac{q^n}{p}$.

Exercice 0 g : Dans une famille donnée, on appelle (X,Y,Z) , les variables aléatoires à valeurs entières représentant respectivement le nombre de filles, le nombre de garçons, le nombre d'enfants, de la famille.

On suppose qu'à chaque naissance dans une famille, il est équiprobable d'avoir une fille ou un garçon, de manière indépendante des autres naissances.

(1) Démontrer que, si $G_X$ et $G_Z$ sont les fonctions génératrices de $X$ et $Z$ , alors :

$$G_X(t) = G_Z\left(\frac{t+1}{2}\right)$$

(2) Donner la loi de $X$ dans les cas suivants :

- $Z \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda)$ .

- $(Z+1) \rightsquigarrow \mathcal{G}(p)$.

Sol (1) : Une proba conditionnelle est une proba donc $E_{[Z=n]}(t^X) = \sum_{j=0}^{\infty} t^j \mathcal{P}_{[Z=n]}[X=j]$.

Mais la loi de $X$ sachant $[Z=n]$ est $\mathcal{B}(n,1/2)$ avec $j \leqslant n$ on a un binôme.

$E_{[Z=n]}(t^X) = \sum_{j=0}^{n} t^j \binom{n}{j} \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1+t}{2}\right)^n$.

Mais si on répartit les "masses" suivant un SCE $(A_i)$ :

$$E(M) = \sum_0^{\infty} n\mathcal{P}[M=n] = \sum_0^{\infty} n\left(\sum_i \mathcal{P}(A_i)\mathcal{P}_{A_i}[M=n]\right)$$

$$E(M) = \sum_0^{\infty} \mathcal{P}(A_i)E(M|A_i)$$

Bref : $G_X(t) = E(t^X) =$

$\sum_{n=0}^{\infty} E_{[Z=n]}(t^X)\mathcal{P}([Z=n]) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1+t}{2}\right)^n \mathcal{P}([Z=n]) = G_Z\left(\frac{1+t}{2}\right)$.

(2) Si $Z \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda)$, alors $G_Z(t) = e^{\lambda(t-1)}$, car $G_Z(\frac{t+1}{2}) = e^{\lambda(\frac{t+1}{2}-1)} = e^{\lambda(\frac{t-1}{2})}$.

Alors $G_X(t) = e^{(\lambda/2)(t-1)}$, par caractérisation : $X$ suit une Poisson de paramètre moitié.

Si $(Z+1) \rightsquigarrow \mathcal{G}(p)$, $E(t^Z) = \sum_0^{\infty} t^n pq^n = \frac{p}{1-tq}$. Attention au décalage...

$G_X(t) = G_Z\left(\frac{t+1}{2}\right) = \frac{2p}{2-(t+1)q} = \frac{2p}{1+p-tq}$.

On reconnait une "géométrique($\mathbb{N}$)" de paramètre $\frac{2p}{1+p}$.

On intuite cette géométrique décalée, on évalue en 0,

qui suggère ce paramètre et on fait la réciproque.

Exercice 0 h : Pascal ? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ?, On lance un dé équilibré à six faces numérotées de 1 à 6.

On appelle succès le fait d'obtenir un 6.

(1) On note $T_n$ le nombre de lancers qu'il faut pour obtenir un nième succès. Déterminer la loi de probabilité de $T_n$, sa fonction génératrice, son espérance mathématique, sa variance.

(2) On note $Y_n$ le nombre d'échecs précédant le nième succès. Déterminer la loi de probabilité de $Y_n$, sa fonction génératrice, son espérance mathématique, sa variance.

Sol à TAPER ! ! ! ! exo de ref.

Sol :

On a une succession d'épreuves de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{6}$. La variable $X_n$ compte le $n$-ième succès, par 0 ou 1. La variable $S_n$ compte le nombre de succès lors des $n$ premières tentatives $\left(S_n \cong \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{6}\right)\right)$. On a $T_n(\Omega) = [\![n, +\infty[\![$ Pour $k \in [\![n, +\infty[\![$ , et par indépendance de $S_{k-1}$ et de $X_k$

$$P[T_n = k] = P[S_{k-1} = n-1 \cap X_k = 1] = P[S_{k-1} = n-1]\, P[X_k = 1]$$

donc

$$P[T_n = k] = \left(\begin{array}{c} k-1 \\ n-1 \end{array}\right) p^{n-1} q^{k-n} p = \left(\begin{array}{c} k-1 \\ n-1 \end{array}\right) p^n q^{k-n}$$

Ainsi la fonction génératrice est

$$G_{T_n}(t) = \sum_{k=n}^{+\infty} \left(\begin{array}{c} k-1 \\ n-1 \end{array}\right) p^n q^{k-n} t^k =$$

$$G_{T_n}(t) = \frac{(pt)^n}{(1-qt)^n}$$

Pour le prouver, on dérive $r$ fois la géométrique.

$$\frac{1}{(1-x)^{r+1}} = \sum_{j=r}^{\infty} \binom{j}{r} x^{j-r}.$$

On prend donc $r = n-1$, puis $j = k-1$.

