

Corrigé XSR PSI 2022

Etude et mesure des séismes

Corrigé proposé par Nicolas Choimet, PSI*, Eiffel Bordeaux

nicolas.choimet@live.fr

I Ondes mécaniques dans les solides

1. Puisque $\frac{\Delta L}{L}$ est sans dimension et que $\sigma = \frac{F}{S}$ est homogène à une pression, E s'exprime en Pa.
2. Pour un milieu idéal, c'est-à-dire infiniment rigide, $\frac{\Delta L}{L} = 0$ quelle que soit la contrainte σ . On en déduit que $E \rightarrow +\infty$.
3. La longueur de la tranche en présence de la perturbation vaut :

$$x + dx + u(x + dx, t) - (x + u(x, t)) \approx \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx$$

L'allongement relatif de la tranche vaut donc :

$$\varepsilon(x, t) = \frac{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx - dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

4. La loi de Hooke s'écrit donc :

$$\frac{F(x, t)}{S} = E \frac{\partial u}{\partial x}$$

Par conséquent :

$$\frac{1}{S} \frac{\partial F}{\partial x} = E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

5. Le PFD appliqué à la tranche donne :

$$\rho S dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F(x + dx, t) - F(x, t) \approx \frac{\partial F}{\partial x} dx$$

On en déduit :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c_p^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

avec :

$$c_p = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Il s'agit de l'équation de d'Alembert.

6. Numériquement, on trouve :

$$c_p = \sqrt{\frac{7 \times 10^{10}}{25 \times 100}} \approx 0,53 \times 10^4 = 5,3 \times 10^3 \text{ m.s}^{-1}$$

7. Une onde mécanique est dite longitudinale si la grandeur ondulatoire traduit un déplacement parallèle à la direction de propagation. Elle est dite transversale si la grandeur ondulatoire correspond à un déplacement perpendiculaire à la direction de propagation.

Le champ de déplacement $u(x, t)$ est parallèle à la direction de propagation et correspond donc à une onde longitudinale.

8. L'équation de propagation $\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ multipliée par $\frac{\partial u}{\partial t}$ donne :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \right) = E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial t} = E \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right) \right)$$

On en déduit :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} E \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(E \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} \right)$$

On reconnaît la densité volumique d'énergie cinétique $\epsilon_c = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2$ et la densité volumique d'énergie potentielle élastique $\epsilon_p = \frac{1}{2} E \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2$. On peut donc mettre l'équation précédente sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_c + \epsilon_p) + \text{div} \vec{\pi} = 0$$

en posant :

$$\vec{\pi} = -E \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} \vec{e}_x = -E \frac{\partial u}{\partial t} \overrightarrow{\text{grad} u}$$

L'équation obtenue traduit donc la conservation de l'énergie mécanique dans le solide. Le vecteur de Poynting $\vec{\pi} = -E \frac{\partial u}{\partial t} \overrightarrow{\text{grad} u}$ est le vecteur densité de courant d'énergie mécanique.

II Mécanisme de génération d'un séisme

9.

- Forces longitudinales :

$$\left(\tau_c(x, t) - \tau_f(x, t) \right) H dx \vec{e}_x + EHh dx \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \vec{e}_x$$

- Forces transversales :

$$(\sigma_R - \sigma_N) H dx \vec{e}_z - \rho g H h dx \vec{e}_z$$

10. Le PFD donne, en projection sur $\vec{e}_x$:

$$\rho H h dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = EHh dx \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\tau_c(x, t) - \tau_f(x, t) \right) H dx$$

soit :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c_p^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = - \frac{1}{Eh} \left(\tau_c(x, t) - \tau_f(x, t) \right)$$

11. En procédant comme à la question 8, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_c + \epsilon_p) + \text{div} \vec{\pi} = \left(\frac{\tau_c - \tau_f}{h} \right) \frac{\partial u}{\partial t}$$

Le terme $\left(\frac{\tau_c - \tau_f}{h} \right) \frac{\partial u}{\partial t}$ correspond à un terme « source » : il s'agit de la puissance fournie à l'unité de volume de matériau soumis au cisaillement. Plus précisément, $\frac{\tau_c}{h} \frac{\partial u}{\partial t}$ correspond bien à un apport de puissance volumique, pouvant provoquer un échauffement, tandis que $-\frac{\tau_f}{h} \frac{\partial u}{\partial t}$ correspond à une perte de puissance volumique, pouvant provoquer un refroidissement.

12. On pose $\tilde{u} = \frac{u}{u_0}$, $\tilde{x} = \frac{x}{\ell}$, $\tilde{t} = \frac{t}{T}$, $\tilde{\tau}_c = \frac{\tau_c}{\tau_0}$ et $\tilde{\tau}_f = \frac{\tau_f}{\tau_0}$. On en déduit :

$$\frac{u_0}{\ell^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} - \frac{u_0}{T^2 c_p^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{t}^2} = - \frac{\tau_0}{Eh} \left(\tilde{\tau}_c(x, t) - \tilde{\tau}_f(x, t) \right)$$

soit :

$$\frac{\ell^2}{T^2 c_p^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{t}^2} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\tau_0 \ell^2}{u_0 Eh} \left(\tilde{\tau}_c(x, t) - \tilde{\tau}_f(x, t) \right)$$

On a construit les grandeurs adimensionnées de telle manière que $\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{t}^2} \approx \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2}$. Par conséquent, si $\ell \ll c_p T$, l'équation précédente se simplifie en :

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\tau_0 \ell^2}{u_0 Eh} \left(\tilde{\tau}_c(x, t) - \tilde{\tau}_f(x, t) \right) = 0$$

13. Le rapport sans dimension attendu est :

$$\frac{\tau_0 \ell^2}{u_0 E h} = \frac{\tau_0 \ell H}{E \frac{u_0}{\ell} h H}$$

C'est le rapport de la force de cisaillement $\tau_0 \ell H$ à la force élastique $E \frac{u_0}{\ell} h H$ traduisant la déformation du milieu.

