

## X-ENS PSI 2020

### Autour de la modulation acousto-optique

Corrigé proposé par Nicolas Choimet, PSI\*, Eiffel Bordeaux

[nicolas.choimet@live.fr](mailto:nicolas.choimet@live.fr)

#### I. Génération d'ondes acoustiques

##### I.A. Etude fréquentielle de l'émetteur ultrasonore

1. Il s'agit de la courbe de gain d'un filtre passe-bande présentant une résonance aiguë.

On mesure sur la courbe  $\begin{cases} f_p = 39,9 \text{ kHz} \\ \Delta f = 1,5 \text{ kHz} \end{cases}$  (à -3 dB,  $\frac{u_{s,m}}{u_0} = \frac{0,35}{\sqrt{2}} \approx 0,25$ ). On en déduit le facteur de qualité  $Q = \frac{f_p}{\Delta f} \approx 40 \times \frac{2}{3} \approx 27$ .

2. La gamme des fréquences audibles par l'oreille humaine est [20 Hz, 20 kHz]. La fréquence de résonance de l'émetteur est supérieure à 20 kHz : il s'agit bien d'ultrasons.

##### I.B. Etude de la propagation des ondes acoustiques

3. C'est une question de cours ! On obtient (cf cours) :

$$\begin{cases} \rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\vec{\text{grad}} p \\ \rho_0 \text{div} \vec{v} + \frac{\partial \mu}{\partial t} = 0 \\ \mu = \rho_0 \chi_s p \end{cases}$$

4. De nouveau une question de cours (le résultat étant donné !). L'équation de d'Alembert s'écrit :

$$\Delta p - \frac{1}{c_a^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0$$

avec  $c_a = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_s}}$ .

5. Le décalage temporel entre les débuts des deux trains d'onde vaut  $\Delta t = 500 \mu\text{s}$ . On en déduit la célérité des ondes acoustiques :  $c_a = \frac{d}{\Delta t} = 340 \text{ m.s}^{-1}$ . La valeur théorique est donnée par  $c_a = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_s}} = \frac{1}{\sqrt{1,2 \times 7,10^{-6}}} = \frac{1000}{\sqrt{8,4}} \approx 1000 \times 0,345 = 345 \text{ m.s}^{-1}$ .

Les deux valeurs sont très voisines.

### I.C. Propagation d'ondes acoustiques dans un cristal

6. Considérons l'atome numéro  $n$  et appliquons-lui la 2<sup>de</sup> loi de Newton en projection sur l'axe (Ox) :

$$m \frac{d^2 u_n}{dt^2} = K(a + u_{n+1} - u_n - a) - K(a + u_n - u_{n-1} - a)$$

soit :

$$m \frac{d^2 u_n}{dt^2} = K(u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n)$$

7. Dans l'approximation continue,

$$u_{n\pm 1}(t) = u(x_n \pm a, t) \approx u_n(t) \pm a \frac{\partial u}{\partial x}(x_n, t) + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_n, t)$$

On en déduit :

$$m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Ka^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

On obtient bien une équation de d'Alembert, avec la célérité  $c_s = a \sqrt{\frac{K}{m}}$ .

8. On revient à la chaîne discrète et on cherche des solutions de la forme

$$u_n(t) = u_0 \exp i(qna - \omega t)$$

On injecte cette solution dans l'équation de couplage établie à la question 6 :

$$-m\omega^2 = K(\exp(ika) + \exp(-ika) - 2) = -2K(1 - \cos(qa)) = -4K \sin^2\left(\frac{qa}{2}\right)$$

On en déduit :

$$\omega^2 = \frac{4K}{m} \sin^2\left(\frac{qa}{2}\right)$$

soit :

$$\omega = 2 \sqrt{\frac{K}{m}} \left| \sin\left(\frac{qa}{2}\right) \right|$$

9. La condition aux limites périodique s'écrit  $u_{N+1}(t) = u_1(t)$ , soit :  $\exp i(qNa) = 1$ . Par conséquent,  $qNa \equiv 0[2\pi]$ , soit :

$$q = p \frac{2\pi}{Na}, p \in \mathbb{Z}^*$$

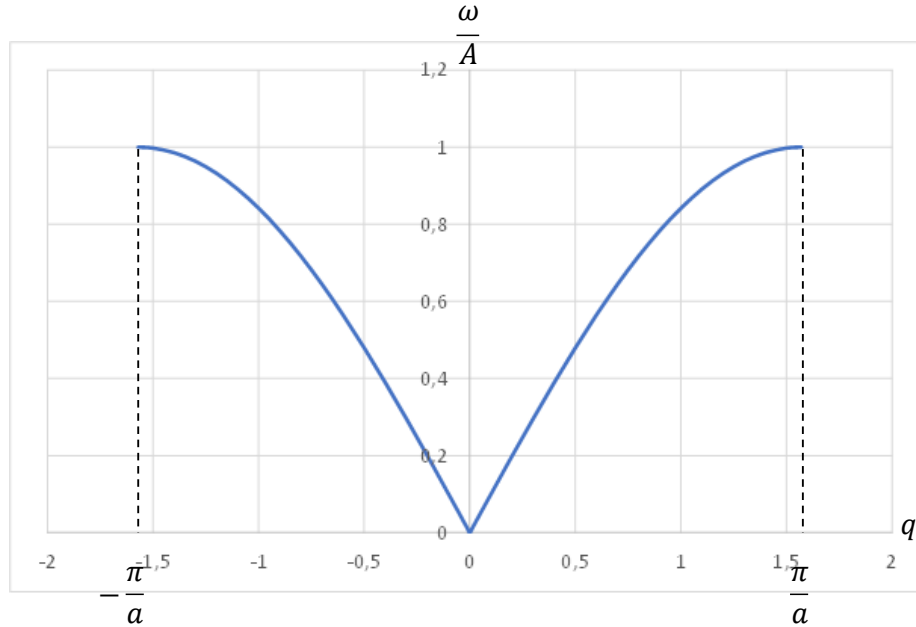
NB : il faut ici considérer les valeurs positives et négatives de  $q$  puisqu'elles correspondent à des solutions physiquement différentes (propagation vers les  $x$  croissants ou vers les  $x$  décroissants). En revanche,  $q = 0$  n'a pas de sens physique (erreur d'énoncé ?).