Puisque $q$ est différent de 1 , cette fonction est dérivable en 1 , et par conséquent la variable de Pascal $T_n$ possède une espérance :

$E(T_n) = G'_{T_n}(1) = \frac{n}{p} = 6n.$

On a dérivé une fonction puissance pour faciliter les calculs.

$\mathrm{Var}(T_n) = n\frac{q}{p^2} = 30n.$

2) $Y_n = T_n - 1$, donc $G_Y(t) = (G_{T_n}(t))/t$ cf $0a$, $E(Y_n) = E(T_n) - 1$, $V(Y_n) = V(T_n)$.

(a) On a une succession d'épreuves de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{6}$. La variable $X_n$ compte le $n$-ième succès, par 0 ou 1. La variable $S_n$ compte le nombre de succès lors des $n$ premières tentatives ($S_n \cong \mathcal{B}(n, \frac{1}{6})$).
On a $T_n(\Omega) = [\![n, +\infty[\![$.
Pour $k \in [\![n, +\infty[\![$, et par indépendance de $S_{k-1}$ et de $X_k$

$$P[T_n = k] = P[S_{k-1} = n-1 \cap X_k = 1] = P[S_{k-1} = n-1]P[X_k = 1]$$

donc

$$P[T_n = k] = \binom{k-1}{n-1} p^{n-1} q^{k-n} p = \binom{k-1}{n-1} p^n q^{k-n}.$$

Ainsi la fonction génératrice est

$$\varphi_{T_n}(s) = \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} p^n q^{k-n} s^k = \frac{1}{(n-1)!}(ps)^n \sum_{k=n}^{+\infty} A_{k-1}^{n-1} (qs)^{k-n}$$

$$\varphi_{T_n}(s) = \frac{1}{(n-1)!}(ps)^n \frac{1}{q^{n-1}} \left( \sum_{k=1}^{+\infty} (qs)^{k-1} \right)^{(n-1)}$$

$$\varphi_{T_n}(s) = \frac{1}{(n-1)!}(ps)^n \frac{1}{q^{n-1}} \left( \frac{1}{1-qs} \right)^{(n-1)}$$

$$\varphi_{T_n}(s) = \frac{1}{(n-1)!}(ps)^n \frac{(n-1)!}{(1-qs)^n}$$

$$\varphi_{T_n}(s) = \frac{(ps)^n}{(1-qs)^n}.$$

Puisque $q$ est différent de 1, cette fonction est dérivable en 1, et par conséquent la variable de Pascal $T_n$ possède une espérance

$$\varphi'_{T_n}(s) = \left( \frac{ps}{1-qs} \right)' n \frac{(ps)^{n-1}}{(1-qs)^{n-1}} = n \begin{vmatrix} p & 0 \\ -q & 1 \end{vmatrix} \frac{(ps)^{n-1}}{(1-qs)^{n+1}}$$

$$E(T_n) = \varphi'_{T_n}(1) = \frac{n}{p} = 6n$$

Autre point de vue. Soit $\Delta_1$ le rang du premier succès, $\Delta_2$ le nombre d'essais qui séparent le premier du second succès, etc. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Delta_n = T_n - T_{n-1}$ avec la convention $T_0 = 0$.

Comme (par indépendance) le phénomène est sans mémoire si bien que $\Delta_n \cong \mathcal{G}(p)$, les variables $\Delta$ étant d'ailleurs indépendantes.

On a

$$T_n = \sum_{j=1}^{n} \Delta_j$$

donc

$$\varphi_{T_n}(s) = \prod_{j=1}^{n} \varphi_{\Delta_j}(s) = \left(\frac{ps}{1-qs}\right)^n$$

et

$$E(T_n) = nE(\Delta_n) = \frac{n}{p}$$

par indépendance

$$\mathrm{Var}(T_n) = n\mathrm{Var}(\Delta_n) = n\frac{q}{p^2} = 30n.$$

Exercice 1 Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les réels $a$ et $k$ pour que la suite $(p_n)$ définie, pour $n \geqslant 0$, par $p_n = k\left(\frac{a}{a+1}\right)^n$ soit la loi de probabilité d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Donner alors la fonction génératrice d'une telle variable aléatoire et le rayon.

Sol : On écrit que $p_n \geqslant 0$ pour tout $n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$. Cela équivaut à : $a \geqslant 0$ et $k = \frac{1}{a+1}$.

On trouve ensuite que la fonction génératrice est l'application $t \mapsto \frac{1}{a+1-at}$

(banals calculs sur les séries géométriques).

