

I.A.1)a) En régime stationnaire, on peut écrire que ce qui entre à l'abscisse x sort à l'abscisse x_T ce qui donne, à la largeur L près et dans le cas du fluide incompressible : $h_T V = h(x)v(x)$.

b) l'équation locale de conservation de la masse donne dans le cas de l'écoulement incompressible : $\text{div} \vec{v} = 0$ ce qui se traduirait ici par $\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$. Ce n'est pas parce que $v_z \ll v_x$ que l'on peut écrire que $\frac{\partial v_z}{\partial z}$ est négligeable devant $\frac{\partial v_x}{\partial x}$.

c) Puisque l'on approxime la vitesse par $v(x)\vec{e}_x$, on a $\text{rot} \vec{v} = \vec{0}$: l'écoulement peut être considéré comme irrotationnel.

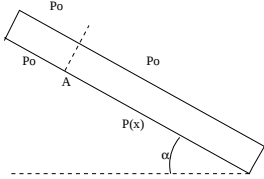
d) L'écoulement est permanent, incompressible et irrotationnel et on néglige l'influence de la pesanteur : on a donc $p + \frac{1}{2}\rho v^2 = p_0 + \frac{1}{2}\rho V^2$.

I.A.2)a) Comme $v^2 = \frac{h_T^2}{h(x)^2} V^2$, il vient facilement : $p(x) - p_0 = \frac{1}{2}\rho V^2 \left[1 - \frac{h_T^2}{h(x)^2}\right]$.

b) La pente étant $-tg\alpha$, il vient : $\frac{h(x)-h_T}{x-x_T} = -tg\alpha$ ce qui donne en tenant compte du fait que l'angle α est petit :

$$h(x) = h_T + \alpha(x_T - x)$$

c) la pression sous la planche est $p(x)$ sauf sur la partie non mouillée où elle vaut p_0 :



La résultante des forces de pression $\vec{F}$ est orthogonale à la plaque.

La force F_z vaut $F \cos \alpha = F'$:

$$F_z = \left[\int_{x_A}^{x_T} (p(x) - p_0) L dx \right] \cos \alpha = \int_{x_A}^{x_T} (p(x) - p_0) L dx$$

or $dx = -\frac{dh}{\alpha}$ permet de transformer l'intégrale en :

$$F_z = \frac{1}{2} \rho L V^2 \int_{h_A}^{h_T} \left[1 - \left(\frac{h_T}{h} \right)^2 \right] \left(-\frac{dh}{\alpha} \right) = \frac{1}{2} \rho L V^2 \left[\left(\frac{h_A - h_T}{\alpha} \right) + \frac{h_T^2}{\alpha} \left(\frac{1}{h_A} - \frac{1}{h_T} \right) \right] = \frac{1}{2} \rho L V^2 l_m \left[1 - \frac{h_T}{h_A} \right]$$

en utilisant le fait que $l_m = \frac{h_A - h_T}{\alpha}$.

On en déduit donc que

$$\lambda = \frac{h_T}{h_A}$$

La force F_x vaut de façon évidente $F \sin \alpha = F \alpha$ soit $F_x = \frac{1}{2} \rho L l_m V^2 \alpha \left[1 - \frac{h_T}{h_A} \right]$

d) $M = \int (p(x) - p_0)(x_T - x) L dx = \frac{1}{2} \rho L V^2 \int (x_T - x) \left(1 - \frac{h_T^2}{h^2} \right) dx$ dont on tire $K = \frac{1}{2} \rho L V^2$.

e) Erreur d'énoncé ici puisque la force F_z était déjà proportionnelle à $\rho V^2 L l_m$ et qu'une fraction de l_m interviendra dans le moment de cette force au point T ; la formule exacte est donc $M = \frac{1}{4} \rho V^2 L l_m^2 f(\lambda)$.