10. La solution de nombre d'onde  $q' = q + h \frac{2\pi}{a}$  s'écrit :

$$u_{n,q'}(t) = u_0 \exp i(q'na - \omega t) = u_0 \exp i(qna - \omega t) \exp(ihn2\pi) = u_0 \exp i(qna - \omega t) = u_n(t)$$

Les deux solutions de nombres d'onde  $q$  et  $q'$  sont donc identiques. Il suffit donc d'envisager toutes les valeurs de  $q$  comprises dans un intervalle de longueur  $\frac{2\pi}{a}$ . On peut donc se restreindre à l'intervalle  $\left[-\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}\right]$  appelé première zone de Brillouin.

11.



12. Pour  $\frac{qa}{2} \ll 1$ , soit  $q \ll \frac{2}{a}$ ,  $\omega \approx a \sqrt{\frac{K}{m}} |q|$ . Cette condition peut être réécrite en termes de longueur d'onde : comme  $q = \frac{2\pi}{\lambda}$ , la condition de linéarisation de la relation de dispersion s'écrit aussi  $a \ll \frac{\lambda}{\pi}$ . En ordre de grandeur, c'est la même condition que celle de l'approximation continue. Dans ces conditions :

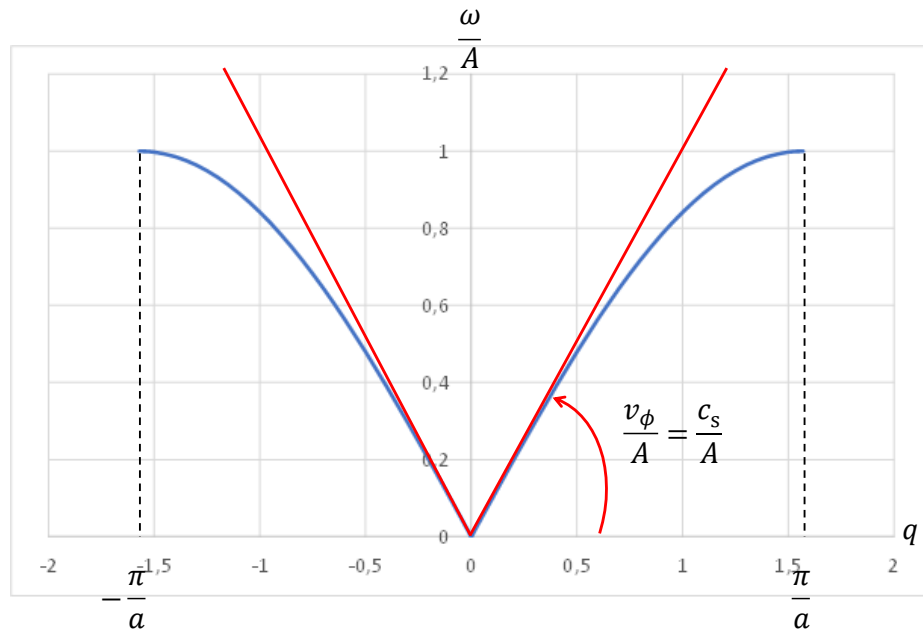
$$\omega \approx \pm a \sqrt{\frac{K}{m}} q$$

Le facteur de proportionnalité n'est autre que la vitesse de phase de l'onde (positive ou négative, selon son sens de propagation) :

$$v_{\phi} = \frac{\omega}{q} = \pm a \sqrt{\frac{K}{m}}$$

On retrouve d'ailleurs la célérité  $c_s = a \sqrt{\frac{K}{m}}$  trouvée à la question 7. C'est cohérent.

La vitesse de phase dans la zone centrale de la première zone de Brillouin est la pente locale de la courbe  $\omega(q)$  :



13. Le photon est la particule associée à la propagation d'une onde électromagnétique, dont la relation de dispersion dans le vide est également linéaire :  $\omega = ck$ .

## II. Fonctionnement d'un transducteur piézoélectrique

### II.A. Modèle électromécanique de la piézoélectricité

14. L'équation locale de Maxwell-Gauss  $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$  est équivalente au théorème de Gauss (question de cours)  $\oint_S \vec{E} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dS = \frac{Q^{\text{int}}}{\epsilon_0}$ .
15. Le vecteur  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$  vérifie l'équation locale  $\text{div} \vec{D} = \epsilon_0 \text{div} \vec{E} + \text{div} \vec{P} = \rho - \rho_{\text{liée}}$ . Par conséquent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div} \vec{D} = \rho_{\text{libre}} \\ \oint_S \vec{D} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dS = Q_{\text{libre}}^{\text{int}} \end{array} \right.$$

NB : le vecteur  $\vec{D}$  joue en électrostatique un rôle analogue à celui de  $\vec{H}$  en magnétostatique. La polarisation  $\vec{P}$  est l'équivalent de l'aimantation  $\vec{M}$ .