- 14.** En présence de glissement, la loi de Coulomb s'écrit simplement :

$$\tau_f(x, t) = f \sigma_N = \tau_r$$

- 15.** Dans une zone de non glissement,

$$u(x, t) = 0$$

On en déduit :

$$\tau_f(x, t) = \tau_c(x, t)$$

- 16.** Dans la zone de glissement,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\tau_r - \tau_c}{E h}$$

donc :

$$u(|x| \leq \ell_g) = \frac{\tau_r - \tau_c}{2 E h} x^2 + A x + B$$

Les conditions aux limites $u(\pm \ell_g) = 0$ donnent les constantes d'intégration :

$$u(|x| \leq \ell_g) = \frac{\tau_r - \tau_c}{2 E h} (x^2 - \ell_g^2)$$

En dehors de la zone de glissement, on a :

$$u(|x| \geq \ell_g) = 0$$

- 17.** La densité volumique d'énergie potentielle élastique $\epsilon_p = \frac{1}{2} E \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2$ vaut :

$$\begin{cases} \epsilon_p(|x| \leq \ell_g) = \frac{(\tau_c - \tau_r)^2}{2 E h^2} x^2 \\ \epsilon_p(|x| \geq \ell_g) = 0 \end{cases}$$

Par conséquent :

$$E_e = H h \frac{(\tau_r - \tau_c)^2}{2 E h^2} \int_{-\ell_g}^{\ell_g} x^2 dx = \frac{H \ell_g^3}{3 E h} (\tau_c - \tau_r)^2$$

Si on n'avait pas glissement, E_e serait nulle. Par conséquent, la présence de la zone de glissement entraîne un gain d'énergie pour la couche solide.

- 18.** Le travail des forces de cisaillement vaut, quant à lui :

$$W_{\text{cis}} = \tau_c H \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} u(x) dx - H \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \tau_f(x) u(x) dx = H \int_{-\ell_g}^{\ell_g} (\tau_c - \tau_r) \frac{\tau_r - \tau_c}{2Eh} (x^2 - \ell_g^2) dx$$

On en déduit :

$$W_{\text{cis}} = -\frac{H}{2Eh} (\tau_r - \tau_c)^2 \left(\frac{2\ell_g^3}{3} - 2\ell_g^3 \right) = \frac{2H\ell_g^3}{3Eh} (\tau_c - \tau_r)^2$$

On constate donc que :

$$W_{\text{cis}} = 2E_e$$

19. Le taux d'accroissement du travail des forces de cisaillement est donné par :

$$\frac{dW_{\text{cis}}}{2d\ell_g} = \frac{H\ell_g^2}{Eh} (\tau_c - \tau_r)^2$$

Le taux d'accroissement de l'énergie élastique vaut, quant à lui :

$$\frac{dE_e}{2d\ell_g} = \frac{H\ell_g^2}{2Eh} (\tau_c - \tau_r)^2$$

On note, comme ci-dessus que :

$$\frac{dW_{\text{cis}}}{2d\ell_g} = 2 \frac{dE_e}{2d\ell_g}$$

La moitié du travail des forces de cisaillement ne se retrouve pas dans le gain d'énergie élastique : il y a donc un surplus d'énergie gagnée.

20. Le taux de restitution d'énergie surfacique vaut donc :

$$G(2\ell_g) = \frac{\ell_g^2}{2Eh} (\tau_c - \tau_r)^2$$

Récupération du surplus d'énergie ?

21. La zone glissante ne peut progresser que si le gain énergétique est supérieur au coût énergétique nécessaire à la création de la surface glissante. Il faut donc que :

$$G(2\ell_g) > G_c$$

22. La condition précédente impose

$$\ell_g > \frac{\sqrt{2EhG_c}}{\tau_c - \tau_r}$$

La taille critique minimale de la zone glissante vaut donc :

$$L_c = \frac{\sqrt{2EhG_c}}{\tau_c - \tau_r}$$

Si l'on fixe maintenant la taille de la zone glissante, l'interface sera déstabilisée si

$$\tau_c - \tau_r > \frac{\sqrt{2EhG_c}}{\ell_g}$$

La contrainte seuil vaut donc :

$$\tau_c^{\text{lim}} = \tau_r + \frac{\sqrt{2EhG_c}}{\ell_g}$$

23. Le taux de variation de $G(2\ell_g)$ vaut :

$$\frac{dG}{d(2\ell_g)} = \frac{\ell_g}{Eh} (\tau_c - \tau_r)^2 > 0$$

G est donc une fonction croissante de la taille de la zone glissante. On en déduit que la zone glissante est instable. Si $G(2\ell_g) > G_c$, la taille de la zone glissante fracturée augmente.

On peut supposer que l'énergie cinétique volumique augmente (bien que l'on soit dans le cadre d'un régime quasi-statique...).

III Propagation d'ondes sismiques

24. Par définition, le plan d'incidence est le plan passant par I et dirigé par le vecteur d'onde incident $\vec{k}_i$ et le vecteur normal à l'interface $\vec{e}_z$.

La première loi de Descartes stipule que les rayons réfléchi et transmis sont contenus dans le plan d'incidence.

La conservation de la composante tangentielle du vecteur d'onde s'écrit :

$$k_x = \frac{\omega}{c_{p1}} \sin i_1 = \frac{\omega}{c_{p1}} \sin r = \frac{\omega}{c_{p2}} \sin i_2$$

On en déduit la seconde loi de Descartes :

$$\begin{cases} r = i_1 \\ \frac{\sin i_2}{c_{p2}} = \frac{\sin i_1}{c_{p1}} \end{cases}$$

25. Dans l'hypothèse où $c_{p1} < c_{p2}$, $\sin i_2 > \sin i_1$. L'angle d'incidence limite i_ℓ correspond à $i_2 = \frac{\pi}{2}$. Par conséquent :

$$i_\ell = \text{asin}\left(\frac{c_{p1}}{c_{p2}}\right)$$

26. La continuité de la composante tangentielle du vecteur d'onde impose toujours :

$$k_{rx} = \frac{\omega}{c_{p1}} \sin i_1$$

La relation de dispersion de l'onde réfléchie s'écrit donc :

$$\left(\frac{\omega}{c_{p1}} \sin i_1\right)^2 + k_{rz}^2 = \left(\frac{\omega}{c_{p1}}\right)^2$$