$R = \frac{a+1}{a} > 1$ , ouf.

Exercice 2. Soit $X$ une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

(1) Calculer $E((X(X-1)\dots(X-r+1)))$.

(2) Retrouver ce résultat par les fonctions génératrices.

Sol :

(1) Par la formule de transfert

$$E(X(X-1)\dots(X-r+1)) = \sum_{k=r}^{+\infty} \frac{k!}{(k-r)!} \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda^r$$

(2) La fonction génératrice de $X$ est

$$G_X(t) = E(t^X) = \mathrm{e}^{\lambda(t-1)}$$

Celle-ci est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$G_X^{(r)}(t) = E(X(X-1)\dots(X-r+1)t) = \lambda^r \mathrm{e}^{\lambda(t-1)}$$

En particulier

$$G_X^{(r)}(1) = E(X(X-1)\dots(X-r+1)) = \lambda^r.$$

Exercice 3. Soit $X$ une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre $p \in ]0,1[$.

(1) Calculer
$$E\big(X(X-1)\dots(X-r+1)\big).$$
(2) Retrouver ce résultat par les fonctions génératrices.

Sol :

(1) Par la formule de transfert

$$E(X(X-1)\dots(X-r+1)) = \sum_{k=r}^{+\infty} k(k-1)\dots(k-r+1)(1-p)^{k-1}p$$

Or

$$\sum_{k=r}^{+\infty} k(k-1)\dots(k-r+1)x^{k-r} = \frac{\mathrm{d}^r}{\mathrm{d}x^r}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{r!}{(1-x)^{r+1}}$$

donc

$$E(X(X-1)\dots(X-r+1)) = (1-p)^{r-1}\frac{r!}{p^r}$$

(2) La fonction génératrice de $X$ est

$$G_X(t) = E(t^X) = \frac{pt}{1-(1-p)t} = \frac{p}{p-1} + \frac{1}{1-(1-p)t}\frac{p}{1-p}$$

Celle-ci est indéfiniment dérivable sur $\left]-\frac{1}{q}, \frac{1}{q}\right[$ et

$$G_X^{(r)}(t) = E(X(X-1)\dots(X-r+1)t^X) = \frac{p}{1-p}\frac{r!(1-p)^r}{(1-(1-p)t)^{r+1}}$$

En particulier

$$G_X^{(r)}(1) = E(X(X-1)\dots(X-r+1)) = r!\frac{(1-p)^{r-1}}{p^r}$$

Exercice 4. On considère une expérience aléatoire ayant la probabilité $p$ de réussir et $1-p$ d'échouer.

On répète l'expérience indépendamment jusqu'à obtention de $m$ succès et on note $X$ le nombre d'essais nécessaires à l'obtention de ces $m$ succès.

(1) Reconnaître la loi de $X$ lorsque $m = 1$.
(2) Déterminer la loi de $X$ dans le cas général $m \in \mathbb{N}^\star$.
(3) Exprimer le développement en série entière de $\dfrac{1}{(1-t)^m}$
(4) Déterminer la fonction génératrice de $X$ et en déduire l'espérance de $X$.

Sol :

(1) $X$ suit la loi géométrique de paramètre $p$.
(2) Notons $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite des variables de Bernoulli testant

la réussite de chaque expérience.
L'événement $(X = n)$ est la réunion des événements $(X_1+\ldots+X_n = m)$ et $(X_n = 1)$

soit encore $(X_1 + \ldots + X_{n-1} = m-1)$ et $(X_n = 1)$.

Par indépendance

$$\mathcal{P}(X = n) = \mathcal{P}(X_1 + \ldots + X_{n-1} = m-1)\mathcal{P}(X_n = 1).$$

Puisque $X_1 + \ldots + X_{n-1} \hookrightarrow \mathcal{B}(n-1, p)$ et $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, on obtient

$$\mathcal{P}(X = n) = \binom{n-1}{m-1} p^m (1-p)^{n-m}.$$

et cette écriture vaut aussi quand $n \leqslant m$ car le coefficient binomial est alors nul.

(3) En exploitant le développement connu de $(1+u)^\alpha$, on obtient

$$\frac{1}{(1-t)^m} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+m-1}{m-1} t^n \text{ pour } t \in ]-1, 1[.$$

(4) Par définition

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n-1}{m-1} p^m (1-p)^{n-m} t^n.$$

d'où après chgt d'indices, rq la somme précédente part de $n = m$...