- 16.a. Dans chacune des zones I, II et III, il n'y a aucune charge libre volumique : dans les régions I et III, c'est évident car on est dans le vide ; dans la région II, on est dans l'isolant qui ne contient que des charges liées. Donc  $\text{div} \vec{D} = 0$  dans chacune des trois zones.

D'autre part, nous sommes en présence d'un problème à 1 dimension, invariant par translation parallèlement aux axes (Oy) et (Oz). Dans un tel problème, on sait (cf cours) que  $\vec{E} = E(x)\vec{u}_x$ . Comme  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ ,  $\vec{D}$  a les mêmes propriétés de symétrie que  $\vec{E}$  ( $\vec{P}$  aussi d'ailleurs) : c'est un vrai vecteur. Par conséquent :  $\vec{D} = D(x)\vec{u}_x$ .

On en conclut que  $\frac{dD}{dx} = 0$  dans chacune des trois zones. Par conséquent,

$$\begin{cases} \vec{D}(x < 0) = D_I \vec{u}_x \\ \vec{D}(0 < x < L) = D_{II} \vec{u}_x \\ \vec{D}(x > L) = D_{III} \vec{u}_x \end{cases}$$

NB : les trois constantes sont *a priori* différentes car les deux armatures portent des charges *surfaciques*.  $\vec{D}$  n'est donc pas une fonction continue.

- 16.b.** Le plan  $x = \frac{L}{2}$  est un plan d'antisymétrie pour la distribution de charges libres. C'est donc aussi un plan d'antisymétrie pour le vecteur  $\vec{D}$ . On en déduit que  $D_I = D_{III}$ .

Ce résultat peut aussi être montré par le théorème de Gauss. Considérons une surface de Gauss cylindrique, de section  $S$ , de génératrices parallèles à  $\vec{u}_x$ , englobant complètement le système  $\mathcal{S}$ . Le théorème de Gauss donne :

$$D_{III} \times S - D_I \times S = Q - Q = 0$$

Pour montrer que  $D_I = D_{III} = 0$ , je ne vois pas d'autre argument que de dire que ses lignes de champ sont totalement confinées entre les armatures, du fait de l'absence d'effets de bords.

NB : on pourrait aussi considérer (mais je ne pense pas que ce soit la démarche attendue par l'énoncé) que  $\vec{D}$  est créé uniquement par les deux armatures de charges  $Q$  et  $-Q$  puisqu'il n'est relié qu'aux charges libres. Il est donc créé par deux plans infinis

uniformément chargés :  $\vec{D} = \vec{D}_1 + \vec{D}_2$  avec  $\begin{cases} \vec{D}_1(x < 0) = \frac{Q}{2S} \vec{u}_x \\ \vec{D}_1(x > 0) = -\frac{Q}{2S} \vec{u}_x \end{cases}$  et  $\begin{cases} \vec{D}_2(x < L) = -\frac{Q}{2S} \vec{u}_x \\ \vec{D}_2(x > L) = \frac{Q}{2S} \vec{u}_x \end{cases}$ .

$$\text{On en déduit : } \begin{cases} \vec{D}(x < 0) = \vec{0} \\ \vec{D}(0 < x < L) = -\frac{Q}{S} \vec{u}_x \\ \vec{D}(x > L) = \vec{0} \end{cases}$$

- 16.c.** Sachant que  $\vec{D}$  est nul en dehors du système, considérons une surface de Gauss de même géométrie qu'à la question précédente, mais n'englobant que l'armature de droite, portant la charge  $Q$ . Le théorème de Gauss donne :  $D_{III} \times S - D_{II} \times S = Q$  soit :

$$\vec{D}(0 < x < L) = -\frac{Q}{S} \vec{u}_x$$

- 16.d.** Etant donné que l'isolant est linéaire,  $\vec{P} = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)\vec{E}$ . Donc  $\vec{D} = \epsilon_0\epsilon_r\vec{E}$ . On en déduit donc :