Par conséquent, compte tenu du sens de propagation de l'onde réfléchie, on en déduit :

$$k_{rz} = -\frac{\omega}{c_{p1}} \sqrt{1 - \sin^2 i_1} = -\frac{\omega}{c_{p1}} \cos i_1$$

Le vecteur d'onde réfléchi s'écrit donc :

$$\vec{k}_r = \frac{\omega}{c_{p1}} (\sin i_1 \vec{e}_x - \cos i_1 \vec{e}_z)$$

- Pour l'onde transmise, on a toujours, par conservation de la composante tangentielle du vecteur d'onde :

$$k_{tx} = \frac{\omega}{c_{p1}} \sin i_1$$

La relation de dispersion de l'onde transmise s'écrit donc :

$$\left(\frac{\omega}{c_{p1}} \sin i_1\right)^2 + k_{tz}^2 = \left(\frac{\omega}{c_{p2}}\right)^2$$

Par conséquent,

$$k_{tz}^2 = \left(\frac{\omega}{c_{p1}}\right)^2 (\sin^2 i_\ell - \sin^2 i_1) < 0$$

On en déduit :

$$k_{tz} = \pm j \frac{\omega}{c_{p1}} \sqrt{\sin^2 i_1 - \sin^2 i_\ell}$$

Or, l'onde transmise, supposée polarisée selon $\vec{e}_x$, est de la forme :

$$\underline{\vec{u}}_t(x, z, t) = U_{t0} \exp j(\omega t - k_{tx}x - k_{tz}z) \vec{e}_x$$

Elle se « propage » vers les z croissants : il faut donc choisir

$$k_{tz} = -j \frac{\omega}{c_{p1}} \sqrt{\sin^2 i_1 - \sin^2 i_\ell}$$

pour éviter la divergence de l'onde transmise. On a bien $k_{tz} = -\frac{j}{\delta}$ avec :

$$\delta = \frac{c_{p1}}{\omega \sqrt{\sin^2 i_1 - \sin^2 i_\ell}}$$

L'onde transmise est bien de la forme :

$$\underline{\vec{u}}_t(x, z, t) = U_{t0} \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \exp j(\omega t - k_{tx}x) \vec{e}_x$$

Il s'agit d'une onde harmonique, progressive vers les x croissants, amortie perpendiculairement à sa direction de propagation (en quelque sorte, elle se propage le long de l'interface). Sa vitesse de phase est donnée par :

$$v_\phi = \frac{\omega}{k_{tx}} = \frac{c_{p1}}{\sin i_1}$$

27. La source fictive de l'onde réfléchie se déplace le long de l'interface à la vitesse $\frac{c_{p1}}{\sin i_\ell} = c_{p2}$. Cette source atteint le sommet du cône de Mach à l'instant $t > 0$ et à cet instant, elle a donc parcouru la distance $c_{p2}t$. Dans le même temps, l'onde réfléchie au point I a parcouru la distance $c_{p1}t$ et sa surface d'onde est tangente au cône de Mach à ce même instant. On voit sur la figure 9 que :

$$\sin \theta_c = \frac{c_{p1}t}{c_{p2}t} = \frac{c_{p1}}{c_{p2}} = \sin i_\ell$$

C'est aussi ce qu'on constate sur la figure 9 puisque le cône de Mach est normal à la direction de propagation de l'onde réfléchie.

28. Le trajet direct a lieu dans le milieu 1, en ligne droite. Par conséquent :

$$T_D(x) = \frac{x}{c_1}$$

29. Pour une onde subissant une réflexion à l'interface 1/2, l'onde parcourt deux fois la distance $\sqrt{h^2 + \frac{x^2}{4}}$ dans le milieu 1. Par conséquent :

$$T_R(x) = \frac{2\sqrt{h^2 + \frac{x^2}{4}}}{c_1}$$

- Pour $x = 0$:

$$T_R(0) = \frac{2h}{c_1}$$

- Pour $\frac{x}{2} \gg h$:

$$T_R\left(\frac{x}{2} \gg h\right) \approx \frac{x}{c_1} = T_D(x)$$

30. L'onde sismique parcourt tout d'abord la distance $\frac{h}{\cos i_\ell}$ dans le milieu 1. Ensuite, l'onde se propage le long de l'interface à la vitesse c_2 , créant un cône de Mach. Lorsque l'onde atteint le point de l'interface situé sur la normale au cône de Mach passant par le point r , l'onde réfléchie est émise vers le point r à la vitesse c_1 et parcourt de nouveau la distance $\frac{h}{\cos i_\ell}$. La distance parcourue par l'onde le long de l'interface vaut $x - 2h \tan i_\ell$. On en déduit :

$$T_H(x) = \frac{2h}{c_1 \cos i_\ell} + \frac{x - 2h \tan i_\ell}{c_2}$$

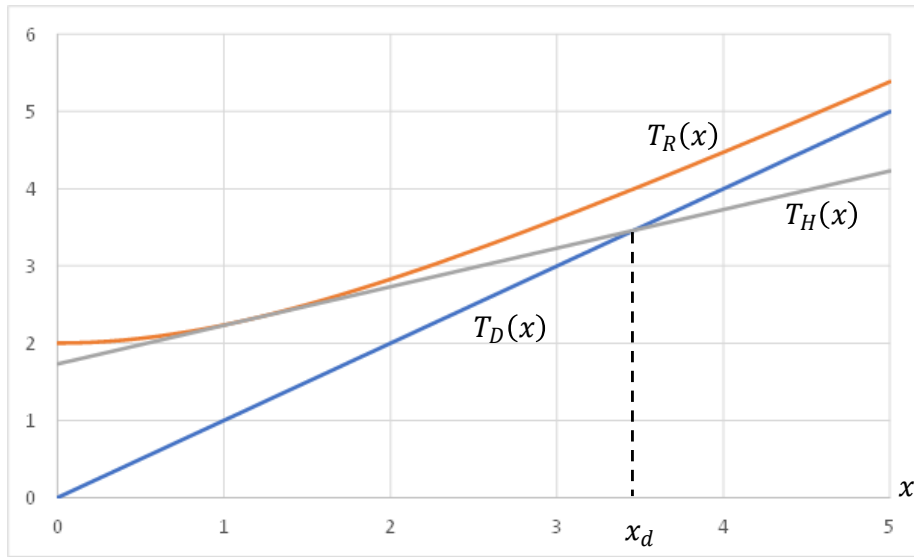
En explicitant $\cos i_\ell$ et $\tan i_\ell$, on obtient :