Bref $n = m + n'$.

$$G_X(t) = \sum_{n'=0}^{+\infty} \binom{n'+m-1}{m-1} (pt)^m ((1-p)t)^{n'} = \frac{(pt)^m}{(1-(1-p)t)^m}.$$

On en déduit

$$E(X) = G'_X(1) = \frac{m}{p}$$

Exercice 5. Deux joueurs lancent deux dés équilibrés. On veut déterminer la probabilité que les sommes des deux jets soient égales. On note $X_1$ et $X_2$ les variables aléatoires déterminant les valeurs des dés lancés par le premier joueur et $Y_1$ et $Y_2$ celles associées au deuxième joueur. On étudie donc l'évènement $(X_1 + X_2 = Y_1 + Y_2)$.

(1) Montrer que
$$\mathcal{P}\left(X_1 + X_2 = Y_1 + Y_2\right) = \mathcal{P}\left(14 + X_1 + X_2 - Y_1 - Y_2 = 14\right)$$
(2) Déterminer la fonction génératrice de la variable aléatoire :
$$Z = 14 + X_1 + X_2 - Y_1 - Y_2$$
(3) En déduire la valeur de
$$\mathcal{P}\left(X_1 + X_2 = Y_1 + Y_2\right).$$

Sol :

(1) Les évènements $(X_1 + X_2 = Y_1 + Y_2)$ et $(14 + X_1 + X_2 - Y_1 - Y_2 = 14)$ sont identiques.

(2) Puisque $X_1$ est uniformément distribuée sur $[\![1, 6]\!]$
$$G_{X_1}(t) = \frac{1}{6}(t + t^2 + \cdots + t^6) = \frac{t}{6}\frac{1-t^6}{1-t} = G_{X_2}(t)$$
De même, $7 - Y_i$ est uniformément distribuée sur $[\![1, 6]\!]$ et par somme de variables aléatoires indépendantes $Z = (X_1) + (X_2) + (7 - Y_1) + (7 - Y_2)$
$$G_Z(t) = \left(\frac{t}{6}\frac{1-t^6}{1-t}\right)^4$$

(3) Il ne reste plus qu'à déterminer le coefficient de $t^{14}$ dans le développement en série entière de $G_Z(t)$ . Pour cela, on écrit
$$G_Z(t) = \frac{t^4}{6^4}\frac{(1-t^6)^4}{(1-t)^4} = \frac{t^4}{6^4}(1 - 4t^6 + 6t^{12} - \cdots) \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+3}{3} t^n$$
Le coefficient de $t^{14}$ est
$$\mathcal{P}(X_1 + X_2 = Y_1 + Y_2) = \frac{1}{6^4}\left(\binom{13}{3} - 4\binom{7}{3}\right) = \frac{146}{6^4} \simeq 0,11$$
Un calcul direct est aussi possible en évaluant

$$\mathcal{P}(X_1+X_2=i)=\frac{\min(i-1,13-i)}{6^2} \text{ pour } i\in[\![1,12]\!] \text{ auquel cas}$$

$$\mathcal{P}(X_1+X_2=Y_1+Y_2)=\frac{1}{6^4}\sum_{i=2}^{12}\min(i-1,13-i)^2.$$

Exercice 6. On veut montrer qu'il n'est pas possible de truquer un dé de façon que, en le lançant deux fois de suite, la somme des numéros obtenus suive la loi uniforme sur $[\![2,12]\!]$.

Pour cela on raisonne par l'absurde, et on note $p_i$ pour $1\leqslant i\leqslant 6$ la probabilité que le lancer de dé donne le numéro $i$. On note aussi $X_1$ (resp. $X_2$) la variable aléatoire donnant le résultat du 1er lancer (resp du 2ème).

En considérant les fonctions génératrices de $X_1$, $X_2$ et $X_1+X_2$, aboutir à une contradiction.

Sol : Les fonctions génératrices de $X_1$ et $X_2$ sont toutes deux égales à $f:x\mapsto\sum_{i=1}^{6}p_ix^i$.

Celle de $X_1+X_2$ est $g:x\mapsto\frac{1}{11}(x^2+\cdots+x^{12})=\frac{x^2}{11}\frac{1-x^{11}}{1-x}$.

On ne peut pas avoir $g=f^2$ car les racines de $g$ dans $\mathbb{C}$, excepté 0, sont toutes

simples alors que celles de $f^2$ sont au moins doubles.

$g=f^2$ découle de l'indépendance.

Exercice 7. On considère une expérience aléatoire ayant la probabilité $p$ de réussir et $q=1-p$ d'échouer définissant une suite de variables de Bernoulli indépendantes $(X_n)_{n\geqslant 1}$.

Pour $m\in\mathbb{N}^\star$, on note $S_m$ la variable aléatoire déterminant le nombre d'essais jusqu'à l'obtention de $m$ succès :

$$S_m=k\Leftrightarrow X_1+\cdots+X_k=m \text{ et } X_1+\cdots+X_{k-1}<m$$

(1) Déterminer la loi et la fonction génératrice de $S_1$.

(2) Même question avec $S_m-S_{m-1}$ pour $m\geqslant 2$.