Il y aura équilibre si la somme des forces est nulle, ce qui entraîne que le poids du surfeur doit être égal à F_z et si le moment des forces en tout point est nul : ceci entraîne $M - F_z l_P = 0$.

On en tire donc

$$l_P = \frac{1}{2} \frac{f(\lambda)}{1 - \lambda} l_m$$

I.A.3)a) La quantité de mouvement selon x à t est : $P_x(t) = D_m dt v_A + P_\Sigma$

À $t + dt$ $P_x(t + dt) = P_\Sigma + D_m dt V$.

$$\frac{dP_x}{dt} = D_m (V - v_A)$$

$h_A v_A = V h_T$ donne

$$\frac{dP_x}{dt} = D_m V \left(1 - \frac{h_T}{h_A} \right) = \rho h_T L V^2 (1 - \lambda)$$

b) La résultante des forces de pression selon $\vec{e}_x$ sur le volume hachuré est :

$$p_A h_A L - p_0 h_T L - \int_{x_A}^{x_T} p(x) \alpha L dx$$

or

$$F_x = \int_{x_A}^{x_T} [p(x) - p_0] \alpha L dx = \int_{x_A}^{x_T} p(x) \alpha L dx - p_0 \alpha L (x_T - x_A) = \int_{x_A}^{x_T} p(x) \alpha L dx + p_0 L (h_A - h_T)$$

On a donc pour résultante : $(p_A - p_0) h_A L - F_x$

c) On écrit donc : $\frac{dP_x}{dt} = (p_A - p_0) h_A L - F_x = \rho h_T L V^2 (1 - \lambda)$

Or $p_A - p_0 = \frac{1}{2}\rho V^2(1 - \left(\frac{h_T}{h_A}\right)^2) = \frac{1}{2}\rho V^2(1 - \lambda^2)$
 Ceci donne donc :

$$F_x = \frac{1}{2}\rho V^2(1 - \lambda^2)h_A L - \rho h_T L V^2(1 - \lambda) = \rho L V^2(1 - \lambda) \left[\frac{1}{2}h_A(1 + \lambda) - h_T \right]$$

Comme $\frac{1}{2}h_A(1 + \frac{h_T}{h_A}) - h_T = \frac{1}{2}(h_A - h_T)$ et que $h_A - h_T = l_m \alpha$, il vient :

$$F_x = \frac{1}{2}\rho L V^2(1 - \lambda)l_m \alpha$$

ce qui correspond bien à la formule trouvée au I.A.2c.

I.B.1) Puisqu'il y a équilibre des forces verticales, on sait que $F_z = mg$ et donc que $F_x = mg\alpha$
 On en tire donc la relation : $-m\frac{dV}{dt} = mg\alpha$ ce qui donne

$$\frac{dV}{dt} = -g\alpha$$

I.B.2a) On doit avoir $F_z = mg$ ce qui donne :

$$\frac{1}{2}\rho L V^2(1 - \frac{h_T}{h_A})l_m = mg$$

Or $h_A = h_T + l_m \alpha$; il vient donc

$$\rho \frac{V^2}{2} L l_m (1 - \frac{h_T}{h_T + l_m \alpha}) = mg \text{ qui aboutit à :}$$

$$l_m^2 (\rho L \alpha \frac{V^2}{2}) - mg \alpha l_m - mgh_T = 0 \text{ soit encore : } l_m^2 - 2\frac{mg}{\rho L V^2} l_m - 2\frac{mgh_T}{\rho \alpha L V^2} = (l_m - \frac{mg}{\rho L V^2})^2 - (\frac{mg}{\rho L V^2})^2 - 2\frac{mgh_T}{\rho \alpha L V^2} = 0 .$$

On en tire

$$l_m = \frac{mg}{\rho L V^2} + \sqrt{(\frac{mg}{\rho L V^2})^2 + 2\frac{mgh_T}{\rho \alpha L V^2}}$$