$$\vec{E}(0 < x < L) = -\frac{Q}{\epsilon_0\epsilon_r S} \vec{u}_x$$

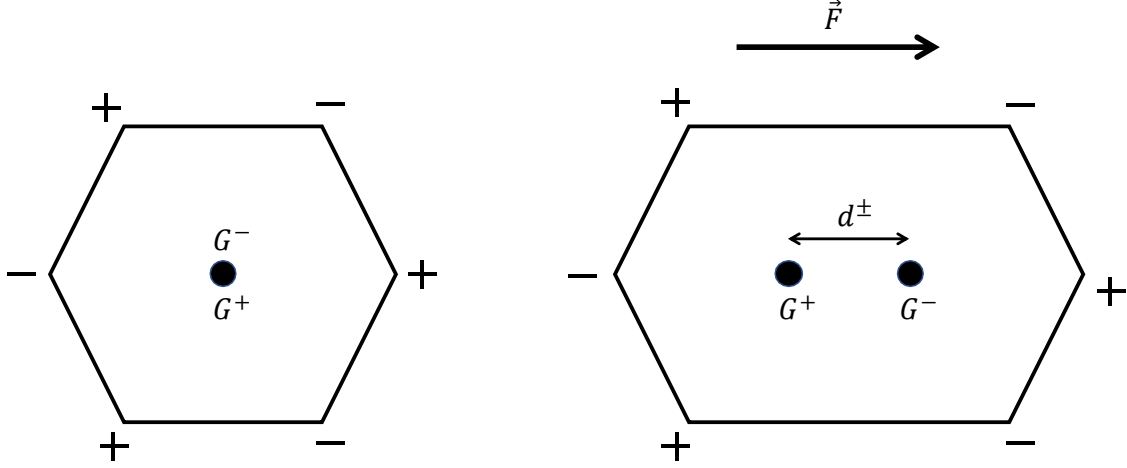
Par définition du potentiel électrostatique, la tension  $U = V(L) - V(0)$  est donnée par

$$U = - \int_0^L \vec{E} \cdot d\vec{r} = -EL = \frac{Q}{\epsilon_0\epsilon_r S} L$$

On en déduit la capacité  $C$  du condensateur :

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{L}$$

17. Le moment dipolaire vaut  $p_{\text{hex}} = 3ed^\pm$  puisque chaque barycentre porte la charge  $3e$ .



18. Etant donné que  $\vec{P} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\vec{E} + \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\gamma \xi}{L} \vec{u}_x$ ,  $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \left( \vec{E} + \frac{\gamma \xi}{L} \vec{u}_x \right)$ . Or,  $\vec{D}$  (qui ne dépend que des charges libres) est toujours donné par  $\vec{D}(0 < x < L) = -\frac{Q}{S} \vec{u}_x$ . On en déduit donc :

$$\vec{E}(0 < x < L) = -\left( \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_r S} + \frac{\gamma \xi}{L} \right) \vec{u}_x$$

Par définition du potentiel électrostatique, la tension  $U = V(L) - V(0)$  est donnée par

$$U = -\int_0^L \vec{E} \cdot d\vec{r} = -EL = \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_r S} L + \gamma \xi = \frac{Q}{C} + \gamma \xi$$

19. Le principe de l'action et de la réaction donne la force de rappel subie par l'armature mobile :

$$\vec{F}_{\text{rappel}} = -\vec{F} = -(\gamma Q + k\xi) \vec{u}_x$$

La 2<sup>nde</sup> loi de Newton appliquée l'armature mobile et projetée sur  $\vec{u}_x$  donne :

$$m \frac{d^2 \xi}{dt^2} = -\alpha \frac{d\xi}{dt} - (\gamma Q + k\xi)$$

soit :

$$m \frac{d^2 \xi}{dt^2} + \alpha \frac{d\xi}{dt} + k\xi + \gamma Q = 0$$

20. L'équation (11) donne  $Q = C(U - \gamma \xi)$ . On en déduit :

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{\alpha}{m} \frac{d\xi}{dt} + \frac{k - \gamma^2 C}{m} \xi = -\frac{\gamma C}{m} U$$

En régime sinusoïdal forcé, on obtient la fonction de transfert :

$$\underline{H}_{\text{elm}}(i\omega) = \frac{-\frac{\gamma C}{m}}{\frac{k - \gamma^2 C}{m} - \omega^2 + i \frac{\alpha}{m} \omega}$$

On identifie facilement  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k - \gamma^2 C}{m}}$  et  $\frac{\omega_0}{Q_{\text{elm}}} = \frac{\alpha}{m}$  donc  $Q_{\text{elm}} = \frac{\sqrt{m(k - \gamma^2 C)}}{\alpha}$ . Par conséquent,

$$\underline{H}_{\text{elm}}(i\omega) = \frac{-\frac{\gamma C}{m\omega_0^2}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + i \frac{\omega}{\omega_0 Q_{\text{elm}}}}$$

$$\text{Donc : } H_0 = -\frac{\gamma C}{m\omega_0^2} = -\frac{\gamma C}{k - \gamma^2 C}.$$

**21.** Le module de la fonction de transfert s'écrit donc :

$$|\underline{H}_{\text{elm}}|(\omega) = \frac{|H_0|}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{1}{Q_{\text{elm}}^2} \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}$$