(3) Déterminer la fonction génératrice de $S_m$ puis la loi de $S_m$.

Sol : Pascal ? ? ?

(1) $S_1$ suit une loi géométrique de paramètre $p$ et $G_{S_1}(t) = \dfrac{pt}{1-qt}$.

(2) $S_m - S_{m-1}$ suit aussi une loi géométrique de paramètre $p$.

(3) Or ces variables aléatoires sont indépendantes car la probabilité d'un évènement de la forme

$$(S_1 - S_0 = n_1, S_2 - S_1 = n_2, \ldots, S_m - S_{m-1} = n_m)$$

est celle de l'événement

$$X_{n_1} = X_{n_1+n_2} = \ldots = X_{n_1+\ldots n_m} = 1$$

et ces variables sont indépendantes.

Donc puisque $S_m = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} S_k - S_{k-1}$ $(S_0 = 0)$ on a

$$G_{S_m}(t) = \left(\frac{pt}{1-qt}\right)$$

d'où avec le DSE de $\dfrac{1}{(1-X)^m}$

$$G_{S_m}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{m+n-1}{m-1} q^n p^m t^{n+m}$$

et

$$\mathcal{P}(S_m = n) = \binom{n-1}{m-1} q^{n-m} p^m.$$

Exercice 8. Soit $X_1, X_2, \ldots$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes une même loi de Bernoulli de paramètre $p \in ]0,1[$. Soit aussi $N$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendantes des précédentes.
On pose :

$$X = \sum_{k=1}^{N} X_k \text{ et } Y = \sum_{k=1}^{N} (1 - X_k)$$

(1) Pour $t, u \in [-1,1]$, exprimer à l'aide de la fonction génératrice de $N$

$$G(t,u) = E\left(t^X u^Y\right)$$

(2) On suppose que $N$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

Montrer que les variables $X$ et $Y$ sont indépendantes.

(3) Inversement, on suppose que les variables $X$ et $Y$ sont indépendantes.

Montrer que $N$ suit une loi de Poisson.

Sol :

(1) Par définition : $E(t^X u^Y) = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{l=0}^{+\infty} t^k u^l \mathcal{P}(X=k,\ Y=\ell)$.

En regroupant par paquets selon la valeur de $X+Y$

$$E(t^X u^Y) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} t^k u^{n-k} \mathcal{P}(X=k,\ Y=n-k).$$

Or $(X=k,\ Y=n-k) = (X_1+\cdots+X_n=k)\cap(N=n)$.

donc $E(t^X u^Y) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} t^k u^{n-k} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) p^k q^{n-k} \mathcal{P}(N=n)$.

en notant $q=1-p$. On obtient ainsi

$$E(t^X u^Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{P}(N=n)(pt+qu)^n = G_N(pt+qu).$$

(2) Si $N$ suit la loi de Poisson alors $G_N(t) = \mathrm{e}^{\lambda(t-1)}$ puis

$G(t,\ u) = \mathrm{e}^{\lambda p(t-1)} \times \mathrm{e}^{\lambda q(u-1)}$.

En particulier $G_X(t) = G(t,\ 1) = \mathrm{e}^{\lambda p(t-1)}$ et $G_Y(t) = G(1,\ u) = \mathrm{e}^{\lambda q(u-1)}$.

La variable $X$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda p$ tandis que $Y$

suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda q$.

De plus $G(t,\ u) = \mathrm{e}^{\lambda p(t-1)} \times \mathrm{e}^{\lambda q(u-1)} = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{l=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^k}{k!}\mathrm{e}^{-\mu q}\frac{(\lambda q)^l}{\ell!} t^k u^l$

En identifiant les coefficients (ce qui est possible en considérant une série entière en $u$ dont les coefficients sont des séries entières en $t$, bref tu fixes une variable, tu identifies, puis l'autre), on obtient

$$\mathcal{P}(X=k,\ Y=\ell) = \mathrm{e}^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda q}\frac{(\lambda q)^k}{k!} = \mathcal{P}(X=k)\mathcal{P}(Y=\ell)$$

Les variables $X$ et $Y$ sont bien indépendantes.

(3) Si les variables $X$ et $Y$ sont indépendantes alors $t^X$ et $u^Y$ aussi donc

$$G(t,\ u) = E(t^X)E(u^Y) = G(t,\ 1)G(1,\ u)$$

puis $G_N(pt+qu) = G_N(pt+q)G_N(p+qu)$.

Posons $f(t) = G_N(t+1)$ définie et continue sur $[-2, 0]$ avec $f(0) = G_N(1) = 1$. On a

$f(pt + qu) = G_N(p(t+1) + q(u+1)) = G_N(pt+1)G_N(1+qu) = f(pt)f(qu)$

ce qui donne $f(x+y) = f(x)f(y)$.

pour $x \in [-2p, 0]$ et $y \in [-2q, 0]$. Pour $y \in [-2, 0[$

$$\frac{f(x+y) - f(x)}{y} = f(x)\frac{f(y) - f(0)}{y}$$

On choisit $x \in [-2p, 0[$ tel que $f(x) \neq 0$ ( possible par continuité car $f(0) = 1$).