I.B.2b) Il faut que l_m soit inférieure à L' ce qui entraîne la nécessité que V dépasse une valeur minimale telle que $l_m = L'$
 soit

$$V_{min}^2 = 2mg(\frac{\alpha L' + h_T}{\rho \alpha L L'^2})$$

I.B.2c) Application numérique : $V_{min} = 1,0m.s^{-1}$ (On vérifie bien que ceci correspond à la courbe proposée); $\frac{dV}{dt} = -g\alpha$
 donne par intégration : $V - V_0 = -g\alpha t$ ce qui permet de calculer l'instant où le mouvement cesse $t_f = \frac{V_0 - V_{min}}{g\alpha}$. On en tire la distance parcourue puisque

$$V = V_0 - g\alpha t \text{ donne } x = V_0 t - g\alpha \frac{t^2}{2} .$$

$$\Delta x = V_0 t_f - g\alpha \frac{t_f^2}{2} .$$

$$\Delta x = 9m$$

I.B.3 Le modèle néglige les forces de viscosité et de tension superficielle

I.C.1) En faisant un bilan de quantité de mouvement entre t et $t + dt$, il vient :

$$P_x(t) = P_\Sigma + \rho L(h_T + \delta)V dt V$$

$$P_x(t + dt) = P_\Sigma + \rho L \delta V dt (-V) + \rho L h_T V dt V$$

$$\text{Donc } dP_x = -2\rho \delta L V^2 dt$$

I.C.2) Ceci donne par application du théorème de la résultante cinétique sur la direction $x \rightarrow x$:

$$\frac{dP_x}{dt} = -F_x = -F_z \alpha \text{ d'où l'on tire}$$

$$F_z = 2\frac{\rho L \delta V^2}{\alpha}$$

On voit qu'il faut nécessairement $\delta \neq 0$ pour que $F_z \neq 0$.

I.C.3) L'application numérique donne $\delta = 4mm$

II.A.1) La partie immergée a pour largeur a et pour longueur $-z/\sin\theta$; on en déduit

$$S_{im} = -\frac{az}{\sin\theta}$$

II.A.2) Les équations du mouvement du galet projetées sur les axes s'écrivent :

$$m\frac{dv_x}{dt} = \frac{1}{2}\rho C_n v^2 S_{im}(-\sin\theta) - \frac{1}{2}\rho C_t v^2 S_{im}\cos\theta$$

$$m\frac{dv_z}{dt} = \frac{1}{2}\rho C_n v^2 S_{im}\cos\theta - \frac{1}{2}\rho C_t v^2 S_{im}\sin\theta - mg$$

II.A.3)a) Comme $S_{im} = -\frac{az}{\sin\theta}$, on obtient :

$$m \frac{dv_z}{dt} = \frac{1}{2} \rho v_0^2 \left(-\frac{az}{\sin\theta} \right) (C_n \cos\theta - C_t \sin\theta) - mg = -\frac{1}{2} \frac{\rho v_0^2}{\sin\theta} C a z - mg$$

ce qui donne :

$$\ddot{z} + \frac{\rho v_0^2 C a}{2m \sin\theta} z = -g$$

On a donc

$$\omega_0^2 = \frac{\rho v_0^2 C a}{2m \sin\theta}$$

II.A.3)b) La résolution de $\ddot{z} + \omega_0^2 z = -g$ donne $z = -\frac{g}{\omega_0^2} + A \cos\omega_0 t + B \sin\omega_0 t$. Comme $z(0) = 0$ et $\dot{z}(0) = v_{z0}$, on peut calculer A et B et l'on obtient :

$$z = \frac{g}{\omega_0^2} (-1 + \cos\omega_0 t) + \frac{v_{z0}}{\omega_0} \sin\omega_0 t$$

II.A.3)c) La profondeur maximale atteinte correspond à $dz/dt = 0$ ce qui donne : $-\frac{g}{\omega_0} \sin\omega_0 t_0 + v_{z0} \cos\omega_0 t_0 = 0$