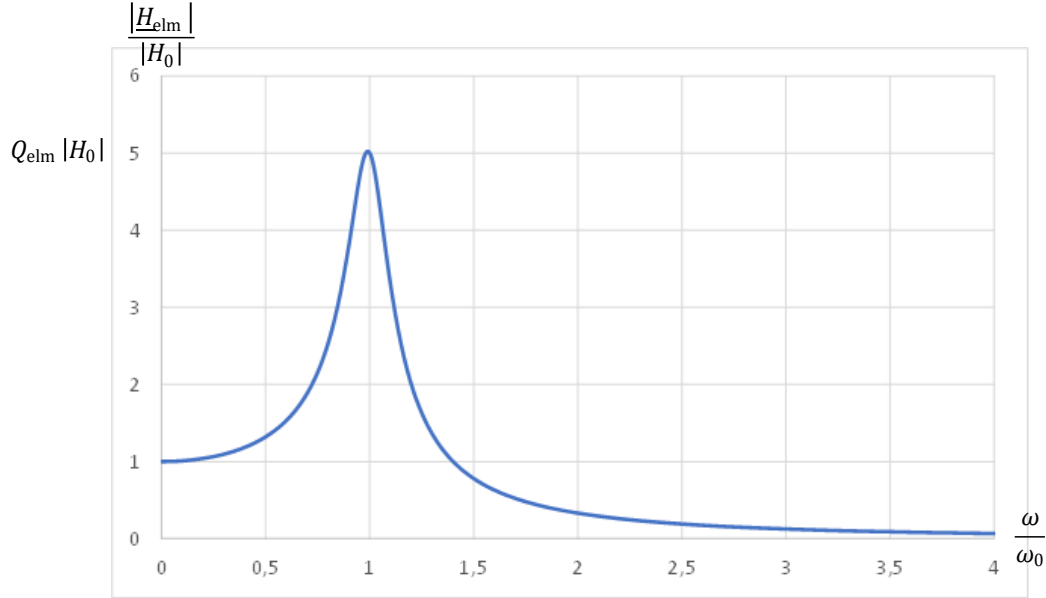
La réponse du système est maximale si  $\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{1}{Q_{\text{elm}}^2} \frac{\omega^2}{\omega_0^2}$  est minimal. Posons donc  $X = \frac{\omega^2}{\omega_0^2}$  et cherchons à minimiser la fonction  $f(X) = (1 - X)^2 + \frac{X}{Q_{\text{elm}}^2}$ . Sa dérivée s'écrit :  $f'(X) = 2X - 2 + \frac{1}{Q_{\text{elm}}^2}$ . Elle s'annule pour  $X = 1 - \frac{1}{2Q_{\text{elm}}^2}$ . Cette valeur n'est définie positive que si  $Q_{\text{elm}} > \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Dans ce cas,  $X_m = 1 - \frac{1}{2Q_{\text{elm}}^2}$  ce qui donne :

$$\omega_m = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q_{\text{elm}}^2}}$$

**22.** Pour  $Q_{\text{elm}} \gg 1$ ,  $\omega_m \approx \omega_0 \left(1 - \frac{1}{4Q_{\text{elm}}^2}\right) \approx \omega_0$ . Le comportement asymptotique de  $|\underline{H}_{\text{elm}}|(\omega)$  est donné par :

$$\begin{cases} |\underline{H}_{\text{elm}}|(\omega \ll \omega_0) \approx |H_0| \\ |\underline{H}_{\text{elm}}|(\omega \gg \omega_0) \approx |H_0| \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \end{cases}$$

A la résonance,  $|\underline{H}_{\text{elm}}|(\omega_0) = Q_{\text{elm}} |H_0|$ . Voici la courbe des variations de  $|\underline{H}_{\text{elm}}|(\omega)$ , tracée pour  $Q_{\text{elm}} = 5$ , pour plus de lisibilité :



23. La courbe expérimentale est en fait un « zoom » sur le domaine de fréquences entourant la résonance. On a donc localement un comportement passe-bande, alors que la fonction de transfert complète est passe-bas.

Le facteur de qualité expérimental valant  $Q = 27, \frac{1}{2Q^2} \approx 7 \cdot 10^{-4}$ . L'approximation réalisée à la question 22 est donc excellente.

## II.B. Modèle électrocinétique d'un transducteur piézoélectrique

24. L'impédance  $Z_{AB}$  vérifie :

$$\frac{1}{Z_{AB}} = iC_0\omega + \frac{1}{R_m + iL_m\omega + \frac{1}{iC_m\omega}} = iC_0\omega + \frac{iC_m\omega}{1 + iR_mC_m\omega - L_mC_m\omega^2}$$

En factorisant par  $iC_0\omega$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{Z_{AB}} &= iC_0\omega \left( 1 + \frac{C_m}{C_0(1 + iR_mC_m\omega - L_mC_m\omega^2)} \right) \\ &= iC_0\omega \left( \frac{iR_mC_mC_0\omega + C_0 + C_m - L_mC_mC_0\omega^2}{iR_mC_mC_0\omega + C_0 - L_mC_mC_0\omega^2} \right) \end{aligned}$$

En divisant numérateur et dénominateur par  $iR_mC_mC_0\omega$ , on obtient :

$$\frac{1}{Z_{AB}} = iC_0\omega \frac{1 + i\left(\frac{L_m\omega}{R_m} - \frac{C_0 + C_m}{R_mC_mC_0\omega}\right)}{1 + i\left(\frac{L_m\omega}{R_m} - \frac{1}{R_mC_m\omega}\right)}$$

On en déduit :

$$Z_{AB} = \frac{1}{iC_0\omega} \frac{1 + iQ_r \left( \frac{\omega}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega} \right)}{1 + iQ_a \left( \frac{\omega}{\omega_a} - \frac{\omega_a}{\omega} \right)}$$

avec :  $\begin{cases} \omega_r = \frac{1}{\sqrt{L_m C_m}} \\ Q_r = \frac{1}{R_m} \sqrt{\frac{L_m}{C_m}} \end{cases}$  et  $\begin{cases} \omega_a = \sqrt{\frac{C_0 + C_m}{L_m C_m C_0}} = \omega_r \sqrt{1 + \frac{C_m}{C_0}} \\ Q_a = \frac{1}{R_m} \sqrt{\frac{L_m (C_0 + C_m)}{C_m C_0}} = Q_r \sqrt{1 + \frac{C_m}{C_0}} \end{cases}$ .