Le premier membre admet une limite finie quand $y \to 0$ car $f$ est dérivable sur$]-2, 0[$.

On en déduit que le second membre admet la même limite et donc $f$ est dérivable

en 0 avec la relation $f'(x) = f'(0)f(x)$.

Posons $\lambda = f'(0)$ et sachant $f(0) = 1$, on obtient $f(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$ sur $[-2p,\ 0]$.

puis $G_N(t) = \mathrm{e}^{\lambda(t-1)}$ sur $[1-2p, 1]$.

Si $p \geqslant 1/2$, ceci détermine $G_N$ au voisinage de 0 et l'on reconnaît la fonction

génératrice d'une loi de Poisson de paramètre $\lambda$.

Sinon, $q \geqslant 1/2$ et il suffit de raisonner en la variable $y$ plutôt que $x$.

Exercice 9. Soit $N$ et $X_1, X_2, \ldots$ des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que les variables $X_1, X_2, \ldots$ suivent toutes une même loi de fonction génératrice $G_X$ et on pose :

$$\forall \omega \in \Omega,\ S(\omega) = \sum_{k=1}^{N(\omega)} X_k(\omega).$$

(1) Établir $G_S(t) = G_N\left(G_X(t)\right)$ pour $|t| \leqslant 1$.

(2) On suppose que les variables admettent une espérance. Établir l'identité de Wald :

$$E(S) = E(N)E(X_1)$$

Sol :

(1) Par la formule des probabilités totales

$$\mathcal{P}(S=n)=\sum_{k=0}^{+\infty}\mathcal{P}(N=k)\mathcal{P}(X_1+\dots X_k=n)$$

donc

$$G_S(t)=\sum_n\sum_k\mathcal{P}(N=k)\mathcal{P}(X_1+\dots X_k=n)t^n$$

Il s'agit d'une famille sommable donc on peut permuter :

$$G_S(t)=\sum_k\mathcal{P}(N=k)\sum_n\mathcal{P}(X_1+\dots X_k=n)t^n=\sum_k\mathcal{P}(N=k)G_{X_1+\dots+X_k}(t)$$

Par indépendance des variables $G_{X_1+\dots+X_k}(t)=G_X(t)^k$, ce qui donne le résultat.

(2) Si $N$ et $X$ admettent une espérance alors $G_N$ et $G_X$ sont dérivables en 1 donc $G_S$ aussi et

$$G'_S(1)=G'_X(1)G'_N(G_X(1))=G'_X(1)G'_N(1).$$

Exercice 10. Soit $(X_n)_{\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires telle que, pour tout $n\in\mathbb{N}$ $X_n$ suit une $\mathcal{B}(n,p)$. Soit $k\in\mathbb{N}$. Établir :

$$\mathcal{P}(X_n\leqslant k)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0.$$

Sol ddl p391.

Sol : $X_n$ est d'espérance $np$ et de variance $np(1-p)$. $\forall\alpha>0$, $B-T$ donne :

$$\mathcal{P}(|X_n-np|\geqslant\alpha)\leqslant\frac{np(1-p)}{\alpha^2}$$

On choisit $\alpha>0$ de manière à réaliser $(X_n\leqslant k)\subset(|X_n-np|\geqslant\alpha)$.

$\alpha=np-k$ convient et alors :

$$\mathcal{P}(X_n\leqslant k)\leqslant\mathcal{P}(|X_n-np|\geqslant\alpha)\leqslant\frac{np(1-p)}{(np-k^2)^2}\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{1-p}{np}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$$

Exercice 11. Soient $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. On pose $S_n = X - 1 + ... + X_n$.

(a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer $ch(\lambda) \leqslant e^{\frac{\lambda^2}{2}}$.

(b) Établir que pour tout $\alpha > 0$,

$$\mathcal{P}\left(\frac{S_n}{n} > \alpha\right) \leqslant e^{\frac{-n\alpha^2}{2}}.$$

Sol ddl p391.

Sol : (a) On développe les 2 en séries et on remarque que $2^p p! \leqslant (2p)!$.

(b) On applique Markov, à une va bien choisie.

On prend, $\alpha > 0$ et $\lambda > 0$. Les événements $\left(\frac{S_n}{n} > \alpha\right) = (S_n > n\alpha) = (e^{\lambda S_n} > e^{\lambda n\alpha})$.