$\tan\omega_0 t_0 = \frac{\omega_0 v_{z0}}{g}$; on voit que $\tan\omega_0 t_0 < 0$ et l'on prend donc l'angle pour lequel sinus est positif et cosinus négatif puisque c'est pour ces valeurs que z sera minimale. Donc, en posant $\tau = \tan\omega_0 t_0$, il vient :

$$\cos\omega_0 t_0 = -\frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}} \text{ et } \sin\omega_0 t_0 = -\frac{\tau}{\sqrt{1+\tau^2}} \text{ ce qui donne en reportant dans l'expression de } z :$$

$$z_{min} = -\frac{g}{\omega_0^2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}} \right) - \frac{v_{z0}}{\omega_0} \frac{\tau}{\sqrt{1+\tau^2}} = -\frac{g}{\omega_0^2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}} + \frac{\tau^2}{\sqrt{1+\tau^2}} \right) = -\frac{g}{\omega_0^2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{\omega_0^2 v_{z0}^2}{g^2}} \right)$$

La profondeur maximale atteinte est donc :

$$|z_{min}| = \frac{g}{\omega_0^2} \left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0 v_{z0}}{g} \right)^2} \right]$$

II.A.3)d) Pour que le galet ne coule pas, il faut que $|z_{min}| < a \sin\theta$ ce qui donne :

$$\frac{g}{\omega_0^2} \left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0 v_{z0}}{g} \right)^2} \right] < a \sin\theta$$

$$\text{Or } v_{z0} = -v_0 \sin\alpha_0 \text{ et } \omega_0^2 = \frac{\rho v_0^2 C a}{2m \sin\theta}, \text{ il vient donc : } \frac{\rho v_0^2 C a^2 \sin\theta}{2mg \sin\theta} > 1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\rho v_0^4 C a \sin^2 \alpha_0}{2mg^2 \sin\theta} \right)}$$

$$\text{Soit } \frac{\rho v_0^2 C a^2}{2mg} - 1 > \sqrt{1 + \frac{\rho v_0^4 C a \sin^2 \alpha_0}{2mg^2 \sin\theta}} \text{ qu'on élève au carré pour obtenir finalement :}$$

$$\frac{\rho^2 v_0^4 C^2 a^4}{4m^2 g^2} - \frac{\rho v_0^2 C a^2}{mg} > \frac{\rho v_0^4 C a \sin^2 \alpha_0}{2mg^2 \sin\theta}$$

On simplifie par $\frac{\rho v_0^2 C a^2}{mg}$ ce qui donne : $v_0^2 \left[\frac{\rho C a^2}{4mg} - \frac{\sin^2 \alpha_0}{2ag \sin\theta} \right] > 1$. On trouve bien la condition :

$$v_0 > \sqrt{\frac{2ag}{\frac{\rho C a^3}{2m} - \frac{\sin^2 \alpha_0}{\sin\theta}}}$$

L'application numérique donne : $v_0 > v_{0min} = 0,42m.s^{-1}$

II.A.4 L'équation donnant τ s'écrit

$$0 = -\frac{g}{\omega_0^2} (1 - \cos\omega_0 \tau) + \frac{v_{z0}}{\omega_0} \sin\omega_0 \tau$$

Les valeurs proposées permettent de calculer $g/\omega_0^2 = 2,2.10^{-7}m$ alors que $\left| \frac{v_{z0}}{\omega_0} \right| = 2,6.10^{-4}m$. On peut donc négliger le premier terme devant le second et il vient alors : $\sin\omega_0 \tau = 0$ ce qui donne bien $\tau = \pi/\omega_0$. Dans ces conditions, la vitesse v_z vaut $-v_{z0}$ au moment où le galet ressort de l'eau.