$$T_H(x) = \frac{x}{c_2} + 2h \frac{\sqrt{c_2^2 - c_1^2}}{c_1 c_2}$$

Cette onde n'existe que si $x > 2h \tan i_\ell$, soit :

$$x > \frac{2c_1 h}{\sqrt{c_2^2 - c_1^2}}$$

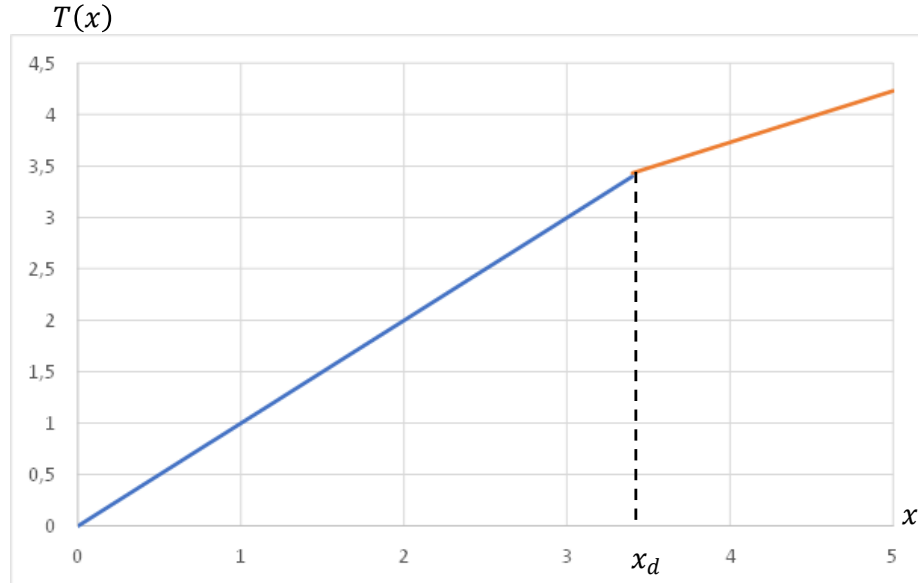
- 31.** En prenant $c_1 = 1$, $c_2 = 2$ et $h = 1$ (en unités arbitraires), on obtient les tracés :



On voit qu'au-delà d'une certaine abscisse x_d , c'est bien l'onde H qui arrive en premier sur le récepteur. Faisons le calcul de x_d , défini par $T_H(x_d) = T_D(x_d)$. On obtient :

$$x_d = 2h \sqrt{\frac{c_2 + c_1}{c_2 - c_1}}$$

La courbe donnant les premiers temps d'arrivée aux différents récepteurs est donc affine par morceaux : pour $x \leq x_d$, $T(x) = T_D(x)$ et pour $x \geq x_d$, $T(x) = T_H(x)$.



- 32.** Le temps de détection des premières ondes sismiques est bien affine par morceaux en fonction de la distance.

La mesure de la pente de la droite correspondant à $x \leq x_d$ donne c_1 :

$$c_1 \approx \frac{17 - 5}{(35 - 11) \times 10^{-3}} = 500 \text{ m.s}^{-1}$$

La mesure de la pente de la droite correspondant à $x \geq x_d$ donne c_2 :

$$c_2 \approx \frac{38 - 20}{(46 - 40) \times 10^{-3}} = 3000 \text{ m.s}^{-1}$$

La mesure de h se déduit de la mesure de x_d :

$$h = \frac{x_d}{2} \sqrt{\frac{c_2 - c_1}{c_2 + c_1}} \approx \frac{20}{2} \sqrt{\frac{2500}{3500}} \approx 10 \times \sqrt{\frac{25}{36}} = \frac{50}{6} \approx 8 \text{ m}$$

Cette méthode ne peut fonctionner que si les célérités c_1 et c_2 sont franchement différentes, sans quoi la rupture de pente sera imperceptible.

- 33.** On peut imaginer un trajet direct dans le milieu 1, une simple réflexion à l'interface 1/2, un trajet rasant à l'interface 1/2 comme vu précédemment, une réflexion sur l'interface 2/3 (avec deux réfractions à l'interface 1/2) et enfin un trajet rasant à l'interface 2/3 (avec là aussi deux réfractions à l'interface 1/2). Soit cinq possibilités en tout.

Pour que l'angle d'incidence à l'interface 2/3 soit égal à $i_{\ell(2/3)}$, il faut que

$$\frac{\sin \theta_1}{c_1} = \frac{\sin i_{\ell(2/3)}}{c_2} = \frac{1}{c_3}$$

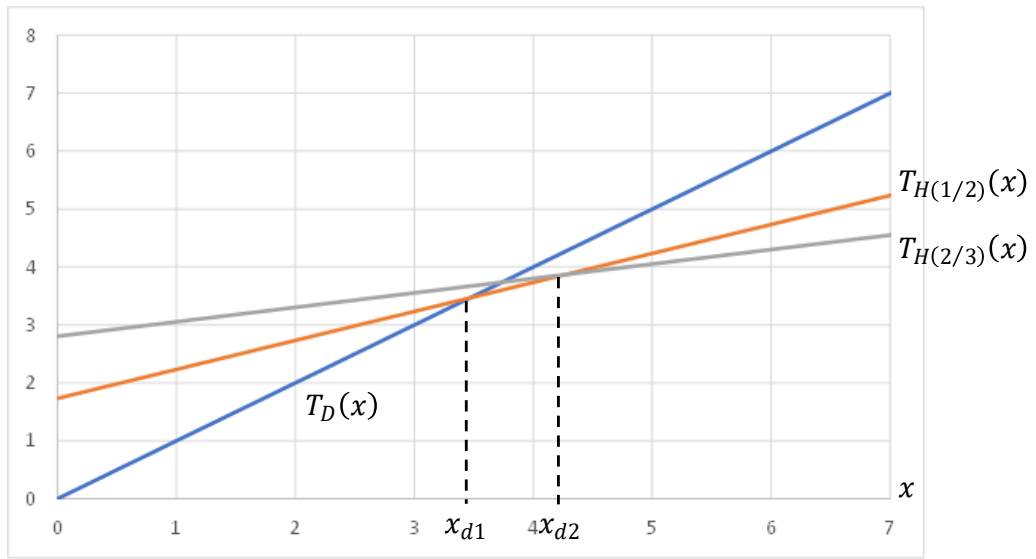
Un calcul analogue à celui de la question 30 donne :