On en déduit :

$$|Z_{AB}| = \frac{1}{C_0\omega} \sqrt{\frac{1 + Q_r^2 \left( \frac{\omega}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega} \right)^2}{1 + Q_a^2 \left( \frac{\omega}{\omega_a} - \frac{\omega_a}{\omega} \right)^2}}$$

25. Le numérateur est minimum (et vaut 1) pour  $\omega = \omega_r$  ; le dénominateur est minimum (et vaut 1) pour  $\omega = \omega_a$ .

On en déduit (pour peu que les pulsations  $\omega_r$  et  $\omega_a$  soient assez écartées et que les facteurs de qualité  $Q_r$  et  $Q_a$  soient assez grands) que  $|Z_{AB}|(\omega_r)$  est un minimum de  $|Z_{AB}|$  tandis que  $|Z_{AB}|(\omega_a)$  est un maximum de  $|Z_{AB}|$ .

26. Si l'amplitude la tension est fixée, l'amplitude du courant (et donc la puissance fournie au transducteur) est maximale pour  $\omega = \omega_r$  et minimale pour  $\omega = \omega_a$ . On a donc une résonance concernant l'émission sonore pour  $\omega = \omega_r$  et une antirésonance pour  $\omega = \omega_a$ .

## II.C. Lien entre le modèle électromécanique et le circuit équivalent

27. Les équation (11) (sous la forme  $\gamma \xi = U - \frac{Q}{C}$ ) et (13) donnent :

$$\frac{d^2 U}{dt^2} + \frac{\alpha}{m} \frac{dU}{dt} + \frac{k}{m} U(t) = \frac{1}{C} \left( \frac{d^2 Q}{dt^2} + \frac{\alpha}{m} \frac{dQ}{dt} + \left( \frac{k - \gamma^2 C}{m} \right) Q \right)$$

En passant en notation complexe, on obtient :

$$\frac{\underline{U}}{\underline{Q}} = \frac{1}{C} \frac{\frac{k - \gamma^2 C}{m} + i \frac{\alpha}{m} \omega - \omega^2}{\frac{k}{m} + i \frac{\alpha}{m} \omega - \omega^2}$$

On en déduit l'impédance  $Z_S = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{\underline{U}}{i\omega \underline{Q}}$  :

$$Z_S = \frac{1}{iC\omega} \frac{1 + i \left( \frac{m}{\alpha} \omega - \frac{k - \gamma^2 C}{\alpha \omega} \right)}{1 + i \left( \frac{m}{\alpha} \omega - \frac{k}{\alpha \omega} \right)}$$

qui est bien de la forme de l'équation (15).

28. On avait trouvé à la question 24 l'expression :

$$Z_{AB} = \frac{1}{iC_0\omega} \frac{1 + i\left(\frac{L_m\omega}{R_m} - \frac{1}{R_m C_m \omega}\right)}{1 + i\left(\frac{L_m\omega}{R_m} - \frac{C_0 + C_m}{R_m C_m C_0 \omega}\right)}$$

En comparant  $Z_{AB}$  et  $Z_S$  terme à terme, on en déduit :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_0 = C \\ \frac{L_m}{R_m} = \frac{m}{\alpha} \\ \frac{1}{R_m C_m} = \frac{k - \gamma^2 C}{\alpha} \\ \frac{C_0 + C_m}{R_m C_m C_0} = \frac{k}{\alpha} \end{array} \right.$$

Les deux dernières équations fournissent  $C_m = C_0 \frac{\gamma^2 C}{k - \gamma^2 C} = \frac{\gamma^2 C^2}{k - \gamma^2 C}$ . On déduit des deux équations « du milieu » et de l'expression de  $C_m$  :  $L_m = \frac{m}{\gamma^2 C^2}$ . Enfin, on obtient :  $R_m = \frac{\alpha}{m} L_m = \frac{\alpha}{\gamma^2 C^2}$ . Finalement, cela donne :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_0 = C \\ R_m = \frac{\alpha}{\gamma^2 C^2} \\ L_m = \frac{m}{\gamma^2 C^2} \\ C_m = \frac{\gamma^2 C^2}{k - \gamma^2 C} \end{array} \right.$$

29. Le seul élément qui consomme de la puissance moyenne (et donc, qui dissipe de l'énergie) est la résistance  $R_m$ . Celle-ci est proportionnelle au coefficient  $\alpha$  intervenant dans l'expression de la force de frottement, seule force dissipative, du modèle électromécanique. C'est donc parfaitement cohérent.

### III. Analyseur spectral

#### III.A. Interaction entre un champ électromagnétique et les phonons

30. La relation de dispersion des ondes électromagnétiques dans le vide s'écrit :  $k = \frac{\omega}{c}$ .
31. On écrit la conservation de l'énergie :  $\hbar\omega + \hbar\Omega = \hbar\omega'$ . Par conséquent :

$$\omega' = \omega + \Omega$$

32. Un laser de longueur d'onde  $\lambda = 600$  nm est de couleur rouge.

Les relations de dispersion des photons et du phonon s'écrivent  $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$ ,  $\lambda' = \frac{2\pi c}{\omega'}$  et  $\Lambda = \frac{2\pi c_s}{\Omega}$ . Par conséquent,  $\frac{1}{\Lambda} = \frac{c}{c_s} \frac{\lambda - \lambda'}{\lambda \lambda'} = \frac{c}{c_s} \frac{\Delta\lambda}{\lambda(\lambda - \Delta\lambda)}$ . Pour mesurer  $\Lambda$ , il faut donc mesurer  $\Delta\lambda = \lambda - \lambda'$ .