II.A.5)a) L'équation de la dynamique projetée sur $x'x$ donnait :

$$m \frac{dv_x}{dt} = \frac{1}{2} \rho v^2 a z \frac{C'}{\sin\theta}$$

Or $z = \frac{g}{\omega_0^2} (-1 + \cos\omega_0 t) + \frac{v_{z0}}{\omega_0} \sin\omega_0 t$ qu'on peut substituer dans l'équation précédente :

$$m dv_x = \frac{1}{2} \rho a v^2 \frac{C'}{\sin\theta} \left[\frac{g}{\omega_0^2} (-1 + \cos\omega_0 t) - \frac{v_0 \sin\alpha_0}{\omega_0} \sin\omega_0 t \right] dt$$

puisque $v_{z0} = -v_0 \sin \alpha_0$ alors que $v_{x0} = v_0 \cos \alpha_0$.

$$v_x(\tau) - v_{x0} = \int_0^\tau dv_x/dt \cdot dt = \frac{1}{2} \rho a v^2 \frac{C'}{m \sin \theta} \left[-\frac{g\pi}{\omega_0^3} - \frac{2v_0 \sin \alpha_0}{\omega_0^2} \right]$$

Comme $\omega_0^2 = \frac{\rho v^2 C a}{2m \sin \theta}$, il vient : $\Delta v_x = -\frac{C'}{C} \left[\frac{g\pi}{\omega_0} + 2v_0 \sin \alpha_0 \right]$

On obtient en divisant par $v_{x0} = v_0 \cos \alpha_0$:

$$\left| \frac{\Delta v_x}{v_{x0}} \right| = \frac{C'}{C} \left[\frac{g\pi}{\omega_0 v_0 \cos \alpha_0} + 2 \tan \alpha_0 \right]$$

II.A.5)b) L'application numérique donne : $\left| \frac{\Delta v_x}{v_{x0}} \right| = 0,083$. On constate que pour une telle variation de vitesse, on peut considérer que v reste égale à v_0 dans l'expression de la force.

II.B.1)a) $\Delta E_c = \int_0^\tau \vec{F} \cdot \vec{v} dt$

$$\vec{F} \cdot \vec{v} dt = \frac{1}{2} \rho v_0^2 \frac{a z}{\sin \theta} C' \cdot v_x dt + \left(-\frac{1}{2} \rho v_0^2 \frac{C a z}{\sin \theta} - mg \right) \cdot v_z dt$$

$$\int_0^\tau -mg \cdot v_z dt = \int_0^\tau -mg dz = 0 \text{ puisque } z(\tau) = z(0)$$

$$\text{De plus on a aussi } \int_0^\tau z \cdot v_z dt = \int_0^\tau z dz = \frac{1}{2} [z^2(\tau) - z^2(0)] = 0$$

Il ne reste donc dans le terme de variation d'énergie cinétique que la contribution de $F_x v_x dt$.

II.B.1)b) Or, on a $F_x = -\frac{C'}{C} F_z$ ce qui donne :

$$\Delta E_c = -\frac{C'}{C} v_{x0} \int_0^\tau F_z dt$$

et ainsi

$$\mu = \frac{C'}{C}$$

II.B.1)c) Puisque aux instants 0 et τ la cote du galet est la même $z = 0$, on peut admettre qu'en moyenne la force globale selon z est nulle ce qui permet d'identifier F_z avec mg et comme τ vaut π/ω_0 , on trouve bien comme formule approchée :

$$\Delta E_c \simeq -\frac{C'}{C} v_{x0} mg \frac{\pi}{\omega_0}$$

Comme $\omega_0 = v_0 \sqrt{\frac{\rho C a}{2m \sin \theta}}$ et que $v_{x0} = v_0 \cos \alpha_0$, il vient facilement :

$$\Delta E_c = -\frac{C'}{C} \pi mg \cos \alpha_0 \sqrt{\frac{2m \sin \theta}{\rho C a}}$$

qui est bien indépendante de v_0 .