$$T_{H(2/3)}(x) = \frac{2h_1}{c_1 \cos \theta_1} + \frac{2h_2}{c_2 \cos i_{\ell(2/3)}} + \frac{x - 2h_1 \tan \theta_1 - 2h_2 \tan i_{\ell(2/3)}}{c_3}$$

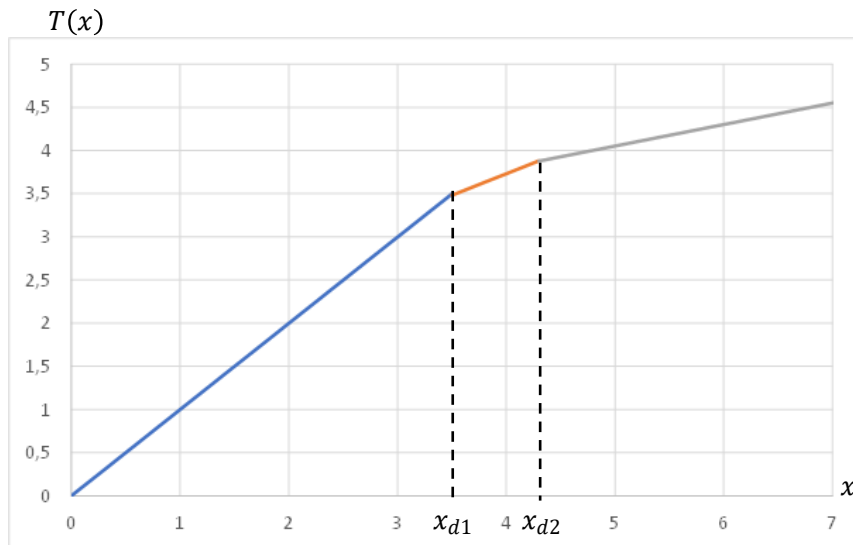
Après calcul, on trouve :

$$T_{H(2/3)}(x) = \frac{x}{c_3} + 2h_1 \frac{\sqrt{c_3^2 - c_1^2}}{c_1 c_3} + 2h_2 \frac{\sqrt{c_3^2 - c_2^2}}{c_2 c_3}$$

- Voici l'allure des courbes demandées avec $c_1 = 1, c_2 = 2, c_3 = 4$ et $h_1 = h_2 = 1$ en unités arbitraires :



La courbe des premiers temps d'arrivée est la suivante :



Les trois célérités se déduisent des trois pentes. La profondeur h_1 se déduit de la mesure de x_{d1} et la profondeur h_2 s'obtient en mesurant x_{d2} .

34. Si $c_2 < c_1 < c_3$, il n'y a plus d'angle limite de réfraction à l'interface 1/2 : le rayon rasant l'interface 1/2 n'existe plus. On n'aura donc plus qu'une seule rupture de pente. La célérité c_2 n'est donc plus mesurable et les profondeurs h_1 et h_2 non plus. Cette méthode ne fonctionne donc que pour des vitesses croissant avec la profondeur, ce qui correspond en général à une densité croissant avec la profondeur.

IV Détection des ondes sismiques : principe du géophone.

35. A l'équilibre,

$$k(L - z_{\text{éq}} - \ell_0) = mg$$

On en déduit :

$$z_{\text{éq}} = L - \ell_0 - \frac{mg}{k}$$

36. Dans le référentiel terrestre, le PFD donne :

$$m\ddot{z}_m = -mg + k(L - (z_{\text{éq}} + z(t)) - \ell_0) - \alpha\dot{z}(t)$$

Compte tenu de l'expression de $z_{\text{éq}}$, on en déduit :

$$m\ddot{z}_m = -kz(t) - \alpha\dot{z}(t)$$

Or, $z_m(t) = z(t) + x(t)$. Par conséquent :

$$\ddot{z} + \frac{\alpha}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z(t) = -\ddot{x}$$

37. En posant $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $Q = \frac{m\omega_0}{\alpha}$, l'équation se réécrit :

$$\ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{z} + \omega_0^2 z(t) = -\ddot{x}$$

On passe en notation complexe et on obtient :

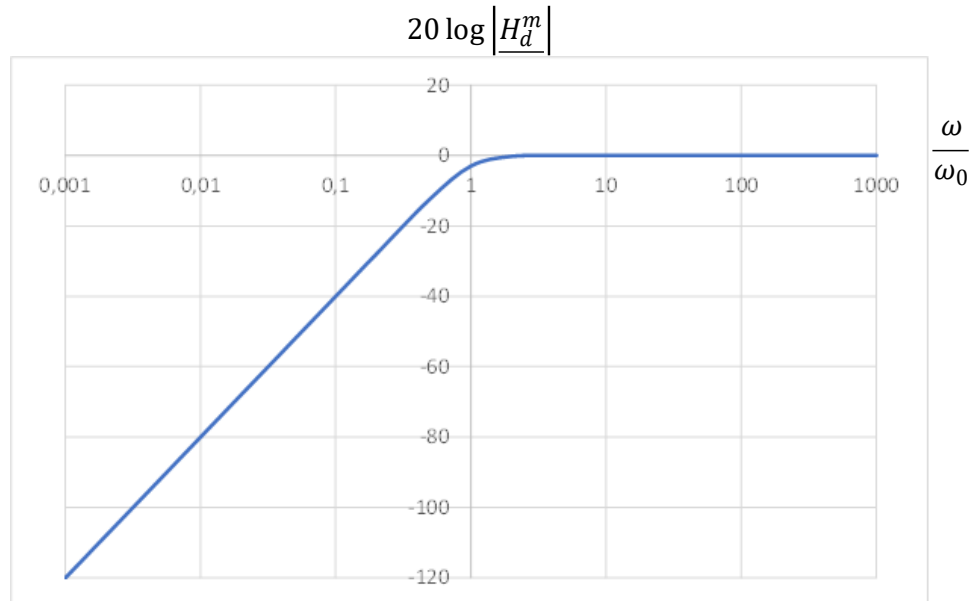
$$\frac{H_d^m}{\omega_0^2 + j\frac{\omega_0\omega}{Q} - \omega^2} = \frac{y^2}{1 + j\frac{y}{Q} - y^2}$$