Puisque  $\lambda = \frac{c}{f}$  et  $\lambda' = \frac{c}{f'} = \frac{c}{f+F}$ ,  $\Delta\lambda = \lambda - \lambda' = c \left( \frac{1}{f} - \frac{1}{f+F} \right) = \frac{cF}{f(f+F)}$ . Or,  $F = 200$  MHz et  $f = \frac{c}{\lambda} = 5 \cdot 10^{14}$  Hz. On en déduit :

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda' \approx \frac{cF}{f^2} = \frac{3 \cdot 10^8 \times 2 \cdot 10^8}{25 \cdot 10^{28}} \approx 0,2 \text{ pm}$$

Cette variation de longueur d'onde est très en-dessous de la limite de résolution d'un spectromètre optique et n'est donc pas décelable par cette technique.

33. La conservation de la quantité de mouvement s'écrit  $\hbar \vec{k}_i + \hbar \vec{q} = \hbar \vec{k}_f$  soit :  $\vec{k}_i + \vec{q} = \vec{k}_f$ . En projetant sur la direction de propagation du photon incident et sur la direction de propagation du phonon, on obtient respectivement :

$$\begin{cases} k_f \cos \theta = k_i \\ k_f \sin \theta = q \end{cases}$$

34. D'après la question 32, on sait que  $k_f = \frac{2\pi}{\lambda'} \approx \frac{2\pi}{\lambda}$ . D'autre part,  $q = \frac{\Omega}{c_s} = \frac{2\pi F}{c_s}$ . On en déduit :

$$\sin \theta = \frac{\lambda F}{c_s} \approx 1,2 \cdot 10^{-2} \text{ rad}$$

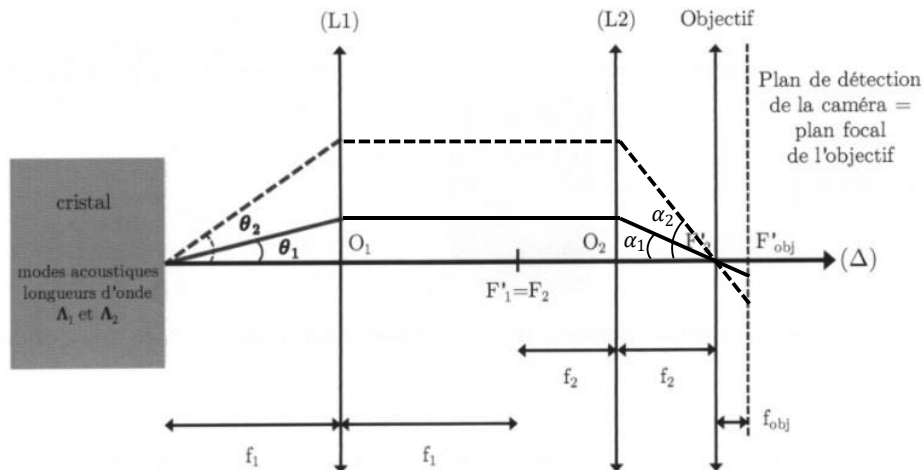
35. Vu la valeur de  $\sin \theta$ , il est donc légitime d'écrire :

$$\theta \approx \sin \theta = \frac{\lambda F}{c_s} = \frac{\lambda}{\Lambda}$$

On reconnaît la formule donnant l'angle de diffraction d'un faisceau lumineux de longueur d'onde  $\lambda$  par un motif de taille  $\Lambda$ .

### III.B. Montage optique

36.



37. On voit que le schéma précédent que  $f_1 \tan \theta_1 = f_2 \tan \alpha_1$ . Or,  $\tan \alpha_1 = \frac{F'_{obj} c_1}{f_{obj}}$ . On en déduit :

$$F'_{\text{obj}} C_1 = f_{\text{obj}} \frac{f_1}{f_2} \tan \theta_1 \approx f_{\text{obj}} \frac{f_1}{f_2} \theta_1$$

38. D'après le résultat obtenu à la question 37, la résolution angulaire du montage est fixée par la taille d'un pixel :

$$\Delta\theta = \frac{f_2 d_{\text{pixel}}}{f_1 f_{\text{obj}}}$$

Or, on sait que  $\Lambda = \frac{\lambda}{\theta}$ . En différentiant cette relation, on obtient :  $\Delta\Lambda \approx \frac{\lambda}{\theta_0^2} \Delta\theta$ . Or,  $\theta_0 = \frac{\lambda}{\Lambda_0}$ .

Par conséquent :

$$\Delta\Lambda = \frac{\Lambda_0^2}{\lambda} \Delta\theta$$

Numériquement, on trouve  $\Delta\theta = 2,4 \cdot 10^{-3}$  rad,  $\Lambda_0 = \frac{c_s}{F} = 50 \mu\text{m}$  et  $\Delta\Lambda = 0,1 \mu\text{m}$ .