II.B.2 Nous avons trouvé comme valeur minimale de v_0 pour que le galet ne coule pas la valeur v_{0min} ; l'énergie cinétique restante lorsque le galet coule est donc $E_{cf} = \frac{1}{2} m v_{0min}^2$ qui est négligeable devant l'énergie cinétique initiale qui valait $\frac{1}{2} m v_0^2$. Le nombre de ricochets possibles est donc dans le cadre de ce modèle :

$$N \simeq \frac{C v_0^2}{2 C' \pi g \cos \alpha_0} \sqrt{\frac{\rho C a}{2m \sin \theta}}$$

L'application numérique donne : $N \simeq 14000$ ce qui est très supérieur à la réalité : il faut prendre en compte la viscosité du fluide si on veut obtenir des résultats plus réalistes.

III.A Pour une pente de 5%, l'angle α est tel que $\tan \alpha = 0,05$ soit $\alpha = 2,86^\circ$ ou encore $\alpha = 0,05 \text{ rad}$.

La conservation de l'énergie mécanique permet d'écrire :

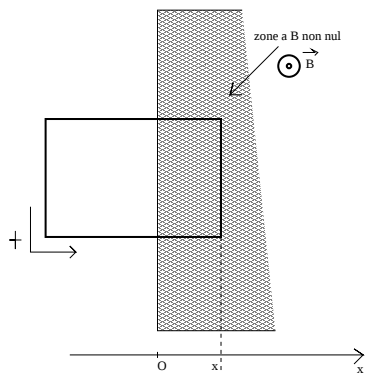
$$\frac{1}{2} m v_0^2 = m g a \sin \alpha$$

d'où l'on tire :

$$a = \frac{v_0^2}{2g \sin \alpha}$$

L'application numérique donne : $a \simeq 900 \text{ m}$.

III.B.1)a) On fait un schéma orienté :



Le flux à travers le circuit orienté vaut $\varphi = lxB_0$, d'où une fém induite $e = -B_0 l \dot{x}$ qui donne un courant $i = -\frac{B_0 l \dot{x}}{R}$. Ce courant i dans un champ magnétique est soumis à une force de Laplace $\vec{F} = i l B_0 \vec{e}_x$. L'équation différentielle du mouvement est donc, en posant $v = \dot{x}$:

$$m \frac{dv}{dt} = -\frac{B_0^2 l^2}{R} v$$

Le temps caractéristique τ est donc égal à :

$$\tau = \frac{mR}{B_0^2 l^2}$$

Dès que le cadre est totalement immergé dans la zone de champ uniforme, il n'y a plus de variation de flux, donc plus de phénomène d'induction, donc plus de freinage.

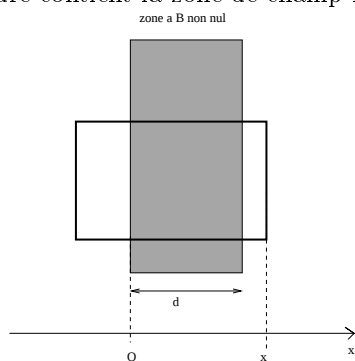
Dans la phase de freinage, $v = v_0 \exp(-\frac{t}{\tau})$ ce qui donne par intégration :

$$x = v_0 \tau (1 - \exp(-\frac{t}{\tau}))$$

On voit immédiatement que x ne peut pas dépasser $v_0 \tau$: il suffit que L soit supérieure à $v_0 \tau$ pour qu'il y ait arrêt.

Application numérique : $\frac{mRv_0}{B_0^2 l^2} = \frac{30}{0,09} = 333 \text{ m}$, très supérieure à $L = 50 \text{ cm}$.