avec : $y = \frac{\omega}{\omega_0}$.

Pour $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$, on obtient :

$$|H_d^m| = \frac{y^2}{\sqrt{(1 - y^2)^2 + 2y^2}} = \frac{y^2}{\sqrt{1 + y^4}}$$

Il s'agit d'un filtre passe-haut du 2nd ordre (de Butterworth). Le diagramme de Bode en amplitude est le suivant :



- Pour $\omega \ll \omega_0$: $\underline{H_d^m} \approx \frac{\omega^2}{\omega_0^2}$ donc $z(t) \approx -\frac{\ddot{x}(t)}{\omega_0^2}$. Le sismomètre se comporte alors comme un capteur d'accélération.
- Pour $\omega \gg \omega_0$: $\underline{H_d^m} \approx 1$ donc $z(t) \approx x(t)$. Le sismomètre se comporte alors comme un capteur de déplacement.

38. A très basse fréquence,

$$\omega_0^2 z(t) \approx -\ddot{x}$$

L'accélération minimale que le sismomètre peut détecter est donc

$$a_{\min} = \omega_0^2 \Delta z$$

Pour avoir une bonne résolution en accélération, il faut donc ω_0^2 petit : masse élevée et ressort souple.

39. Lorsque la tige conductrice est mise en mouvement, le flux magnétique à travers le circuit varie. Il apparaît alors une fém induite donnée par la loi de Faraday, et donc un courant induit dans le circuit. Ce système repose donc sur le phénomène d'induction (de Lorentz).

40.

- Equation mécanique :
Le PFD nous donne :

$$m\ddot{z}_m = -mg - k(z_{\text{éq}} + z(t) - \ell_0) - \alpha\dot{z} + B_0\ell i(t)$$

Or, à l'équilibre, $0 = -mg - k(z_{\text{éq}} - \ell_0)$. On en déduit donc :

$$m\ddot{z}_m + \alpha\dot{z} + kz(t) = B_0\ell i(t)$$

D'autre part, $\dot{z}_m = \dot{z} + \ddot{x}$. L'équation mécanique s'écrit donc (avec $\sigma = B_0\ell$) :

$$m\ddot{z} + \alpha\dot{z} + kz(t) = \sigma i(t) - m\ddot{x}$$

- Equation électrique :

La loi des mailles s'écrit :

$$e(t) = Ri(t)$$

La fém induite est donnée par la loi de Faraday :

$$e(t) = -\frac{d\phi}{dt} = -B_0\ell \frac{dz}{dt} = -\sigma\dot{z}$$

L'équation électrique s'écrit donc :

$$Ri(t) = -\sigma\dot{z}$$

- 41.** En éliminant le courant dans l'équation mécanique, on obtient :

$$m\ddot{z} + \left(\alpha + \frac{\sigma^2}{R}\right)\dot{z} + kz(t) = -m\ddot{x}$$

En posant $\alpha' = \alpha + \frac{\sigma^2}{R}$, l'équation devient :

$$\ddot{z} + \frac{\alpha'}{m}\dot{z} + \omega_0^2 z(t) = -\ddot{x}$$

Le coefficient de $\dot{z}$ vaut $\frac{\omega_0}{\tilde{Q}}$ par définition du facteur de qualité. On en déduit donc :

$$\tilde{Q} = \frac{m\omega_0}{\alpha'}$$

Le régime critique correspond à $\tilde{Q} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Il correspond à l'extinction la plus rapide du régime transitoire avant l'établissement d'un régime forcé : comme on s'intéresse à la réponse du géophone à une excitation sinusoïdale forcée, on a intérêt à s'y placer.

D'un point de vue pratique, le réglage du géophone se fait en modifiant la valeur du champ magnétique (et donc de α' , et donc de $\tilde{Q}$) pour que le régime libre s'amortisse le plus vite possible, sans oscillations.

- 43.** L'équation électrique, en RSF, donne :

$$\underline{H_d^e} = -j\omega\sigma\underline{H_d^m}$$

La fonction de transfert $\underline{H_d^m}$ vaut maintenant :

$$\underline{H_d^m} = \frac{\omega^2}{\omega_0^2 + j\frac{\omega_0\omega}{\tilde{Q}} - \omega^2}$$

On en déduit :

$$\underline{H_d^e} = -\frac{j\sigma\omega^3}{\omega_0^2 + j\frac{\omega_0\omega}{\tilde{Q}} - \omega^2} = -j\sigma\omega_0 \frac{y^3}{1 + j\frac{y}{\tilde{Q}} - y^2}$$

A haute fréquence,

$$\underline{H_d^e} \approx j\sigma\omega_0 y = j\omega\sigma$$

Dans ce domaine de fréquences, on a donc la relation :

$$e(t) = \sigma \frac{dx}{dt}$$

Le géophone est donc un capteur de vitesse en haute fréquence. Il ne fonctionne correctement que si l'excitation est bien dans le domaine $\omega \gg \omega_0$. Là encore, on a intérêt à ce que ω_0 soit petite, pour avoir une plage de fréquences d'utilisation étendue.