Pour augmenter la résolution, il faut diminuer la valeur de  $\Delta\theta$  et donc diminuer  $f_2$  et augmenter  $f_1$ .

39. Le faisceau n°1 ne traverse pas le cristal donc  $\omega_1 = \omega$ . Le faisceau n°2 traverse le cristal donc, d'après la question 31,  $\omega_1 = \omega + \Omega$ .
40. Les équations de Maxwell étant linéaire, on peut appliquer le théorème de superposition.

41. Les deux signaux s'écrivent donc :  $\begin{cases} s_1(t) = s_0 \cos(\omega t) \\ s_2(t) = s_0 \cos((\omega + \Omega)t) \end{cases}$ . Calculons  $s_{\text{tot}}^2(t)$  :

$$s_{\text{tot}}^2(t) = s_0^2 (\cos^2(\omega t) + \cos^2((\omega + \Omega)t) + 2 \cos(\omega t) \cos((\omega + \Omega)t))$$

Cela se réécrit sous la forme :

$$s_{\text{tot}}^2(t) = s_0^2 (\cos^2(\omega t) + \cos^2((\omega + \Omega)t) + \cos((2\omega + \Omega)t) + \cos(\Omega t))$$

Ici, il y a une erreur d'énoncé : l'intensité lumineuse vaut en réalité

$$I_{\text{lum}}(t) = \langle s_{\text{tot}}^2(t) \rangle_{\tau_{\text{réponse}}}$$

Or,  $\tau_{\text{réponse}} = 10 \text{ ps}$ ,  $\frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f} = 2 \cdot 10^{-15} \text{ s}$  et  $\frac{2\pi}{\Omega} = \frac{1}{F} = 5 \text{ ns}$ .

Donc  $\tau_{\text{réponse}} \gg \frac{2\pi}{\omega} > \frac{2\pi}{\omega + \Omega} > \frac{2\pi}{2\omega + \Omega}$  :  $\begin{cases} \langle \cos^2(\omega t) \rangle_{\tau_{\text{réponse}}} = \langle \cos^2((\omega + \Omega)t) \rangle_{\tau_{\text{réponse}}} = \frac{1}{2} \\ \langle \cos((2\omega + \Omega)t) \rangle_{\tau_{\text{réponse}}} = 0 \end{cases}$ .

Mais  $\tau_{\text{réponse}} \ll \frac{2\pi}{\Omega}$ . Par conséquent, le capteur est assez rapide pour suivre les variations de  $\cos(\Omega t)$  :  $\langle \cos(\Omega t) \rangle_{\tau_{\text{réponse}}} = \cos(\Omega t)$ . On en déduit :

$$I_{\text{lum}}(t) = \langle s_{\text{tot}}^2(t) \rangle_{\tau_{\text{réponse}}} = s_0^2 (1 + \cos(\Omega t))$$

Le signal de sortie de la photodiode étant proportionnel à  $I_{\text{lum}}(t)$ , il varie sinusoidalement avec une pulsation  $\Omega$  (à une composante continue près). On peut donc mesurer  $\Omega$ .

### III.C. Traitement du signal obtenu

42. D'après la question précédente, il est évident que  $\omega_{\text{alt}} = \Omega$ .

Si  $u(t) = u_{\text{alt}}(t) = u_{\text{alt},0} \cos(\Omega t)$ , le signal de sortie du multiplieur s'écrit :

$$U_m(t) = K u_{\text{alt},0} u_{\text{réf},0} \cos(\Omega t) \cos(\omega_{\text{réf}} t) = \frac{K u_{\text{alt},0} u_{\text{réf},0}}{2} (\cos((\Omega + \omega_{\text{réf}})t) + \cos((\Omega - \omega_{\text{réf}})t))$$

43. Le terme  $\cos((\Omega + \omega_{\text{réf}})t)$  a une fréquence comprise entre 400 MHz et 430 MHz, en-dehors de la bande passante de l'oscilloscope (il faudra donc le filtrer). Mais Le terme  $\cos((\Omega - \omega_{\text{réf}})t)$  a une fréquence inférieure à 30 MHz, et se situe donc dans la bande passante de l'oscilloscope : il est donc exploitable.
44. Question de cours de base : il s'agit bien sûr d'un filtre  $RC$  passe-bas du 1<sup>er</sup> ordre (tension prise aux bornes de  $C$ ), de fréquence de coupure  $f_c = \frac{1}{2\pi RC}$ . Ce filtre doit atténuer suffisamment le terme fréquence supérieure à 400 MHz, mais laisser passer le terme de fréquence inférieure à 30 MHz. On peut proposer  $f_c = 40$  MHz. Dans ce cas, la constante de temps du filtre vaut  $RC = \frac{1}{2\pi f_c} \approx 0,4$  ns (ce qui est peu). Un couple de valeurs plausibles serait par exemple  $R = 100 \Omega$  et  $C = 4$  pF.
45. On peut bien sûr recourir à la FFT de l'oscilloscope.
46. On distingue trois raies de fréquences 1 MHz, 3 MHz et 11 MHz (qui correspondent à  $F - f_{\text{réf}}$ ). Les fréquences des modes acoustiques correspondantes sont donc 201 MHz, 203 MHz et 211 MHz.
47. Dévier la lumière incidente dans une direction donnée, dépendant du phonon ? Mais dans ce cas, il faudrait des phonons plus énergétiques, de fréquence plus élevée...