III.B.2)a) Si $L > d$, il existe une phase où la vitesse ne varie plus puisque le flux ne varie plus : c'est la phase où le cadre contient la zone de champ non nul. (cf schéma)



L'équation du mouvement trouvée précédemment n'est valable que jusqu'au moment où $x = d$ ce qui correspond à un instant t_0 tel que $v_0 \tau (1 - \exp(-\frac{t_0}{\tau})) = d$ soit $\exp(-\frac{t_0}{\tau}) = \frac{v_0 \tau - d}{v_0 \tau}$. La vitesse du cadre est alors égale à

$$v(t_0) = v_0 \exp(-\frac{t_0}{\tau}) = v_0 - \frac{d}{\tau}$$

La chute de vitesse a été de $\frac{d}{\tau}$ lors de la première phase.

Il y aura une seconde phase de freinage pour la sortie de la zone à B non nul et on aura de nouveau une diminution de la vitesse de $\frac{d}{\tau}$.

La vitesse à l'issue des deux phases de freinage est donc

$$v_0 - 2\frac{d}{\tau}$$

III.B.2)b) Si $L > d$, lorsque le cadre est totalement immergé, il a subi une diminution de vitesse de $\frac{L}{\tau}$ et il en sera de même à la sortie.

Ainsi, dans ce cas-là, la vitesse finale est

$$v_0 - 2\frac{L}{\tau}$$

III.B.2)c) Il faut donc donner la valeur L à d pour optimiser le freinage.

III.B.3) si on place N zones de freinage identiques, on a intérêt à minimiser les zones où la vitesse reste constante; il faut donc fixer à L la valeur de D .

La vitesse après un parcours de $2L$ a diminué de $\frac{2L}{\tau}$; il faut pour s'arrêter N motifs de telle sorte que

$$v_0 = N \frac{2L}{\tau}$$

Ainsi, la distance d'arrêt est

$$N2L = v_0\tau$$

L'application numérique donne 333 mètres ce qui est bien inférieur à 900 mètres.

III.B.4)a) La durée de chaque phase de freinage est $2t_0$ où t_0 est tel que : $\exp(-\frac{t_0}{\tau}) = 1 - \frac{L}{v_0\tau}$. Or $L \ll v_0\tau$ ce qui suggère que $\frac{t_0}{\tau} \ll 1$ et donc que $1 - \frac{t_0}{\tau} = 1 - \frac{L}{v_0\tau}$ et ainsi :

$$t_0 = \frac{L}{v_0}$$

La durée totale du freinage est donc $2N \frac{L}{v_0} = \tau$. On trouve à peu près 11 secondes.

III.B.4)b) Pour diminuer la vitesse de $20m.s^{-1}$, il faudra les deux tiers de ce qu'il fallait pour l'arrêter à partir de $30m.s^{-1}$. Il faut donc un temps qui vaut $\frac{2}{3}\tau = 7,4 \text{ secondes}$ et il faut 222 zones.

III.C.1) L'équation bilan à une dimension dans un milieu sans sources s'écrit :

$$\text{div } \vec{j}_Q + \mu c \frac{\partial T}{\partial t} = -\lambda \Delta T + \mu c \frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

III.C.2) La diffusivité thermique est la quantité $D_{th} = \frac{\lambda}{\mu c}$; elle a pour dimension des $m^2.s^{-1}$.

Si on appelle θ le temps caractéristique des transferts thermiques dans le cylindre, on peut écrire :

$$\frac{\lambda}{\mu c} = \frac{a^2}{\theta}$$

Donc

$$\theta = \frac{\mu c a^2}{\lambda} = 0,28 \text{ seconde}$$

Ce temps est très court devant le temps d'arrêt de l'engin. On peut donc considérer la température comme uniforme dans le fil de cuivre.