43. Ici, m désignera la masse *totale* de l'équipage mobile, système mécanique sur lequel on raisonne désormais. Il suffit de reprendre l'équation mécanique obtenue à la question 40, en y ajoutant la force de Laplace subie par la barre parcourue par le courant imposé I . On obtient :

$$m\ddot{z} + \alpha\dot{z} + kz(t) = \sigma(i(t) - I) - m\ddot{x}$$

L'équation électrique n'étant pas modifiée, on obtient donc :

$$\ddot{z} + \frac{\alpha'}{m}\dot{z} + \omega_0^2 z(t) = -\ddot{x} - \frac{\sigma}{m}I$$

44. Le schéma-blocs proposé est grossièrement inhomogène et faux (oubli d'un facteur dimensionné, erreurs de signes, un bloc manquant...). Compte tenu du fait que la force $\underline{F}$ dérive du courant $\underline{I}$, on peut déjà deviner qu'il s'agit de la force de Laplace supplémentaire :

$$\underline{F} = -\sigma\underline{I}$$

D'autre part, on a la relation donnée par l'énoncé :

$$\underline{I} = -\underline{H}(j\omega)\underline{E}$$

L'équation mécanique donne, en notation complexe :

$$\left(\omega_0^2 + j\frac{\omega_0\omega}{\tilde{Q}} - \omega^2\right)\underline{Z} = \omega^2\underline{X} + \frac{\underline{F}}{m}$$

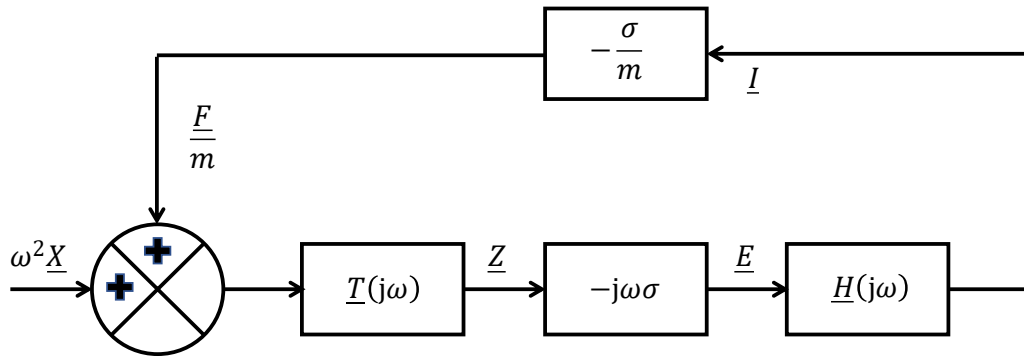
Donc :

$$\underline{Z} = \underline{T}(j\omega)\left(\omega^2\underline{X} + \frac{\underline{F}}{m}\right)$$

où

$$\underline{T}(j\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 + j\frac{\omega_0\omega}{\underline{Q}} - \omega^2}$$

On en déduit :



45. On déduit de ce qui précède :

$$\frac{F}{m} = \frac{\sigma}{m} \underline{H}(j\omega) \underline{E}$$

Or, l'équation électrique donne :

$$\underline{E} = -j\omega\sigma\underline{Z}$$

Par conséquent :

$$\frac{F}{m} = -j\omega \frac{\sigma^2}{m} \underline{H}(j\omega) \underline{Z}$$

L'équation mécanique complexe devient donc :

$$\left(\omega_0^2 + j\omega \left(\frac{\omega_0}{\underline{Q}} + \frac{\sigma^2}{m} \underline{H}(j\omega) \right) - \omega^2 \right) \underline{Z} = \omega^2 \underline{X}$$

On en déduit la fonction de transfert

$$\underline{H_d} = \frac{\omega^2}{\omega_0^2 + j\omega \left(\frac{\omega_0}{\underline{Q}} + \frac{\sigma^2}{m} \underline{H}(j\omega) \right) - \omega^2}$$

46. Si $\underline{H}(j\omega) = g_1 > 0$, le coefficient de $j\omega$ devient :

$$\frac{\omega_0}{\tilde{Q}} + \frac{\sigma^2 g_1}{m} = \frac{\omega_0}{\tilde{Q}_1}$$

où :

$$\frac{1}{\tilde{Q}_1} = \frac{1}{\tilde{Q}} + \frac{\sigma^2 g_1}{m\omega_0} > \frac{1}{\tilde{Q}}$$

On en déduit que le facteur de qualité est diminué par la rétroaction. Le système est stabilisé.

47. Si $\underline{H}(j\omega) = \frac{g_2}{j\omega}$, la fonction de transfert devient :

$$\underline{H_d} = \frac{\omega^2}{\omega_0^2 + \frac{\sigma^2 g_2}{m} + j\omega \frac{\omega_0}{\tilde{Q}} - \omega^2} = \frac{\omega^2}{\omega_0'^2 + j\omega \frac{\omega_0}{\tilde{Q}} - \omega^2}$$

où :

$$\omega_0' = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{\sigma^2 g_2}{m}} > \omega_0$$

On en déduit :

$$\underline{\underline{F}} = -\frac{\sigma^2 g_2}{m} \underline{\underline{Z}} = -\frac{\sigma^2 g_2}{m} \left(\frac{\omega^2}{\omega_0'^2 + j\omega \frac{\omega_0}{\tilde{Q}} - \omega^2} \right) \underline{\underline{X}}$$

En basse fréquence,

$$\underline{\underline{F}} \approx -\frac{\sigma^2 g_2}{m\omega_0'^2} \omega^2 \underline{\underline{X}}$$

Donc :

$$\underline{\underline{F}} \approx -\frac{\sigma^2 g_2}{m\omega_0'^2} \underline{\underline{F_{ie}}}$$

La force de Laplace supplémentaire est opposée à la force d'inertie d'entraînement et la compense donc partiellement. C'était le but recherché.

La tension $\underline{U}$ est proportionnelle au courant $\underline{I}$, lui-même proportionnel à la force $\underline{\underline{F}}$. On en conclut que

$$\underline{U} \propto (j\omega)^2 \underline{\underline{X}}$$

On a donc réalisé un capteur d'accélération.