On pose $Y = e^{\lambda S_n}$ , il vient :

$\mathcal{P}\left(\frac{S_n}{n} > \alpha\right) = \mathcal{P}(e^{\lambda S_n} > e^{\lambda n\alpha}) \leqslant e^{-\lambda n\alpha} E(e^{\lambda S_n})$.

Par indépendance ( transfert ),$E(e^{\lambda S_n}) = E(e^{\lambda X_1} \times ... \times e^{\lambda X_n}) = \prod_1^n E(e^{\lambda X_i}) = (ch(\lambda))^n$.

On reporte : $\mathcal{P}\left(\frac{S_n}{n} > \alpha\right) \leqslant e^{-\lambda n\alpha}(ch(\lambda))^n \leqslant e^{-\lambda n\alpha} e^{n\lambda^2/2}$ .

Et maintenant on choisit $\lambda$ , on prend $\lambda = \alpha$ !!

Il vient : $\mathcal{P}\left(\frac{S_n}{n} > \alpha\right) \leqslant e^{\frac{-n\alpha^2}{2}}$.

26,27,28,ddl p 388

p388 pascal, vr p335 , 621 .

Exo 28 ddl

Soit $X$ une variable aléatoire à valeurs dans un ensemble fini $\mathcal{X}$. Pour chaque valeur $x \in \mathcal{X}$, on pose

$$p(x) = P(X = x)$$

On appelle entropie de la variable $X$ le réel

$$H(X) = -\sum_{x \in \mathcal{X}} p(x) \log(p(x))$$

où l'on convient $0 \log 0 = 0$. a) Vérifier que $H(X)$ est un réel positif. A quelle condition celui-ci est-il nul ? Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires à valeurs dans des ensembles finis $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$. b) On appelle entropie conjointe de $X$ et $Y$, l'entropie de la variable $Z = (X, Y)$ simplement notée $H(X, Y)$ On suppose les variables $X$ et $Y$ indépendantes, vérifier

$$H(X, Y) = H(X) + H(Y)$$

c) On appelle entropie de $X$ sachant $Y$ la quantité

$$H(X \mid Y) = H(X, Y) - H(Y)$$

Vérifier

$$H(X \mid Y) = \sum_{y \in \mathcal{Y}} P(Y = y) H(X \mid Y = y)$$

avec

$$H(X \mid Y = y) = -\sum_{x \in \mathcal{X}} P(X = x \mid Y = y) \log(P(X = x \mid Y = y))$$

SOL :

a) Pour tout $x \in \mathcal{X}$, on a $-p(x) \log(p(x)) \geqslant 0$ car $p(x) \leqslant 1$. On en déduit $H(X) \in \mathbb{R}^+$. Si $H(X) = 0$ alors, par somme nulle de positifs, on a

$$\forall x \in \mathcal{X}, p(x) \log(p(x)) = 0$$

et donc

$$\forall x \in \mathcal{X}, p(x) = 0 \text{ ou } p(x) = 1$$

Sachant que

$$\sum_{x \in \mathcal{X}} p(x) = P(X \in \mathcal{X}) = 1$$

on peut affirmer qu'il existe $x \in \mathcal{X}$ tel que $p(x) = P(X = x) = 1$ La variable $X$ est alors presque sûrement constante. b) Par définition

$$H(X, Y) = -\sum_{(x,y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}} P(X = x, Y = y) \log(P(X = x, Y = y))$$

Or les variables $X$ et $Y$ étant indépendantes

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x) P(Y = y)$$

puis

$$H(X,Y) = -\sum_{(x,y)\in\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} P(X=x)P(Y=y)[\log(P(X=x)) + \log(P(Y=y)]$$

On sépare la somme en deux et l'on somme tantôt d'abord en $x$, tantôt d'abord en $y$ et l'on obtient

$$H(X,Y) = H(X) + H(Y)$$

car

$$\sum_{x\in\mathcal{X}} P(X=x) = \sum_{y\in\mathcal{Y}} P(Y=y) = 1$$

b) On sait

$$P(X=x \mid Y=y) = P(X=x, Y=y)P(Y=y)$$

donc

$$P(Y=y)H(X \mid Y=y) = -\sum_{x\in\mathcal{X}} P(X=x,Y=y)[\log(P(X=x,Y=y)) - \log(P(Y=y))]$$

On sépare la somme en deux et l'on somme le résultat sur $y \in \mathcal{Y}$ pour obtenir

$$\sum_{y\in\mathcal{Y}} P(Y=y)H(X \mid Y=y) = H(X,Y) + \sum_{(x,y)\in\mathcal{X}\times Y} P(X=x,Y=y)\log(P(Y=y))$$