III.C.3) Si on peut négliger les transferts thermiques avec l'extérieur, l'effet Joule dégagé correspond à l'énergie cinétique initiale et on a donc : $m'c\Delta T = \frac{1}{2}mv_0^2$ ce qui donne :

$$\Delta T = \frac{mv_0^2}{2m'c} = \frac{mv_0^2}{4(L+l)\pi a^2 \mu c} = 81^\circ$$

III.C.4)a) $m'c \frac{dT_C}{dt} = -h4\pi a(L+l)(T_C - T_0)$

$$\mu 2\pi a^2(L+l)c \frac{dT_C}{dt} = -h4\pi a(L+l)(T_C - T_0)$$

$$\frac{dT_C}{dt} + \frac{2h}{\mu ac}(T_C - T_0) = 0$$

Le temps caractéristique du refroidissement est

$$\tau = \frac{\mu ac}{2h}$$

III.C.4)b) L'application numérique donne : $\tau = 980 \text{ secondes}$ soit 16 minutes et 20 secondes

III.C.5)a) Le flux thermique radial par unité de longueur dans l'isolant est égal à : $\varphi = -\lambda_{is} \frac{dT_{is}}{dr} 2\pi r$ et il doit être indépendant de r en régime stationnaire . C'est donc P .

Donc $\frac{dT_{is}}{dr} = -\frac{P}{\lambda_{is} 2\pi r}$ ce qui donne par intégration entre a et r :

$$T_{is}(r) - T_{is}(a) = -\frac{P}{\lambda_{is} 2\pi} \ln\left(\frac{r}{a}\right)$$

On a donc

$$T_{is}(b) - T_C = -\frac{P}{2\pi \lambda_{is}} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Cette puissance thermique doit être égale à celle qui est cédée à l'air par unité de longueur ce qui donne un moyen de calculer $T_{is}(b)$:

$$P = h2\pi b(T_{is}(b) - T_0)$$

soit

$$T_{is}(b) \left[1 + \frac{hb}{\lambda_{is}} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right] = T_C + \frac{hb}{\lambda_{is}} \ln\left(\frac{b}{a}\right) T_0$$

Il vient donc :

$$P = \frac{2\pi hb(T_C - T_0)}{1 + \frac{hb}{\lambda_{is}} \ln(\frac{b}{a})} = 2\pi ha(T_C - T_0) \left[\frac{\frac{b}{a}}{1 + \frac{ha}{\lambda_{is}} \frac{b}{a} \ln(\frac{b}{a})} \right]$$

On en déduit que

$$K = 2\pi ha(T_C - T_0)$$

et on a bien la formule demandée :

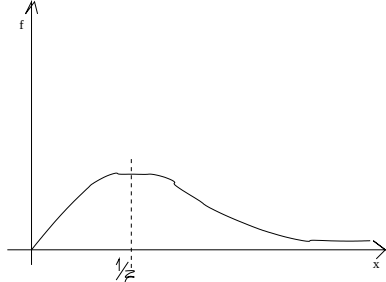
$$P = K \frac{x}{1 + \frac{ha}{\lambda_{is}} x \ln x}$$

III.C.5)b) Posons $\xi = \frac{ha}{\lambda_{is}}$ et étudions la fonction

$$f(x) = \frac{x}{1 + \xi x \ln x}$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{(1 + \xi x \ln x) - x(\xi \ln x + \xi)}{(1 + \xi x \ln x)^2} = \frac{1 - \xi x}{(1 + \xi x \ln x)^2}$$

On voit que $\frac{df}{dx} = 0$ pour $x = \frac{1}{\xi}$ et que f est croissante pour $x < \frac{1}{\xi}$ et décroissante au delà. l'allure de la fonction f est donc la suivante :



La valeur numérique de ξ est ici $\xi = 0,5642$; on en tire que $\frac{b}{a} = \frac{1}{0,5642} = 1,77$. Donc l'épaisseur d'isolant est

$$e = b - a = 0,77a = 0,77 \sqrt{\frac{s}{\pi}} = 4,3mm$$

III.C.5)c) La valeur maximale de f est $\frac{1}{\xi(1-\ln\xi)} \simeq 1,13$. On a donc divisé le temps de refroidissement par ce coefficient soit un nouveau temps de 870 secondes : on a gagné une minute et demie!