48. Pour contrôler le facteur de qualité et la pulsation propre, il faut choisir

$$\underline{H}(j\omega) = g_1 + \frac{g_2}{j\omega}$$

Pour compenser la force d'inertie d'entraînement, il faut choisir g_2 de telle sorte que

$$\frac{\sigma^2 g_2}{m\omega_0'^2} = \frac{\sigma^2 g_2}{m\left(\omega_0^2 + \frac{\sigma^2 g_2}{m}\right)} \approx 1$$

Cela suppose $\frac{\sigma^2 g_2}{m} \gg \omega_0^2$ soit :

$$g_2 \gg \frac{k}{\sigma^2}$$

Pour se placer en régime critique, il faut choisir g_1 de telle sorte que

$$\frac{1}{\tilde{Q}_1} = \frac{1}{\tilde{Q}} + \frac{\sigma^2 g_1}{m\omega_0'} = \frac{\alpha'}{m\omega_0'} + \frac{\sigma^2 g_1}{m\omega_0'} = \sqrt{2}$$

soit :

$$\frac{\alpha'}{m} + \frac{\sigma^2 g_1}{m} = \sqrt{2\left(\omega_0^2 + \frac{\sigma^2 g_2}{m}\right)} \gg 2\omega_0$$

soit :

$$g_1 \gg \frac{2m\omega_0 - \alpha'}{\sigma^2}$$

49. Avec $\underline{H}(j\omega) = g_1 + \frac{g_2}{j\omega} + \frac{g_3}{(j\omega)^2}$, l'équation mécanique s'écrit :

$$\left(\omega_0^2 + \frac{\sigma^2 g_2}{m} + j\omega\left(\frac{\omega_0}{\tilde{Q}} + \frac{\sigma^2 g_1}{m}\right) + \frac{\sigma^2 g_3}{mj\omega} - \omega^2\right)\underline{Z} = \omega^2 \underline{X}$$

On en déduit :

$$\underline{H}_v = -\frac{j\omega}{\omega_0^2 + \frac{\sigma^2 g_2}{m} + j\omega\left(\frac{\omega_0}{\tilde{Q}} + \frac{\sigma^2 g_1}{m}\right) + \frac{\sigma^2 g_3}{mj\omega} - \omega^2}$$

En multipliant haut et bas par $\frac{mj\omega}{\sigma^2 g_3}$, on en déduit :

$$\underline{H}_v = \frac{\frac{m\omega^2}{\sigma^2 g_3}}{1 + \left(\frac{m\omega_0^2}{\sigma^2} + g_2\right)\frac{j\omega}{g_3} - \left(\frac{m\omega_0}{\sigma^2 \tilde{Q}} + g_1\right)\frac{\omega^2}{g_3} - j\frac{m\omega^3}{\sigma^2 g_3}}$$

La fonction de transfert a bien la forme requise :

$$\underline{H}_v = \frac{\frac{\omega^2}{\omega_{02}^3}}{1 + \frac{j\omega}{Q'\omega_{01}} - \frac{\omega^2}{\omega_{01}^2} - j\frac{\omega^3}{\omega_{02}^3}}$$

avec :

$$\begin{cases} \omega_{02} = \sqrt[3]{\frac{\sigma^2 g_3}{m}} \\ \frac{1}{\omega_{01}^2} = \frac{\omega_0}{\tilde{Q} \omega_{02}^3} + \frac{g_1}{g_3} \\ \frac{1}{Q' \omega_{01}} = \frac{\omega_0^2}{\omega_{02}^3} + \frac{g_2}{g_3} \end{cases}$$

Etudions le comportement asymptotique de $\underline{H_v}$:

- $\omega \ll \omega_{01}$:

$$\underline{H_v} \approx \frac{\omega^2}{\omega_{02}^3}$$

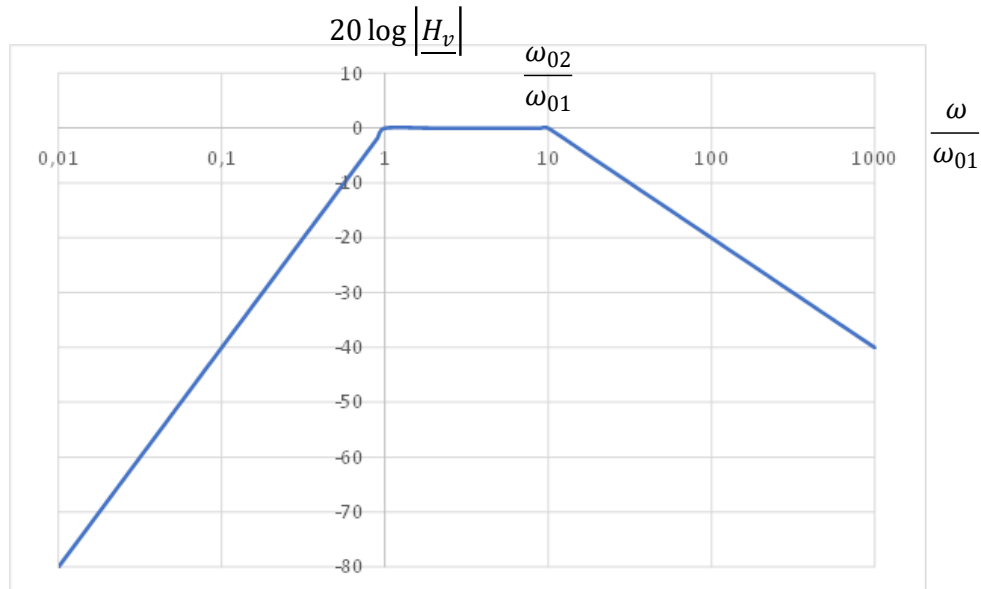
- $\omega_{01} \ll \omega \ll \omega_{02}$:

$$\underline{H_v} \approx -\frac{\omega_{01}^2}{\omega_{02}^3}$$

- $\omega_{02} \ll \omega$:

$$\underline{H_v} \approx \frac{j}{\omega}$$

Le diagramme de Bode asymptotique en amplitude a l'allure suivante :



Pour $\omega_{01} \ll \omega \ll \omega_{02}$, $z(t) \propto \frac{dx}{dt}$: il s'agit d'un capteur de vitesse.