Or

$$\sum_{(x,y)\in\mathcal{X}\times Y} P(X=x,Y=y)\log(P(Y=y)) = \sum_{y\in\mathcal{Y}}\sum_{x\in\mathcal{X}} P(X=x,Y=y)\log(P(Y=y))$$

avec

$$\sum_{x\in\mathcal{X}} P(X=x,Y=y) = P(Y=y)$$

donc

$$\sum_{y\in\mathcal{Y}} P(Y=y)H(X \mid Y=y) = H(X,Y) - H(Y)$$

Exo 27 ddl

Soit $X_1, X_2, \ldots$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes une loi binomiale de paramètre $p \in ]0,1[$. Soit aussi $N$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendantes des précédentes. On pose

$$X = \sum_{k=1}^{N} X_k \text{ et } Y = \sum_{k=1}^{N} (1 - X_k)$$

a) Pour $t, u \in [-1,1]$, exprimer à l'aide de la fonction génératrice de $N$

$$G(t,u) = E\left(t^X u^Y\right)$$

b) On suppose que $N$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Montrer que les variables $X$ et $Y$ sont indépendantes. c) Inversement, on suppose que les variables $X$ et $Y$ sont indépendantes. Montrer que $N$ suit une loi de Poisson.

Sol :

a) Par définition

$$E\left(t^X u^Y\right) = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{\ell=0}^{+\infty} t^k u^\ell P(X=k, Y=\ell)$$

En regroupant par paquets selon la valeur de $X+Y$

$$E\left(t^X u^Y\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} t^k u^{n-k} P(X=k, Y=n-k)$$

Or

$$(X=k, Y=n-k) = (X_1+\cdots+X_n=k)\cap(N=n)$$

donc

$$E\left(t^X u^Y\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} t^k u^{n-k} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) p^k q^{n-k} P(N=n)$$

en notant $q=1-p$. On obtient ainsi

$$E\left(t^X u^Y\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(N=n)(pt+qu)^n = G_N(pt+qu)$$

b) Si $N$ suit une loi de Poisson alors $G_N(t) = \mathrm{e}^{\lambda(t-1)}$ puis

$$G(t,u) = \mathrm{e}^{\lambda p(t-1)} \times \mathrm{e}^{\lambda q(u-1)}$$

En particulier

$$G_X(t) = G(t,1) = \mathrm{e}^{\lambda p(t-1)} \text{ et } G_Y(t) = G(1,u) = \mathrm{e}^{\lambda q(u-1)}$$

La variable $X$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda p$ tandis que $Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda q$. De plus

$$G(t,u) = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{\ell=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^k}{k!}\mathrm{e}^{-\mu q}\frac{(\lambda q)^\ell}{\ell!} t^k u^\ell$$

En identifiant les coefficients (ce qui est possible en considérant une série entière en $u$ dont les coefficients sont des séries entières en $t$ ), on obtient

$$P(X=k, Y=\ell) = \mathrm{e}^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda q}\frac{(\lambda q)^k}{k!} = P(X=k)P(Y=\ell)$$

Les variables $X$ et $Y$ apparaissent bien indépendantes.

c) Si les variables $X$ et $Y$ sont indépendantes alors $t^X$ et $u^Y$ aussi donc

$$G(t,u) = E\left(t^X\right) E\left(u^Y\right) = G(t,1)G(1,u)$$

puis

$$G_N(pt+qu) = G_N(pt+q)G_N(p+qu)$$

Posons $f(t) = G_N(t+1)$ définie et continue sur $[-2,0]$ avec $f(0) = G_N(1) = 1$. On a

$$f(pt+qu) = G_N(p(t+1)+q(u+1)) = G_N(pt+1)G_N(1+qu) = f(pt)f(qu)$$

ce qui fournit la propriété de morphisme

$$f(x+y) = f(x)f(y)$$

pour $x \in [-2p, 0]$ et $y \in [-2q, 0]$. Pour $y \in [-2p, 0[$

$$\frac{f(x+y) - f(x)}{y} = f(x)\frac{f(y) - f(0)}{y}$$

On choisit $x \in [-2p, 0[$ tel que $f(x) \neq 0$ (ce qui est possible par continuité car $f(0) = 1$ ). Le premier membre admet une limite finie quand $y \to 0$ car $f$ est assurément dérivable sur $]-2, 0[$. On en déduit que le second membre admet la même limite et donc $f$ est dérivable en 0 avec la relation

$$f'(x) = f'(0)f(x)$$

Posons $\lambda = f'(0)$ et sachant $f(0) = 1$, on obtient

$$f(x) = \mathrm{e}^{\lambda x} \text{ sur } [-2p, 0]$$

puis

$$G_N(t) = \mathrm{e}^{\lambda(t-1)} \text{ sur } [1 - 2p, 1]$$

Si $p \geqslant 1/2$, ceci détermine $G_N$ au voisinage de 0 et l'on reconnait la fonction génératrice d'une loi de Poisson de paramètre $\lambda$. Sinon, $q \geqslant 1/2$ et il suffit de raisonner en la variable $y$ plutôt que $x$.